

4. série

Téma: Barevná čísla

Termín odesláni: 3. LEDNA 2005

1. ÚLOHA (3 BODY)

Eskymák umí obarvit čísla $1, 2, \dots, 18$ několika odstíny bílé tak, že z jeho pohledu mají čísla a, b a $a + b$ různý odstín (pro libovolná různá přirozená a, b taková, že $a + b \leq 18$). Určete, kolik nejméně odstínů bílé musí umět eskymák rozlišit.

2. ÚLOHA (3 BODY)

Kolika způsoby je možno obarvit čísla $1, 2, \dots, n$ brčálově, smaragdově a limetkově zelenou tak, že sudá čísla nejsou smaragdová a žádná dvě sousední čísla nemají stejnou barvu?

3. ÚLOHA (3 BODY)

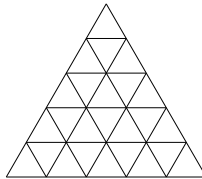
Kolem kulatého stolu se sešla čísla $1, 2, \dots, n$. Jednička kamarádí s dvojkou, dvojka s trojkou, $\dots, n - 1$ má za kamaráda n a n jedničku. Židličky kolem stolu, kterých je n (stejně jako čísel), jsou obarveny k barvami, každá právě jednou barvou. Každé číslo má rádo jednu z těchto k barev a v této chvíli sedí každé číslo na židličce, jež je obarvena jeho oblíbenou barvou, navíc sedí tak, že kamarádi jsou vedle sebe.

A jaký je váš úkol? V závislosti na počtu čísel n rozhodněte, jaký je nejmenší možný počet barev k tak, abyste po vámi zvoleném obarvení židliček těmito k barvami a usazení čísel měli jistotu, že se čísla nemohou přemístit¹ tak, aby kamarádi zůstali vedle sebe a každé číslo sedělo na židličce své oblíbené barvy.

4. ÚLOHA (5 BODŮ)

Dokažte, že lze obarvit kladná racionální čísla tyrkysovou a azurovou barvou tak, že pro každé kladné racionální číslo q mají q a $q + 1$ různou barvu a q a $\frac{1}{q}$ stejnou barvu.

5. ÚLOHA (5 BODŮ)



Trojúhelník T je rozdělen přímkami rovnoběžnými se stranami trojúhelníku na n^2 shodných trojúhelníčků tak, jak je naznačeno na obrázku. Dino do menších trojúhelníčků v nějakém pořadí vepsal čísla $1, 2, \dots, n^2$. Víta chce tato čísla $1, 2, \dots, n^2$ obarvit několika barvičkami tak, aby libovolná dvě čísla, která jsou v některých **hranou** (nikoliv pouze vrcholem) sousedících trojúhelníčcích, měla různé barvy. Navíc chce, aby libovolná dvě čísla, která se liší právě o 1, měla různé barvy. V závislosti na n určete nejmenší možný počet barev, které Víta potřebuje k tomu, aby měl jistotu, že se mu čísla podaří obarvit (ať je Dino vepsal do trojúhelníčků jakkoliv).

¹Přemístění je proces, na jehož konci aspoň jedno číslo sedí na jiné židličce než na začátku.

6. ÚLOHA (5 BODŮ)
Mějme dána dvě kladná iracionální čísla α, β , přičemž $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$. Všechna přirozená čísla tvaru $\lfloor \alpha n \rfloor$, kde n je přirozené, obarvíme rudě, obdobně všechna čísla tvaru $\lfloor \beta n \rfloor$ obarvíme karmínově. Dokažte, že každé přirozené číslo obarvíme právě jednou barvou.²

7. ÚLOHA (5 BODŮ)
Přirozená čísla bez jedničky jsou obarvena barvami o vlnových délkách 391 nm, 392 nm, \dots , $390 + k$ nm tak, že kdykoliv jsou dvě soudělná čísla obarvena stejnou barvou, je touto barvou obarven i jejich největší společný dělitel. Dokažte, že až na nejvýše $k - 1$ výjimek mají všechna prvočísla stejnou barvu.

8. ÚLOHA (5 BODŮ)
Kéž by byla prvočísla obarvena červeně a žlutě (každé právě jednou barvou) tak, že červených i žlutých prvočísel je nekonečně mnoho. Kéž by také každé složené číslo, které je součinem jen žlutých prvočísel, bylo žluté, obdobně každé číslo složené z červených prvočísel bylo červené. Kdyby tak ještě ostatní čísla byla oranžová³. Dokažte, že by pak pro každé přirozené číslo k bylo možné najít k po sobě jdoucích čísel stejné barvy.

²Symbolem $\lfloor x \rfloor$ rozumíme dolní celou část reálného čísla x , tedy největší celé číslo menší nebo rovné x .

³Každý přece ví, že oranžová vznikne složením červené a žluté.

Řešení 4. série

1. úloha

Eskymák umí obarvit čísla 1, 2, \dots , 18 několika odstíny bílé tak, že z jeho pohledu mají čísla a , b a $a + b$ různý odstín (pro libovolná různá přirozená a , b taková, že $a + b \leq 18$). Určete, kolik nejméně odstínů bílé musí umět eskymák rozlišit.

Nejprve si uvědomíme, že kdykoliv je $x < y \in \{1, 2, \dots, 18\}$ a $y \neq 2x$, potom čísla x a y musí mít různý odstín bílé. Stačí totiž volit $a = y - x$, $b = x$, potom $a + b = y \leq 18$, navíc a a b jsou různá, tedy speciálně $b = x$ a $a + b = y$ musí mít různý odstín, což jsme chtěli vědět.

Dále si uvědomíme, že je-li $3x \leq 18$, potom x a $2x$ mají různou barvu, stačí totiž volit $a = x$, $b = 2x$, potom $a + b = 3x \leq 18$.

Z prvního pozorování tedy plyne, že jediné dvojice čísel, které mohou mít stejný odstín, jsou dvojice $(t, 2t)$, z druhého pozorování plyne, že v takovém případě je $t \geq 7$, zbývají tedy tři možné trojice $(7, 14)$, $(8, 16)$, $(9, 18)$, které mohou mít stejný odstín.

Eskymák tudíž musí umět rozeznat alespoň 15 odstínů bílé (12 odstínů pro čísla 1, 2, \dots , 6, 10, \dots , 13, 15, 17 a 3 odstíny pro dvojice $(7, 14)$, $(8, 16)$, $(9, 18)$).

Na druhou stranu si snadno rozmyslíš, že kdykoliv eskymák čísla obarví tak, že čísla 7 a 14 budou mít stejný odstín, 8 a 16 budou mít stejný odstín a 9 a 18 budou mít stejný odstín (a ostatní odstíny jsou různé), potom jsou všechny podmínky zadání splněny, tudíž eskymákovi stačí umět rozeznávat 15 odstínů.

2. úloha

Koliká způsoby je možno obarvit čísla 1, 2, \dots , n brčálově, smaragdově a limetkově zelenou tak, že sudá čísla nejsou smaragdová a žádná dvě sousední čísla nemají stejnou barvu?

Označme $bl(n)$ počet všech různých obarvení čísel 1, \dots , n takových, že splňují všechny podmínky požadované v zadání, a navíc číslu n přisuzují barvu brčálovou nebo limetkovou (proto ta nelibozvučná zkratka). Podobně označme $s(n)$ počet všech vyhovujících obarvení 1, \dots , n , která obarví číslo n smaragdově.

Nyní spočítáme hodnoty $bl(n)$ a $s(n)$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Je zřejmé, že náš hledaný počet obarvení (ten označme třeba $p(n)$) pak získáme jako součet $bl(n) + s(n)$, n -té číslo totiž vždy musí dostat jednu z daných barev.

Platí, že $bl(1) = 2$ a $s(1) = 1$. Po krátkém a snadném rozboru případů (který ponecháme čtenáři) získáme následující rekurentní vztahy (pro $k \geq 1$):

$$bl(2k) = bl(2k - 1) + 2s(2k - 1),$$

$$s(2k) = 0,$$

$$bl(2k + 1) = bl(2k) + 2s(2k),$$

$$s(2k + 1) = bl(2k).$$

Nyní dosazujeme:

$$bl(2k + 1) = bl(2k) + 2s(2k) = bl(2k),$$

$$bl(2k + 2) = bl(2k + 1) + 2s(2k + 1) = bl(2k) + 2bl(2k) = 3bl(2k).$$

Tedy $bl(2k) = 3^{k-1}bl(2)$ a $bl(2) = bl(1) + 2s(1) = 4$, takže dohromady máme

$$bl(1) = 2,$$

$$bl(2) = 4,$$

$$bl(2k + 1) = bl(2k) = 4 \cdot 3^{k-1}.$$

Dále $s(2k) = 0$ a $s(2k + 1) = bl(2k)$, což nám dává kýžený výsledek:

$$p(1) = 3, p(2k) = 4 \cdot 3^{k-1}, p(2k + 1) = 8 \cdot 3^{k-1} \quad (\text{pro } k \geq 1).$$

Poznámky k došlým řešením: Řešení bylo spousta a stejně tak i odlišných přístupů: skládat za sebe čísla po dvojicích a počítat vzniklá obarvení, hledat různé rekurentní vztahy pro počet řešení s nějakou podmínkou navíc, obarvit nejdříve některá čísla a pak mlátit do sum a hledat, jak dobarvit ostatní . . .

Bodovala jsem docela mírně a štědře; nekompromisní jsem byla pouze u „řešení“ tabulkou. Prosim, takhle ne! Netvrdím, že tabulky jsou špatné – když nevíte, jak na úlozku, většinou je dobrý nápad vyzkoušet si zadání na několika malých případech a máte-li štěstí, vykoukáte z toho i nějaké kandidáty na řešení. Pamatujte ale, že to nestačí!

Vypracování veliké tabulky do řešení je zcela zbytečná námaha, protože stejně ji zvládnete vyrobit pouze konečně velkou a konečně mnoho přirozených čísel nejsou všechna. Takže nakonec nezbyvá než dokázat, že uvedené vztahy platí. Výstražným případem budiž vztah podobný (chybnému) výsledku jednoho z řešitelů:

$$\text{počet obarvení } n \text{ čísel} = 2^{n-1} + 2^{\lceil \frac{n}{2} \rceil}.$$

Tento vztah dává správný výsledek pro $n = 1, 2, \dots, 5$. Teprve pro $n = 6$ je špatně.

3. úloha

Kolem kulatého stolu se sešla čísla $1, 2, \dots, n$. Jednička kamarádí s dvojkou, dvojka s trojkou, $\dots, n-1$ má za kamaráda n a n jedničku. Židličky kolem stolu, kterých je n (stejně jako čísel), jsou obarveny k barvami, každá právě jednou barvou. Každé číslo má rádo jednu z těchto k barev a v této chvíli sedí každé číslo na židličce, jež je obarvena jeho oblíbenou barvou, navíc sedí tak, že kamarádi jsou vedle sebe.

A jaký je váš úkol? V závislosti na počtu čísel n rozhodněte, jaký je nejmenší možný počet barev k tak, abyste po vámi zvoleném obarvení židliček těmito k barvami i usazení čísel měli jistotu, že se čísla nemohou přemístit⁴ tak, aby kamarádi zůstali vedle sebe a každé číslo sedělo na židličce své oblíbené barvy.

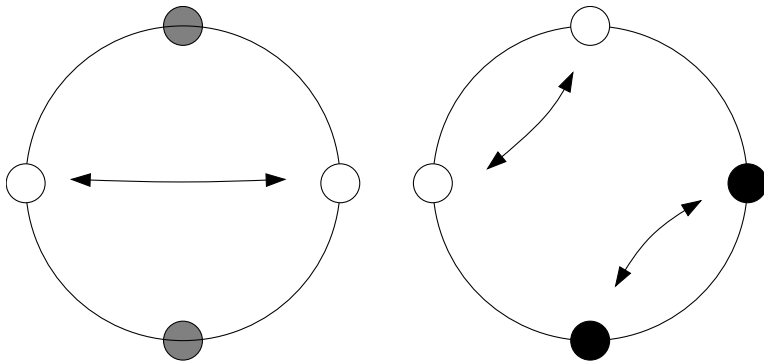
Usazením čísel budeme označovat takové (vzájemně jednoznačné) přiřazení čísel židličkám, že kamarádi sedí vedle sebe a každé číslo sedí na židličce své oblíbené barvy.

Nejprve se vypořádáme s případy $n = 1, 2, 3$. Pokud je $n = 1, 2, 3$, kamarádí každé číslo s každým a také každé číslo sedí vedle každého. Pravidlo, že kamarádi sedí vedle sebe, pak

⁴Přemístění je proces, na jehož konci aspoň jedno číslo sedí na jiné židličce než na začátku.

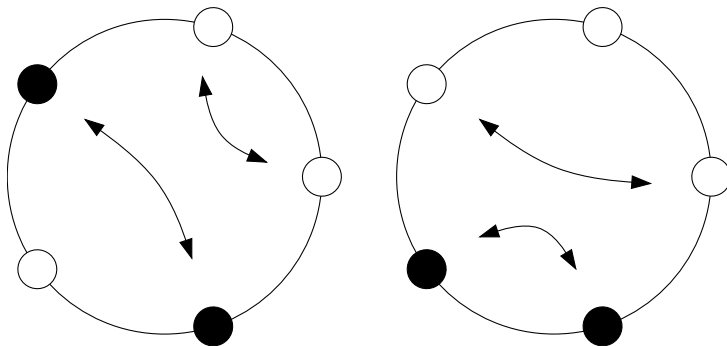
usazení nijak neomezuje. Čísla mohou sedět jakkoli, pokud dodrží oblíbené barvy židlí. Pokud by tedy nějaké dvě židle měly stejnou barvu (a dvě čísla stejnou oblíbenou barvu), nic nebrání tato dvě čísla vyměnit, čímž obdržíme nové usazení. Proto musí každá dvě čísla mít různou oblíbenou barvu a tedy $k \geq n$. Přitom určitě stačí mít stejně barev jako židliček a každou židličku obarvit jinak, takže $k = n$.

Pro $n > 1$ nám zjevně nestačí obarvit všechny židličky jednou barvou, můžeme tedy předpokládat $k \geq 2$. Ukážeme, že pro $n = 4, 5$ stačí teprve tři barvy.



Uvažme nějaké obarvení 4 židliček dvěma barvami – černou a bílou. Pokud dvě čísla, která spolu nesousedí, mají ráda stejnou barvu, můžeme je vyměnit a dostat nové usazení. V opačném případě musí ve dvojicích 2,4 a 1,3 mít jedno číslo rádo černou a druhé bílou. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že jednička a dvojka mají rády černou (Rozmysli si, že pokud tomu tak není, můžeme dvě čísla, která mají ráda černou, přejmenovat na 1 a 2). Potom nám ovšem nic nebrání prohodit jedničku s dvojkou a trojku se čtyřkou, abychom dostali nové usazení (viz obr.).

Na druhou stranu, pokud jednička sedí na fialové, dvojka a trojka na bílých a čtyřka na červené židličce, tak existuje pouze jedno usazení čísel: Jednička a čtyřka totiž mají své židle určené jednoznačně. Dvojka je jediný soused jedničky, který má rád bílou, čímž je i její místo jednoznačně určeno. Trojce pak nezbývá než zůstat na místě.



Pokud je $n = 5$, uvažíme zase nějaké obarvení židliček dvěma barvami, bílou a černou. Nechť

je nejprve nějaká barva použita pouze jednou: Ať je bez újmy na obecnosti jednička jediné číslo sedící na černé židličce. Pak můžeme prohodit dvojku s pětkou a trojku se čtyřkou, abychom dostali nové usazení. Proto musí každá barva být použita aspoň dvakrát, což (protože židliček je pět) znamená, že máme tři židličky bílé a dvě černé. Pokud si teď obě čísla na černých židličkách vymění místa, ostatní čísla se už mohou přemístit tak, aby kamarádi seděli vedle sebe (viz obr.). Proto dvě barvy nestačí.

I pro pět čísel nám ovšem stačí tři barvy: Nechť jednička opět sedí na fialové, dvojka a trojka na bílých a čtyřka s pětkou na červených židličkách. Potom jednička rozhodně musí zůstat sedět na místě. Pětka je jediný soused jedničky, který má rád červenou, čtyřka je jediný soused pětky, který má rád červenou, trojka je jediný soused čtyřky, který má rád bílou, a konečně dvojka je jediný soused trojky, který má rád bílou (kresli si obrázek). Tím jsme postupně jednoznačně určili místa pro všechna čísla.

Ukážeme, že pro $n \geq 6$ nám už stačí dvě barvy (konkrétně úžasně nátěry 0 a 1). Pro stručnost si židličky označíme čísla, která na nich před přemístěním seděla. Na začátku tedy jednička sedí na židli 1, dvojka na židli 2 atd. Nechť $b(x)$ značí oblíbenou barvu čísla x .⁵ Položme:

$$b(1) = 0, b(2) = 1, b(3) = 0, b(4) = 0, b(5) = b(6) = \dots = b(n) = 1$$

Židlička 2 je jediná židle, jejíž obě sousední židle mají barvu 0, a číslo 2 je jediné číslo, vedle něhož musí sedět dvě čísla s oblíbenou barvou 0. Proto číslo 2 musí v každém usazení zůstat na své židličce. Pokud by se číslo 1 přesunulo, muselo by jít na židličku 3 (jednička kamarádí s dvojkou). Pak by ovšem číslo n muselo sedět na židličce 4, která má barvu $0 \neq 1 = b(n)$. Tedy při každém přemísťování zůstávají jednička a dvojka na svých místech.

Potom ovšem trojka také zůstává na svém místě – musí sedět vedle dvojky a židle 1 už je obsazená. Obdobně čtyřka musí zůstat na židli 4, protože židle 2 je obsazená. Takto můžeme postupovat dále, dokud nedojdeme k tomu, že číslo n musí také zůstat na místě. Nikdo se proto nemůže přesunout na jiné místo a jediné korektní usazení je to počáteční. Hotovo.

Je $k = n$ pro $n \leq 3$, $k = 3$ pro $n = 4, 5$ a $k = 2$ pro $n \geq 6$.

⁵A zároveň barvu židličky x

Poznámky k došlým řešením: Většina řešitelů našla správná obarvení židliček, počet bodů se odvíjel hlavně od přesnosti a korektnosti řešení. Mnoho lidí si neuvědomilo, že pro $n = 3, 4, 5$ je třeba ukázat, že dvě barvy nestačí. Mnoho špatných řešení tvrdilo, že pro $n > 2$ je $k = 3$, aniž by se zabývala možností obarvovat dvěma barvami.

4. úloha

Dokažte, že lze obarvit kladná racionální čísla tyrkysovou a azurovou barvou tak, že pro každé kladné racionální číslo q mají q a $q + 1$ různou barvu a q a $\frac{1}{q}$ stejnou barvu.

Racionální čísla budeme zapisovat v základním tvaru, přirozená čísla n navíc budeme psát jako $\frac{n}{1}$. Obarvení najdeme rekurzivně podle součtu čitatele a jmenovatele.

Kladné racionální číslo, které má součet čitatele a jmenovatele menší nebo roven 2, je jediné, a sice $1 = \frac{1}{1}$. Toto číslo obarvíme tyrkysově.

Dále předpokládáme (pro $n > 2$), že už máme obarvena čísla se součtem čitatele a jmenovatele menším než n . Obarvíme čísla se součtem rovným n . Chceme obarvit kladné racionální číslo $q = \frac{p}{r}$, kde $p + r = n$ (p a r jsou nesoudělná, speciálně tedy $p \neq r$). Podle podmínek zadání bude toto číslo obarveno stejnou barvou jako číslo $\frac{r}{p}$, předpokládáme tedy, že $p > r$. Čísla $\frac{p-r}{r}$ a $\frac{p}{r}$ mají mít různou barvu, přitom $\frac{p-r}{r}$ je už obarveno, tudíž obarvíme $\frac{p}{r}$ zbývající barvou a $\frac{r}{p}$ také touto zbývající barvou.

Tímto postupem obarvíme všechna racionální čísla, chceme tedy dokázat, že obarvení splňuje podmínky zadání. Přímou z postupu obarvování plyne, že q a $\frac{1}{q}$ mají stejnou barvu. Chceme tedy ještě vědět, že pro $q > 1$ mají $q - 1$ a q různé barvy. q si napíšeme v základním tvaru jako $\frac{p}{r}$, kde $p > r$, jelikož $q > 1$. Potom si stačí uvědomit, že $q - 1 = \frac{p-r}{r}$ a $q = \frac{p}{r}$ mají různé barvy, což opět plyne přímo z postupu obarvování ($\frac{p-r}{r}$ jsme obarvili dříve než $\frac{p}{r}$, tudíž jsme pak $\frac{p}{r}$ obarvili jinak).

Poznámky k došlým řešením: Pouze menší část řešitelů se s úlohou vypořádala bez obtíží. Problém většiny špatných řešení tkvěl ve špatném použití důkazu sporem. Protože bych ke všem těmto řešením psal totéž, rozhodl jsem se vysvětlit vše podrobněji na tomto místě.

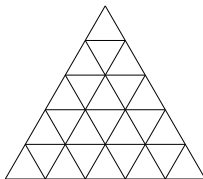
Chybná úvaha zněla následovně. Pro spor předpokládáme, že racionální čísla zadaným způsobem obarvit nelze, tedy alespoň jedno číslo $q \in \mathbb{Q}$ nepůjde obarvit bezrozporně. Což je ekvivalentní s tím (ve skutečnosti není), že pro nějaké celé k platí $\frac{1}{q} = q + (2k + 1)$ (nebo jste psali $\frac{1}{q} = q + 1$, což je však pouze speciální případ výše uvedené rovnice pro $k = 0$). Protože pro každé k vyjde q iracionální, nastal spor, a proto čísla musí jít obarvit. Tato úvaha je však chybná, protože čísla neobarvujeme na sobě nezávisle. To znamená, že barvou čísla q máme určeny nejen barvy čísel $\frac{1}{q}$ a $q + 1$, ale např. i čísel $\frac{1}{q} + 5$, $\frac{1}{\frac{1}{q} + 5}$, $\frac{1}{\frac{1}{q} + 5} + 13$, ... a spor by nastal, kdyby kterýkoliv z těchto výrazů byl roven q a způsoboval jeho přebarvení na opačnou barvu. Protože takovýchto výrazů je pro každé q nekonečně mnoho, nepůjde úloha sporem jednoduše vyřešit.

Uvedu ještě protipříklad. Úloha by zněla: Rozhodněte, zda lze obarvit kladná racionální čísla dvěma barvami tak, aby pro každé $q \in \mathbb{Q}$ mělo $\frac{1}{q}$ stejnou barvu jako q a $q + \frac{1}{3}$ mělo barvu opačnou. Jednoduše zjistíme, že to nejde: Bez újmy na obecnosti má 1 barvu A, 2 má tedy barvu B, $\frac{1}{2}$ má tedy barvu B, $\frac{3}{2}$ má barvu A, $\frac{2}{3}$ má barvu A, 1 má barvu B, spor. Přitom rovnice $\frac{1}{q} = q + \frac{1}{3}(2k + 1)$, $k \in \mathbb{Z}$, nemá pro žádné k racionální řešení, tedy podle výše uvedené chybné úvahy by čísla obarvit mělo jít. Naznačíme důkaz toho, že q vyjde iracionální: Předpokládáme, že $k \geq 0$, jinak převedeme $\frac{1}{3}(2k + 1)$ na opačnou stranu a úlohu řešíme pro $q' := \frac{1}{q}$. Úpravami

dostaneme kvadratickou rovnici a spočteme diskriminant. Vyjde nám, že $q \in \mathbb{Q}$, právě když $\sqrt{D} = \sqrt{4 \cdot k \cdot (k+1) + 37} \in \mathbb{Q}$, tedy $\sqrt{D} \in \mathbb{N}$ (důkaz vynechám). A protože pro dost velké k platí $2k+1 < \sqrt{D} < 2k+2$, stačí nám spočítat odmocninu jen pro prvních několik k . Pro všechna dostaneme $\sqrt{D} \notin \mathbb{N}$, a tedy q je iracionální.

Všem, kteří neuspěli, doporučuji prostudovat vzorové řešení (je v minulých komentářích).

5. úloha

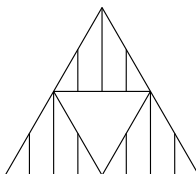
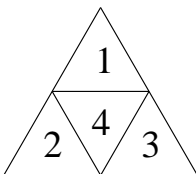


Trojúhelník T je rozdělen přímkami rovnoběžnými se stranami trojúhelníku na n^2 shodných trojúhelníčků tak, jak je naznačeno na obrázku. Dino do menších trojúhelníčků v nějakém pořadí vepsal čísla $1, 2, \dots, n^2$. Víťa chce tato čísla $1, 2, \dots, n^2$ obarvit několika barvičkami tak, aby libovolná dvě čísla, která jsou v některých **hranou** (nikoliv pouze vrcholem) sousedících trojúhelníčcích, měla různé barvy. Navíc chce, aby libovolná dvě čísla, která se liší právě o 1, měla různé barvy. V závislosti na n určete nejmenší možný počet barev, které Víťa potřebuje k tomu, aby měl jistotu, že se mu čísla podaří obarvit (ať je Dino vepsal do trojúhelníčků jakkoliv).

Označme si $p(n)$ počet barev, které Víťa potřebuje pro dané n .

Zřejmě $p(1) = 1$. Dokážeme, že $p(2) = 3$ a $p(n) = 4$ pro $n \geq 3$.

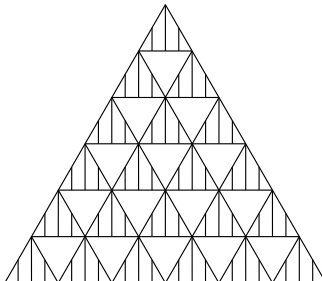
Nejprve tedy řešíme situaci, kdy $n = 2$. Zvolí-li si Dino očíslování jako na následujícím obrázku vlevo, snadno si rozmyslíš, že Víťovi dvě barvy nemůžou stačit. Naopak dokážeme, že 3 barvy Víťovi stačí. Trojúhelník je rozdělen na tři vnější trojúhelníčky (šrafované) a jeden vnitřní. Podívej se na následující obrázek vpravo. Stačí si uvědomit, že mezi šrafovanými trojúhelníčky vždy existují dva takové, jejichž čísla se liší alespoň o 2. Takové dva šrafované trojúhelníčky Víťa obarví stejnou barvou a zbývající 2 trojúhelníčky pomocí 2 barev, použije tak 3 barvy. Snadno si rozmyslíš, že takto splnil podmínky zadání.



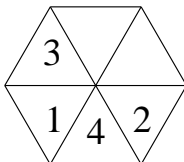
Ve zbývající části řešení budeme dokazovat, že $p(n) = 4$ pro $n \geq 3$.

Nejprve dokážeme, že $p(n) \leq 4$, tedy že 4 barvy Víťovi stačí. Rozdělme trojúhelníčky na šrafované a nešrafované tak, jak je naznačeno na následujícím obrázku. Všimni si, že žádné dva šrafované trojúhelníčky spolu nesousedí, podobně žádné dva nešrafované. Předpokládejme, že Dino už trojúhelníčky nějak očísloval. Víťovi k obarvení čísel budou stačit 4 barvy SA, LA, SN, LN , kde první písmenko značí, zda je dané číslo sudé či liché, druhé písmenko značí, zda

trojúhelníček, v němž dané číslo leží, je či není šrafovaný. Tímto způsobem tedy Víťa splní podmínky zadání (dorozmysli si detaily).



Nyní dokážeme, že $p(n) \geq 4$, tedy že Víťa potřebuje 4 barvy. Je-li $n \geq 3$, je možno mezi trojúhelníčky najít šestiúhelník nakreslený na následujícím obrázku. Očísluje-li Dino šestiúhelník tak, jak je na obrázku nakresleno, nebudou Víťovi stačit 3 barvy, totiž čísla 1, 2, 3, 4 musejí mít navzájem různé barvy (dvojice 13, 24 a 14 jsou sousední).



Poznámky k došlým řešením: V zadání stálo „Najděte nejmenší počet barev ...“. Tudíž bylo potřeba dokázat, že pro čtyři barvy již takové obarvení sestrojím, což většina řešitelů našla, a zároveň najít protipříklad, že pro tři barvy to nejde. Pokud chyběl důkaz, že to třemi barvami nejde, strhával jsem bod.

6. úloha

Mějme dána dvě kladná iracionální čísla α, β , přičemž $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$. Všechna přirozená čísla tvaru $\lfloor n\alpha \rfloor$, kde n je přirozené, obarvíme rudě, obdobně všechna čísla tvaru $\lfloor \beta n \rfloor$ obarvíme karmínově. Dokažte, že každé přirozené číslo obarvíme právě jednou barvou.⁶

Máme dokázat, že každé přirozené číslo obarvíme právě jednou. K tomu zjevně stačí dokázat, že každé číslo obarvíme aspoň jednou a žádné číslo neobarvíme vícekrát než jednou.

Napřed si ale ještě uvědomme, že $\alpha, \beta > 1$, a tedy pro každé přirozené n je $\lfloor n\alpha \rfloor > \lfloor (n-1)\alpha \rfloor$ a $\lfloor n\beta \rfloor > \lfloor (n-1)\beta \rfloor$.

Nejprve pro spor předpokládejme, že nějaké přirozené číslo k není obarvené ani jednou barvou. Potom existuje přirozené číslo n takové, že $\lfloor (n-1)\alpha \rfloor < k < \lfloor n\alpha \rfloor$, tedy $1 + \lfloor (n-1)\alpha \rfloor \leq k \leq \lfloor n\alpha \rfloor - 1$. Protože je α iracionální, $n\alpha$ není přirozené, takže (s ohledem na definici celé části) platí $(n-1)\alpha < k < n\alpha - 1$, odkud po vydělení číslem α dostaneme $n-1 < \frac{k}{\alpha} < n - \frac{1}{\alpha}$. Analogicky najdeme m přirozené takové, že $\lfloor (m-1)\beta \rfloor < k < \lfloor m\beta \rfloor$, což upravíme na $m-1 < \frac{k}{\beta} < m + \frac{1}{\beta}$. Sečtením těchto nerovností dostaneme vztah $n+m-2 < k(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}) < n+m - (\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta})$, neboli $n+m-2 < k < n+m-1$. Ale $n+m-2$ a $n+m-1$ jsou dvě po sobě jdoucí přirozená čísla, takže není možné, aby mezi nimi bylo další přirozené číslo k , dostali jsme spor.

Nyní pro spor předpokládejme, že jsme přirozené číslo k obarvili aspoň dvakrát. Potom zřejmě existují přirozená čísla n a m taková, že $\lfloor n\alpha \rfloor = k = \lfloor m\beta \rfloor$. Protože jsou čísla α a β iracionální, čísla $n\alpha$ a $m\beta$ nejsou přirozená, takže platí $n\alpha - 1 < k < n\alpha$ a $m\beta - 1 < k < m\beta$. Vydělením těchto nerovností po řadě čísly α a β dostaneme $n - \frac{1}{\alpha} < \frac{k}{\alpha} < n$ a $m - \frac{1}{\beta} < \frac{k}{\beta} < m$. Sečtením těchto nerovností zjistíme, že musí platit $n+m - (\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}) < k(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}) < n+m$, čili $n+m-1 < k < n+m$. Ale $n+m-1$ a $n+m$ jsou dvě po sobě jdoucí přirozená čísla, takže není možné, aby mezi nimi bylo další přirozené číslo k . A to je kýžený spor.

7. úloha

Přirozená čísla bez jedničky jsou obarvena barvami o vlnových délkách 391 nm, 392 nm, ..., 390 + k nm tak, že kdykoliv jsou dvě soudělná čísla obarvena stejnou barvou, je touto barvou obarven i jejich největší společný dělitel. Dokažte, že až na nejvýše $k-1$ výjimek mají všechna prvočísla stejnou barvu.

Důkaz bude probíhat ve dvou krocích. Nejprve dokážeme, že až na konečně mnoho výjimek mají všechna prvočísla stejnou barvu. Ve druhém kroku odvodíme, že výjimek může být nejvýše $k-1$.

Jelikož je prvočísel nekonečně mnoho, existují dvě prvočísla, která jsou obarvena barvou o stejné vlnové délce (barev je jen k). Těto barvě řekněme například zelená a prvočísla si označme p_1 a p_2 . Dokážeme, že je nejvýše konečně mnoho prvočísel, která nejsou zelená. Nechť q_1, q_2, q_3, \dots jsou zbývající prvočísla. Potom mezi čísly $p_1 \cdot q_1, p_1 \cdot q_2, \dots$ je nejvýše $k-1$ čísel obarveno

⁶Symbolem $\lfloor x \rfloor$ rozumíme dolní celou část reálného čísla x , tedy největší celé číslo menší nebo rovné x .

jinak než zeleně. Totiž kdyby $p_1 \cdot q_i$ a $p_1 \cdot q_j$ ($i \neq j$) měly stejnou barvu (řekněme modrou) různou od zelené, pak je i jejich největší společný dělitel p_1 modrý, to je ale spor s předpokladem, že p_1 je obarveno zeleně. A barev různých od zelené je pouze $k - 1$. Podobně mezi čísly $p_2 \cdot q_1, p_2 \cdot q_2, \dots$ je nejvýše $k - 1$ čísel obarveno zeleně. Označíme-li Q množinu prvočísel q_i takových, že buď $p_1 \cdot q_i$ není zelené nebo $p_2 \cdot q_i$ není zelené, dostáváme tak, že Q má nejvýše $2k - 2$ prvků. Pokud q_j neleží ve Q , potom jsou $p_1 \cdot q_j$ i $p_2 \cdot q_j$ zelená, tudíž jejich největší společný dělitel q_j je také zelený. Dohromady tedy až na nejvýše $2k - 2$ výjimek z množiny Q jsou všechna prvočísla zelená. Tím je první krok důkazu hotov.

Abychom dokázali, že výjimek je nejvýše $k - 1$, stačí dokázat, že kdykoliv jsou q_l a q_k obarveny jinak než zeleně, potom mají různou barvu (barev různých od zelené je nejvýše $k - 1$). Pro spor předpokládejme, že existují q_k a q_l ($k \neq l$) taková, že q_k a q_l mají stejnou barvu (například červenou). Potom stejným způsobem jako v předchozí části důkazu dostaneme, že až na nejvýše $2k - 2$ výjimek jsou všechna prvočísla červená. To je ale spor s tím, že až na nejvýše $2k - 2$ výjimek jsou všechna zelená.

8. úloha

Kéž by byla prvočísla obarvena červeně a žlutě (každé právě jednou barvou) tak, že červených i žlutých prvočísel je nekonečně mnoho. Kéž by také každé složené číslo, které je součinem jen žlutých prvočísel, bylo žluté, obdobně každé číslo složené z červených prvočísel bylo červené. Kdyby tak ještě ostatní čísla byla oranžová⁷. Dokažte, že by pak pro každé přirozené číslo k bylo možné najít k po sobě jdoucích čísel stejné barvy.

Pro libovolné přirozené k najdeme k po sobě jdoucích oranžových čísel. Jelikož je i červená i žlutá použita na nekonečně mnoha prvočíslech, existují tedy červená prvočísla c_1, c_2, \dots, c_k a žlutá prvočísla z_1, z_2, \dots, z_k , všechna větší než k .

Nyní budeme používat Čínskou zbytkovou větu, která říká, že kdykoliv jsou n_1, n_2, \dots, n_l po dvou nesoudělná přirozená čísla a r_1, r_2, \dots, r_l celá čísla splňující $0 \leq r_i \leq n_i - 1$, potom mezi čísly $0, 1, \dots, n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_l - 1$ existuje právě jedno číslo n takové, že pro každé $i \in \{1, 2, \dots, l\}$ dává n zbytek r_i při dělení n_i .

Zjednodušeně lze říci, že kdykoliv máme nějaká nesoudělná čísla, potom si je možno předepsat zbytky při dělení těmito čísly a najít n takové, že dává přesně předepsané zbytky.

Čínskou zbytkovou větu v našem řešení použijeme pro čísla $n_i = c_i \cdot z_i$ a $r_i = n_i - i$ pro $i \in \{1, \dots, k\}$. Zřejmě n_i jsou po dvou nesoudělná a $0 \leq r_i < n_i$. Najdeme tedy vhodné n , které při dělení číslem n_i dává zbytek $n_i - i$. Odtud je číslo $n + i$ pro $i \in \{1, \dots, k\}$ dělitelné číslem $n_i = c_i \cdot z_i$, tedy dělitelné červeným i žlutým prvočíslem. odtud plyne, že je $n + i$ oranžové. Čísla $n + 1, n + 2, \dots, n + k$ tedy tvoří k po sobě jdoucích oranžových čísel.

⁷Každý přece ví, že oranžová vznikne složením červené a žluté.