# Povídání k 7. sérii

Tématem 7. série jsou funkce. Co přesně je taková funkce? Ve vší obecnosti to není ani vzoreček poskládaný ze sinů, kosinů a mocnin $x$, ani algoritmus pro výrobu $f(x)$. Funkce $f(x)$ je množina dvojic $(x,\ f(x))$ taková, že každému $x$ z nějaké množiny $D_f$ (definičního oboru) odpovídá právě jedno $y = f(x)$. Je to tedy vlastně taková obrovská tabulka. Obvykle bývají funkce definovány jako zobrazení z nějaké množiny $D_f$ do reálných (nebo komplexních) čísel. V našich úlohách se budeš potýkat především s funkcemi zobrazujícím část $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$.

Tímto chápáním funkce tě v žádném případě nechceme odradit od zapisování funkcí ve tvaru jako $f(x) = x^2 + a + \sin x$.[1] To je v pořádku a každý ti uvěří, že třeba sinus je periodický. Na co je třeba si dát pozor, je intuitivní chápaní funkce jako „čáry na papíře“ a z toho plynoucí omyly jako například „Pokud funkce roste, musí pro velká $x$ růst nade všechny meze.“ (zkus to použít třeba na funkci $f(x) = 1 - \frac{1}{x}$).

Funkce je tedy možno definovat i velmi divoce a z matematické analýzy jsou známy příklady funkcí, které se chovají všelijak „divně“. Za všechny uvedeme aspoň Dirichletovu funkci $D(x)$, která je rovna jedné pro $x$ racionální a nule pro $x$ iracionální. Když si zkusíte nakreslit graf této funkce, zjistíte, že vidíte dvě čáry nad sebou. Obě čáry sice obsahují nekonečně mnoho „děr“, ty jsou ale rozložené tak, že mezi každými $x_1 > x_2$ najdete nekonečně mnoho racionálních i iracionálních čísel.

Ještě malou poznámku k názvosloví. O funkci $f(x)$ říkáme, že je:

- *sudá*, pokud pro všechna $x$ platí $f(-x) = f(x)$.
- *lichá*, pokud pro všechna $x$ platí $f(-x) = -f(x)$.
- *periodická*, pokud existuje $p \in \mathbb{R}$ takové, že $f(x + kp) = f(x)$ pro všechna celá $k$ a všechna $x$.
- *rostoucí*, pokud pro každá $x_1, x_2 \in D_f, x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.
- *klesající*, pokud pro každá $x_1, x_2 \in D_f, x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.
- *neklesající*, pokud pro každá $x_1, x_2 \in D_f, x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$.
- *nerostoucí*, pokud pro každá $x_1, x_2 \in D_f, x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$.

Všimni si, že pokud funkce není rostoucí, vůbec to nemusí znamenat, že je nerostoucí (Co by pak byl takový kosinus?).

[1] Zapisovat všechny prvky nekonečné tabulky by ti asi dalo trochu práci, nemluvě o problémech s poštou.

# 7. série

**Téma:** Funkce

**Termín odeslání:** 9. května 2005

1. úloha (3 body)

Nechť je dána funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ taková, že $f(1) = 2005$ a pro libovolné přirozené $m$ platí $f(1) + f(2) + \cdots + f(m-1) = mf(m)$. Určete hodnotu $f(2005)$.

2. úloha (3 body)

O funkci $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ povíme, že je periodická, právě když existuje kladné reálné $p$ takové, že pro libovolné reálné $x$ platí $f(x+p) = f(x)$. Rozhodněte, zda je sčítáním, odčítáním, násobením a skládáním funkcí[2] $\sin x$ a $\cos x$ možné získat funkci, která není periodická (skládáním funkcí rozumíme operaci, kdy dvěma funkcím $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ přiřadíme funkci $h = f(g)$ definovanou jako $h(x) = f(g(x))$). Pomocí zmiňovaných operací lze tedy získat například funkce $\cos^2 x - \sin^2 x$, $\cos(\sin x + \sin(\sin x))$.

3. úloha (3 body)

Dokažte, že libovolnou funkci $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lze napsat jako součet sudé a liché funkce. Sudou funkcí myslíme funkci takovou, že $f(x) = f(-x)$ pro libovolné reálné $x$. Lichou funkcí myslíme funkci takovou, že $f(x) = -f(-x)$ pro libovolné reálné $x$.

4. úloha (5 bodů)

Přirozené číslo $n > 6$ zapišme ve tvaru $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$, kde $p_1, p_2, \ldots, p_k$ jsou navzájem různá prvočísla. Definujme potom $f(n) = \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \cdots + \alpha_k p_k + 1$. Dokažte, že pro libovolné přirozené $m$ je posloupnost $m, f(m), f(f(m)), f(f(f(m))), \ldots$ od nějakého členu periodická a v periodě se střídají čísla 7 a 8.

5. úloha (5 bodů)

Mějme dánu konstantu $c \in \langle 0,5; 1)$. Pro funkce $f, g : \langle 0; 1\rangle \to \mathbb{R}$ řekneme, že $f$ je lepší než $g$, právě když existuje konečně mnoho po dvou disjunktních intervalů[3] $I_1, I_2, \ldots, I_k$ takových, že součet velikostí těchto intervalů je alespoň $c$ a na každém z intervalů $I_j$ je $f$ větší než $g$ pro $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Rozhodněte, zda existují tři funkce $f, g, h : \langle 0; 1\rangle \to \mathbb{R}$ takové, že $f$ je lepší než $g$, $g$ je lepší než $h$ a $h$ je lepší než $f$, pokud

(a) $c = \frac{1336}{2005}$,

(b) $c = \frac{1337}{2005}$.

6. úloha (5 bodů)

Dokažte, že pro každé přirozené $n$ existuje funkce $f : \langle 0; \infty) \to \mathbb{R}$ taková, že

$$\underbrace{f(f(\ldots(f}_{\text{n-krát}}(x))\ldots)) = \frac{x}{x+1}.$$

[2] Myslíme samozřejmě konečná sčítání, odčítání, násobení a skládání.

[3] Tedy $I_i \cap I_j = \emptyset$ pro všechna $i \neq j$.

7. ÚLOHA (5 BODŮ)

(a) Rozhodněte, zda pro libovolnou funkci $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ existují funkce $f_1, f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takové, že $f_1$ je neklesající, $f_2$ je nerostoucí a platí, že $f = f_1 + f_2$.

(b) Rozhodněte, zda pro libovolnou funkci $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ existují funkce $g_1, g_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ takové, že $g_1$ je neklesající, $g_2$ je nerostoucí a platí, že $g = g_1 + g_2$.

8. ÚLOHA (5 BODŮ)

Nechť $\mathcal{F}$ je množina obsahující 60 různých funkcí $f : \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \to \{0, 1\}$. O dvou funkcích $f$ a $g$ povíme, že se mají rády, právě když existují alespoň tři $n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ taková, že $f(n) = g(n)$. Dokažte, že funkce z množiny $\mathcal{F}$ je možné seřadit do posloupnosti $f_1$, $f_2$, ... , $f_{60}$ tak, že $f_i$ má ráda $f_{i+1}$ pro $i \in \{1, 2, \ldots, 59\}$ a $f_{60}$ má ráda $f_1$.

# Řešení 7. série

**1. úloha** (42, 39, 2,79, 3,0)

Nechť je dána funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ taková, že $f(1) = 2005$ a pro libovolné přirozené $m$ platí $f(1) + f(2) + \cdots + f(m-1) = mf(m)$. Určete hodnotu $f(2005)$.

Skúsme si vypočítať zopár prvých členov. Vieme, že $f(1) = 2005$ a z nášho rekurentného vzťahu (pre $m = 2$) dostávame $f(1) = 2f(2)$ a teda $f(2) = \frac{f(1)}{2}$. Pre $m = 3$ dostávame $f(1) + f(2) = 3f(3)$ a po dosadení za $f(2)$ máme $f(3) = \frac{f(1)+\frac{f(1)}{2}}{3} = \frac{f(1)}{2}$. Keby sme takto pokračovali ďalej postupne by sme dostávali, že všetky ďalšie funkčné hodnoty sú $\frac{f(1)}{2}$. Skúsme teda dokázať indukciou, že pre $\forall m \geq 2$ platí $f(m) = \frac{f(1)}{2}$.

Pre $m = 2$ sme to už spočítali.

Pre $m \geq 3$ z nášho rekurentného vzťahu dostávame: $mf(m) = f(1)+f(2)+\cdots+f(m-1)$ a po malej úprave máme $f(m) = \frac{f(1)+f(2)+\cdots+f(m-1)}{m}$. Za $f(2)$, $f(3)$,..., $f(m-1)$ si z indukčného predpokladu vieme dosadiť $\frac{f(1)}{2}$ a teda dostávame $f(m) = \frac{f(1)+(m-2)\frac{f(1)}{2}}{m} = \frac{f(1)}{2}$ čo sme potrebovali dokázať.

No a teraz už vieme ľahko spočítať hľadanú hodnotu $f(2005) = \frac{f(1)}{2} = \frac{2005}{2}$.

**2. úloha** (28, 24, 2,46, 3,0)

O funkci $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ povíme, že je periodická, právě když existuje kladné reálné $p$ takové, že pro libovolné reálné $x$ platí $f(x + p) = f(x)$. Rozhodněte, zda je sčítáním, odčítáním, násobením a skládáním funkcí[4] $\sin x$ a $\cos x$ možné získat funkci, která není periodická (skládáním funkcí rozumíme operaci, kdy dvěma funkcím $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ přiřadíme funkci $h = f(g)$ definovanou jako $h(x) = f(g(x))$). Pomocí zmiňovaných operací lze tedy získat například funkce $\cos^2 x - \sin^2 x$, $\cos(\sin x + \sin(\sin x))$.

Dokážeme, že vždy musíme dostat $2\pi$-periodickou funkci. Funkce, které máme dány na začátku, jsou $2\pi$-periodické.

Postupně ověříme, že součet, rozdíl, součin a složení dvou $2\pi$-periodických funkcí je opět $2\pi$-periodická funkce. Odtud postupným prováděním zmiňovaných operací musíme jako výsledek dostat $2\pi$-periodickou funkci (všechny mezikroky jsou $2\pi$-periodické funkce).

Sečteme-li dvě $2\pi$-periodické funkce $f$ a $g$, dostaneme funkci $h = f + g$, která splňuje $h(x + 2\pi) = f(x + 2\pi) + g(x + 2\pi) = f(x) + g(x) = h(x)$, tedy $h$ je $2\pi$-periodická. Ještě ověříme složení funkcí (rozdíl a součin si jistě snadno doplníš). Nechť $k(x) = f(g(x))$. Potom $k(x+2\pi) = f(g(x + 2\pi)) = f(g(x)) = k(x)$, odtud $k$ je $2\pi$-periodická.

Rozmysli si, že je důležité, že zadané funkce měly na začátku stejnou periodu. Kdyby tomu tak nebylo, nemusí zmiňovaný postup fungovat.

**3. úloha** (30, 13, 1,60, 1,0)

[4] Myslíme samozřejmě konečná sčítání, odčítání, násobení a skládání.

Dokažte, že libovolnou funkci $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ lze napsat jako součet sudé a liché funkce. Sudou funkcí myslíme funkci takovou, že $f(x)=f(-x)$ pro libovolné reálné $x$. Lichou funkcí myslíme funkci takovou, že $f(x)=-f(-x)$ pro libovolné reálné $x$.

Řešení úlohy stačí uhodnout. Zvolme $s(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}$, potom

$$s(-x)=\frac{f(-x)+f(x)}{2}=\frac{f(x)+f(-x)}{2}=s(x),$$

tedy $s(x)$ je sudá funkce. Dále zvolme $l(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2}$, potom

$$l(-x)=\frac{f(-x)-f(x)}{2}=-\frac{f(x)-f(-x)}{2}=-l(x).$$

Tedy $l(x)$ je lichá funkce. Nakonec si stačí uvědomit, že $f(x)=s(x)+l(x)$.

**4. úloha** (26, 26, 4,46, 4,5)

Přirozené číslo $n>6$ zapišme ve tvaru $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$, kde $p_1$, $p_2$, … , $p_k$ jsou navzájem různá prvočísla. Definujme potom $f(n)=\alpha_1p_1+\alpha_2p_2+\cdots+\alpha_kp_k+1$. Dokažte, že pro libovolné přirozené $m$ je posloupnost $m$, $f(m)$, $f(f(m))$, $f(f(f(m)))$, … od nějakého členu periodická a v periodě se střídají čísla 7 a 8.

Povšimni si, prosím, postupně několika jednoduchých skutečností, jež nepochybně zvládneš bez problémů dokázat sám:

1. Pro každé $n\ge 7$ platí $f(n)\ge 7$.
2. Posloupnost $f(\dots f(f(n))\dots)$ je tedy dobře definovaná a nabývá pouze hodnot větších nebo rovných 7.
3. Pokud je $n\ge 9$ složené, platí $f(n)\le n-2$.
4. Je-li $n\ge 7$ prvočíslo, platí $f(n)=n+1$, takže $f(n)$ není prvočíslo. To znamená, že $f(f(n))=f(n+1)\le n-1$.
5. Pro každé $n\ge 9$ platí $f(f(n))<n$.
6. V uvažované posloupnosti $m$, $f(m)$, $f(f(m))$, … se tedy dříve či později vyskytne číslo 7 nebo 8.

Protože $f(7)=8$ a $f(8)=7$, je od chvíle prvního výskytu 7 nebo 8 posloupnost periodická a v periodě se střídají tato dvě čísla.

Tím je tvrzení dokázané.

**5. úloha** (23, 23, 3,96, 4,0)

Mějme dánu konstantu $c\in\langle 0,5;1)$. Pro funkce $f,g:\langle 0;1\rangle\to\mathbb{R}$ řekneme, že $f$ je lepší než $g$, právě když existuje konečně mnoho po dvou disjunktních intervalů[5] $I_1$, $I_2$, … , $I_k$ takových, že součet velikostí těchto intervalů je alespoň $c$ a na každém z intervalů $I_j$ je $f$ větší než $g$ pro $j\in\{1,2,\dots,k\}$. Rozhodněte, zda existují tři funkce $f,g,h:\langle 0;1\rangle\to\mathbb{R}$ takové, že $f$ je lepší než $g$, $g$ je lepší než $h$ a $h$ je lepší než $f$, pokud

(a) $c=\frac{1336}{2005}$,

(b) $c=\frac{1337}{2005}$.

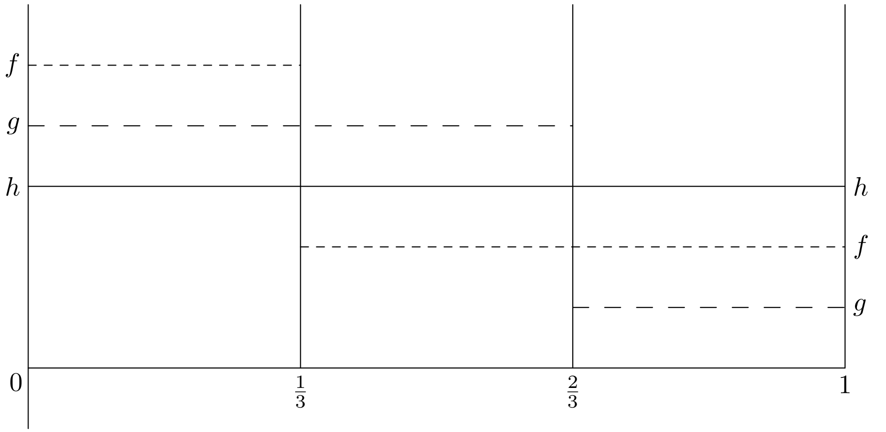
[5] Tedy $I_i\cap I_j=\emptyset$ pro všechna $i\ne j$.

(a) V této části využijeme toho, že $c \leq \frac{2}{3}$, abychom ukázali, že takové funkce $f$, $g$ a $h$ existují. Stačí například volit:

$$f(x) = \begin{cases} 5, & 0 \leq x \leq \frac{1}{3} \\ 2, & \frac{1}{3} < x \leq 1 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 4, & 0 \leq x \leq \frac{2}{3} \\ 1, & \frac{2}{3} < x \leq 1 \end{cases}$$

a $h(x) \equiv 3$.




Potom $f > g$ na intervalech $\langle 0; \frac{1}{3}\rangle$ a $(\frac{2}{3}; 1\rangle$. Dále $g > h$ na intervalu $\langle 0; \frac{2}{3}\rangle$. A nakonec $h > f$ na intervalu $(\frac{1}{3}; 1\rangle$.

Součet délek intervalů je vždy $\frac{2}{3} > \frac{1336}{2005}$. Odtud dostáváme, že $f$ je lepší než $g$, $g$ je lepší než $h$ a $h$ je lepší než $f$.

(b) V této části ukážeme, že odpověď je negativní (kvůli $c > \frac{2}{3}$).

Pro spor předpokládejme, že pro konstantu $c = \frac{1337}{2005}$ existují funkce $f$, $g$ a $h$ takové, že $f$ je lepší než $g$, $g$ je lepší než $h$ a $h$ je lepší než $f$.

Nechť $I_1, I_2, \ldots, I_k$ jsou intervaly dosvědčující, že $f$ je lepší než $g$. Odstraníme-li tyto intervaly z intervalu $\langle 0; 1\rangle$, zbude nám několik intervalů (bod považujme za interval délky 0), na kterých může být $f \leq g$ (všude jinde je $f > g$). Celková délka těchto intervalů je menší nebo rovna $1 - \frac{1337}{2005} = \frac{668}{2005}$ (pořádně si rozmysli).

Podobně dostaneme několik intervalů, na kterých může být $g \leq h$, o celkové délce nejvýše $\frac{668}{2005}$.

Má-li pro dané $x$ nastat $h(x) > f(x)$, potom nutně $f(x) \leq g(x)$ nebo $g(x) \leq h(x)$ (v opačném případě je $f(x) > g(x) > h(x)$). Tedy $h(x) > f(x)$ může nastat na intervalech o souhrnné délce nejvýše $\frac{668}{2005} + \frac{668}{2005} = \frac{1336}{2005} < \frac{1337}{2005}$. Dostáváme tak spor s předpokladem, že $h$ je lepší než $f$.

Poznámky k došlým řešením: Časť (a) som hodnotila dvoma bodmi, časť (b) tromi. Viacerí riešitelia odvodili, že podmienka $c \leq \frac{2}{3}$ je nutná, aby funkcie $f, g, h$ existovali a vyhlasili, že je aj postačujúca, no to už neukázali, čím sa pripravili o (ľahšiu) časť (a).

Ďalším problémom (za ktorý som ale body nesthrávala, pretože to nie je príliš stredoškolská záležitosť) bolo, ak riešiteľ priamo meral veľkosť množiny, kde napr. platí $f > g > h$. Táto množina totiž pri obecných funkciách ani náhodou nemusí byť „slušná“ a je ťažké povedať, čo je jej veľkosť.

**6. úloha** **(15, 12, 3, 87, 5, 0)**

Dokažte, že pro každé přirozené $n$ existuje funkce $f : \langle 0; \infty) \to \mathbb{R}$ taková, že

$$\underbrace{f(f(\ldots(f}_{\text{n-krát}}(x))\ldots)) = \frac{x}{x+1}.$$

Skúsme na začiatok trošku experimentovať s funkciou $g(x) = \frac{x}{x+1}$. Čomu sa napríklad rovná $g(g(x))$? No ľahko si vieme spočítať, že $g(g(x)) = \frac{\frac{x}{x+1}}{\frac{x}{x+1}+1} = \frac{\frac{x}{x+1}}{\frac{2x+1}{x+1}} = \frac{x}{2x+1}$. Analogicky by sme si mohli spočítať, že $g(g(g(x))) = \frac{x}{3x+1}$.

Indukciou by sme teraz vedeli ľahko dokázať, že $\underbrace{g(g(\ldots(g}_{k-krát}(x))\ldots)) = \frac{x}{kx+1}$. Takže vidíme, že funkcia $g(x)$ sa pri iterácii správa „relatívne“ rozumne. Skúsme teda vymyslieť funkciu $f(x)$ tak aby $\underbrace{f(f(\ldots(f}_{n-krát}(x))\ldots)) = \frac{x}{x+1}$ a aby bola táto funkcia „aspoň trochu podobná“ funkcii $g(x)$. Po chvílke skúšania by nás mohlo napadnúť položiť $f(x) = \frac{x}{\frac{x}{n}+1}$. No a dokážme si teraz indukciou, že $\underbrace{f(f(\ldots(f}_{k-krát}(x))\ldots)) = \frac{x}{\frac{k}{n}x+1}$, pre $n, k \in \mathbb{N}$ a $k \leq n$.

Pre $k = 1$ to zrejme platí. Nech to teda platí pre nejaké $k \geq 1$ a my dokážeme, že to potom musí platiť aj pre $k+1$. Postupnými úpravami dostávame:

$$\underbrace{f(f(\ldots(f}_{k+1}(x))\ldots)) = f(\underbrace{f(f(\ldots(f}_{k}(x))\ldots))) = f(\frac{x}{\frac{k}{n}x+1}).$$

Stačí nám teda dokázať, že $f(\frac{x}{\frac{k}{n}x+1}) = \frac{x}{\frac{k+1}{n}x+1}$, tak teda upravujme:

$$f(\frac{x}{\frac{k}{n}x+1}) = \frac{\frac{x}{\frac{k}{n}x+1}}{\frac{1}{n}\frac{x}{\frac{k}{n}x+1}+1} = \frac{\frac{x}{\frac{k}{n}x+1}}{\frac{\frac{x}{n}+\frac{k}{n}x+1}{\frac{k}{n}x+1}} = \frac{x}{\frac{k+1}{n}x+1},$$

čo sme chceli dokázať.

Keď to všetko zhrnieme, tak pre dané $n \in \mathbb{N}$ stačí ak definujeme $f(x) = \frac{x}{\frac{x}{n}+1}$. Zrejme platí, že $f : \langle 0; \infty) \to \mathbb{R}$ a tiež, že $\underbrace{f(f(\ldots(f}_{n}(x))\ldots)) = \frac{x}{x+1}$ čo sme potrebovali. Dokázali sme teda, že naša funkcia existuje pre každé $n \in \mathbb{N}$ (samozrejme takýchto funkcií môže teoreticky existovať viac, nám však stačí, že existuje aspoň jedna).

Poznámky k došlým řešením: Většina řešitelů uhodla, jak by hledaná funkce mohla přibližně vypadat (třeba předpokládali, že by to mohla být lineární lomená funkce). Pak už jenom indukcí stačilo dokázat, že tomu tak opravdu je.

**7. úloha** **(19, 17, 3, 32, 3, 0)**

(a) Rozhodněte, zda pro libovolnou funkci $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ existují funkce $f_1, f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takové, že $f_1$ je neklesající, $f_2$ je nerostoucí a platí, že $f = f_1 + f_2$.

(b) Rozhodněte, zda pro libovolnou funkci $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ existují funkce $g_1, g_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ takové, že $g_1$ je neklesající, $g_2$ je nerostoucí a platí, že $g = g_1 + g_2$.

(a) Dokážeme, že takové dvě funkce $f_1$ a $f_2$ nemusí existovat. Jako protipříklad si zvolíme funkci $f$ následujícím předpisem:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x = \frac{1}{2n}, \text{ pro } n \text{ přirozené} \\ 0, & \text{v ostatních případech} \end{cases}$$

Funkce $f$ je tedy skoro všude nulová, pouze v číslech tvaru $\frac{1}{2n}$ má hodnotu jedna. Pro spor předpokládejme, že $f = f_1 + f_2$, kde $f_1$ je neklesající a $f_2$ je nerostoucí.

Speciálně nás bude zajímat funkce $h = f_2 - f_1$. Jelikož funkce $f_2$ i $-f_1$ jsou nerostoucí (s tou $-f_1$ si to rozmysli), je nutně i funkce $h$ nerostoucí.

Odhadněme si pro přirozené $n$ výraz $h\left(\frac{1}{2n}\right) - h\left(\frac{1}{2n-1}\right)$. Totiž:

$$h\left(\frac{1}{2n}\right) - h\left(\frac{1}{2n-1}\right) =$$

$$= f_2\left(\frac{1}{2n}\right) - f_1\left(\frac{1}{2n}\right) - f_2\left(\frac{1}{2n-1}\right) + f_1\left(\frac{1}{2n-1}\right) = f_2\left(\frac{1}{2n}\right) +$$

$$+ f_1\left(\frac{1}{2n}\right) - f_2\left(\frac{1}{2n-1}\right) - f_1\left(\frac{1}{2n-1}\right) - 2f_1\left(\frac{1}{2n}\right) + 2f_1\left(\frac{1}{2n-1}\right) =$$

$$= f\left(\frac{1}{2n}\right) - f\left(\frac{1}{2n-1}\right) - 2\left[f_1\left(\frac{1}{2n}\right) - f_1\left(\frac{1}{2n-1}\right)\right] =$$

$$= 1 - 0 - 2\left[f_1\left(\frac{1}{2n}\right) - f_1\left(\frac{1}{2n-1}\right)\right] \geq 1.$$

V poslední úpravě jsme využili toho, že $f_1$ je neklesající funkce, odkud plyne, že výraz v hranaté závorce je nekladný.

Vzhledem k tomu, že $h$ je nerostoucí, určitě pro $n$ přirozené platí:

$$h\left(\frac{1}{2n+1}\right) - h\left(\frac{1}{2n}\right) \geq 0.$$

Sečtením předchozích dvou nerovností dostáváme, že pro přirozené $n$ platí

$$h\left(\frac{1}{2n+1}\right) - h\left(\frac{1}{2n-1}\right) \geq 1,$$

neboli

$$h\left(\frac{1}{2n+1}\right) \geq h\left(\frac{1}{2n-1}\right) + 1.$$

Takto postupně dostaneme (v prvním kroku využíváme, že $h$ je nerostoucí):

$$h(0) \geq h\left(\frac{1}{2n+1}\right) \geq h\left(\frac{1}{2n-1}\right) + 1 \geq$$

$$h\left(\frac{1}{2n-3}\right)+2 \geq \cdots \geq h\left(\frac{1}{1}\right)+n.$$

Tedy pro libovolné přirozené $n$ platí, že $h(0) \geq h(1)+n$, neboli $h(0)-h(1) \geq n$. To je ale spor, nějaké přirozené číslo určitě musí být větší než $h(0)-h(1)$.
(b) V této části dokážeme, že takové funkce $g_1$ a $g_2$ vždy existují. Zvolme si například $g_1(1)=0$ a $g_2(1)=g(1)$. Tedy máme, že $g_1(1)+g_2(1)=g(1)$.

Dále budeme funkce definovat rekurzivně. Předpokládejme, že pro $n \geq 2$ už známe hodnoty $g_1(1)$, $g_1(2)$, ... , $g_1(n-1)$, $g_2(1)$, $g_2(2)$, ... , $g_2(n-1)$ a platí:

$$g_1(1) \leq g_1(2) \leq \cdots \leq g_1(n-1),$$

$$g_2(1) \geq g_2(2) \geq \cdots \geq g_2(n-1),$$

$$g_1(i)+g_2(i)=g(i), \text{ pro } 1 \leq i \leq n-1.$$

Chceme zvolit $g_1(n)$ a $g_2(n)$ tak, aby $g_1(n) \geq g_1(n-1)$, $g_2(n) \leq g_2(n-1)$ a $g_1(n)+g_2(n) = g(n)$. Takto splníme potřebné předpoklady. Nicméně taková volba je velmi snadná. Stačí volit $g_1(n)$ „dostatečně velké“ a $g_2(n)=g(n)-g_1(n)$.

Konkrétně budeme $g_1(n)$ volit libovolně tak, aby $g_1(n) \geq g_1(n-1)$ a zároveň $g_1(n) \geq g(n)-g_2(n-1)$. Společně s volbou $g_2(n)=g(n)-g_1(n)$ máme ověřenu první a třetí podmínku. Zbývá ověřit, že $g_2(n) \leq g_2(n-1)$. To je ale velmi snadné – vzhledem k dřívějším volbám:

$$g_2(n)=g(n)-g_1(n) \leq g(n)-(g(n)-g_2(n-1))=g_2(n-1).$$

Předchozím postupem jsme rekurzivně určili $g_1$ a $g_2$. Z první podmínky plyne, že $g_1$ je neklesající, z druhé plyne, že je $g_2$ nerostoucí a ze třetí plyne, že $g_1+g_2=g$.

Poznámky k došlým řešením: Príklad sa skladal z dvoch častí. V prvej časti stačilo nájsť príklad funkcie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ktorá sa nedá napísať ako súčet neklesajúcej a nerastúcej funkcie. Najčastejšími príkladmi boli Dirichletova funkcia alebo funkcia $\frac{1}{x}$ pre $x \neq 0$ a 0 v nule. Niektorí riešitelia motivovaní kladnou odpoveďou v časti (b) sa snažili modifikovať jej dôkaz, čo ale samozrejme neviedlo k výsledku. Túto náročnejšiu časť som bodoval tromi bodmi.

Za druhú časť som dával 2 body. Takmer všetci riešitelia mali túto časť príkladu v poriadku a nevyskytli sa žiadne problémy.

**8. úloha** **(6, 6, 3, 33, 3, 0)**

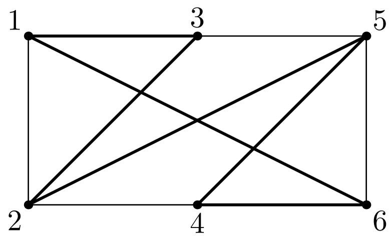
Nechť $\mathcal{F}$ je množina obsahující 60 různých funkcí $f: \{1,2,3,4,5,6,7\} \to \{0,1\}$. O dvou funkcích $f$ a $g$ povíme, že se mají rády, právě když existují alespoň tři $n \in \{1,2,3,4,5,6,7\}$ taková, že $f(n)=g(n)$. Dokažte, že funkce z množiny $\mathcal{F}$ je možné seřadit do posloupnosti $f_1$, $f_2$, ... , $f_{60}$ tak, že $f_i$ má ráda $f_{i+1}$ pro $i \in \{1,2,\ldots,59\}$ a $f_{60}$ má ráda $f_1$.

Nejprve si uvědomíme (♡), že kdykoliv $f \in \mathcal{F}$, potom $f$ má ráda alespoň 30 dalších funkcí z $f$.

Existuje přesně 128 funkcí z {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7} do {0, 1} – v každé ze sedmi hodnot 1, 2, ... , 7 máme dvě možnosti, jak funkci volit, dohromady dostáváme $2^7$ možných funkcí. Mezi těmito funkcemi jich právě 29 nemá rádo funkci $f$. Totiž právě jedna se neshoduje s funkcí $f$ v žádné funkční hodnotě. Právě $\binom{7}{1}=7$ funkcí s $f$ shoduje v právě jedné funkční hodnotě a právě

$\binom{7}{2} = 21$ takových funkcí se s funkcí $f$ shoduje v právě dvou funkčních hodnotách[6] (trochu si rozmysli). Se všemi ostatními funkcemi se $f$ už shoduje v alespoň třech hodnotách, tedy je má ráda. Dohromady je tedy nejvýše $1 + 7 + 21 = 29$ funkcí z $\mathcal{F}$, které $f$ nemá ráda. Pak ale musí mít ráda alespoň 30 dalších funkcí z $\mathcal{F}$. Tím je ($\heartsuit$) dokázáno.

Nyní, aby řešení bylo srozumitelné, přejdeme do teorie grafů. V tomto odstavci připomeneme několik základních pojmů z této teorie. Pokud je znáš, můžeš tento odstavec přeskočit. *Grafem* budeme rozumět dvojici množin $(V, E)$, kde $V$ je konečná množina a $E$ je podmnožina (neuspořádaných) dvojic z $V$. Množina $V$ se obvykle nazývá množinou *vrcholů* a množina $E$ se nazývá množinou *hran*[7]. Ač tato definice vypadá trochu odstrašivě, má názornou geometrickou představu – do roviny nakreslíme několik puntíků (vrcholů) a některé vrcholy spojíme čárou (hranou), dostaneme tak graf. *Stupněm* vrcholu $v \in V$ budeme rozumět počet hran, které z vrcholu $v$ vycházejí. *Kružnicí* v grafu budeme rozumět posloupnost vrcholů $v_1, v_2, v_3, \dots, v_k$ takovou, že pro $i \in \{1, 2, \dots, k-1\}$ jsou vrcholy $v_i$ a $v_{i+1}$ spojeny hranou, navíc vrcholy $v_k$ a $v_1$ jsou spojeny hranou a žádný vrchol se v této posloupnosti nevyskytuje dvakrát. O kružnici řekneme, že je *hamiltonovská*, když prochází všemi vrcholy grafu ($k$ je rovno počtu vrcholů grafu). Na následujícím obrázku si můžeš ozřejmit pojmy, které jsme zavedli:




Jedná se o graf $G = (V, E)$ s množinou vrcholů $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ a množinou hran $E = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 6\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{3, 5\}, \{4, 5\}, \{4, 6\}, \{5, 6\}\}$. Stupně vrcholů 1, 2, 3, 4, 5 a 6 jsou po řadě 3, 4, 3, 3, 4 a 3. Tučně je vyznačena hamiltonovská kružnice 1, 3, 2, 5, 4, 6.

Nyní si naší úlohu převedeme do teorie grafů. Utvoříme graf $G = (V, E)$ tak, že $V = \mathcal{F}$, tj. vrcholy jsou funkce z $\mathcal{F}$. Mezi dvěma funkcemi vede hrana, právě když se tyto dvě funkce mají rády. Precizně zapsáno $E = \{\{f, g\} | f, g \in \mathcal{F}; f \text{ a } g \text{ se mají rády}\}$. Zadání nám tedy v řeči teorie grafů říká: „Dokážte, že $G$ obsahuje hamiltonovskou kružnici“. V tvrzení ($\heartsuit$) jsme si dokázali, že stupeň každého vrcholu je alespoň 30.

Nyní si uvedeme větu, ze které řešení už přímo plyne, jedná se o variaci na Diracovu větu, nebo též speciální případ Chvátalovy věty.

**Věta.** Nechť $G$ je graf s $n \geq 3$ vrcholy takový, že stupeň každého vrcholu je alespoň $\frac{n}{2}$. Potom $G$ obsahuje hamiltonovskou kružnici.

*Důkaz.* Větu dokážeme sporem. Pro spor předpokládejme, že existuje graf $G$, který je protipříkladem k naší větě. Nechť $n$ je pevné, mezi všemi protipříklady si vyberme ten graf $G$, který má maximální možný počet hran (graf s $n$ vrcholy má nejvýše $\binom{n}{2}$ hran).

---

[6] Pokud Ti není jasné, co se myslí tím, že se funkce $f$ shoduje s nějakou funkcí $g$ právě v $k$ hodnotách, tak se tím myslí, že existuje právě $k$ čísel $a_1, a_2, \dots, a_k$ z množiny $\{1, 2, \dots, 7\}$ takových, že $f(a_i) = g(a_i)$, pro $i = 1, 2, \dots, k$.

[7] Anglicky se vrchol řekne *vertex* a hrana *edge*, odtud je označení množin $V$ a $E$.

Graf, který má přesně $\binom{n}{2}$ hran obsahuje hamiltonovskou kružnici (rozmysli si), tedy tento graf nemůže být protipříklad. Pak v grafu $G$ určitě existují dva vrcholy $u$, $v$, které nejsou spojené hranou. Nechť $G'$ vznikne tak, že ke grafu $G$ přidáme hranu $\{u, v\}$. Z maximality protipříkladu $G$ plyne, že už $G'$ nutně hamiltonovskou kružnici obsahuje. Označme si tuto kružnici $v_1$, $v_2$, $\dots$, $v_n$. Pokud by se po odebrání hrany $\{u, v\}$ stále jednalo o kružnici, potom i $G$ obsahuje hamiltonovskou kružnici, což je spor s tím, že $G$ je protipříklad. Proto hrana $\{u, v\}$ musí být některá z hran $\{v_1, v_2\}$, $\{v_2, v_3\}$, $\dots$, $\{v_{n-1}, v_n\}$, $\{v_n, v_1\}$. Bez újmy na obecnosti (rozmysli si) můžeme předpokládat, že $v_1 = u$ a $v_n = v$.

Pro $i \in \{2, \dots, n-1\}$ řekneme o vrcholu $v_i$, že je vhodný, právě když $v_{i+1}$ je spojen s $u$ v grafu $G$. Vhodných vrcholů je tolik, kolik má $u$ stupeň bez jedné (za hranu mezi $v_1$ a $v_2$), tedy aspoň $\frac{n}{2} - 1$, a to mezi $n - 2$ vrcholy. Navíc $v$ a $u$ nejsou v grafu $G$ spojeny hranou, tudíž vrchol $v$ má mezi vrcholy $v_2$, $v_3$, $\dots$, $v_{n-1}$ alespoň $\frac{n}{2}$ sousedů. Odtud plyne, že existuje vhodný vrchol $v_i$, který je zároveň sousedem $v$. Potom je ale posloupnost $u = v_1$, $v_2$, $\dots$, $v_i$, $v_k = v$, $v_{k-1}$, $v_{k-2}$, $\dots$, $v_{i+1}$ hamiltonovská kružnice v grafu $G$, což je spor s tím, že $G$ je protipříklad. Tvrzení věty jsme dokázali.

Když nyní použijeme větu pro $n = 60$ na graf $G$, máme úlohu vyřešenou.