8. série

Téma: Finální myš(maš)

Termín odeslání: 30. KVĚTNA 2005

1. ÚLOHA

(a) Král Esengelésie plánuje příští rok navštívit provinční oblast Polýnsko. Jeho syn Dran se těší, že bude moci vládnout, a chce tedy vládnout co nejdéle. Dran je v království vrchním územním plánovačem. Rozhodl se tedy, že postaví v Polýnsku novou infrastrukturu. Král bude určitě chtít navštívit všechna města. Dranovým cílem je, aby král mezi městy co nejdéle cestoval[1]. Rozhodl se tedy, že zvolí následující strategii. Vybere si přirozené číslo n, které bude značit počet měst. Mezi některými dvojicemi měst vybuduje rychlodráhy, přičemž rychlodráhy může Dran stavět tak, aby mezi městy fungovaly obousměrně, ale i jednosměrně. Král určitě bude cestovat jen pomocí rychlodrah. Rychlodráhy chce Dran postavit tak, aby z každého města bylo možné (možná přes některá další města) dojet pomocí rychlodrah do libovolného jiného. Navíc bude chtít, aby ať bude král jakkoliv cestovat tak, že navštíví všechna města, bude muset jet alespoň po $2n$ cestách. Dokažte, že se Dranovi plán může povést, tj. vyberte si n, navrhněte n měst a dráhy mezi nimi a dokažte, že v takovém plánu musí král použít rychlodráhu alespoň $2n$-krát (král si může vybrat, kde začne a skončí). (2 BODY)

(b) Rok po návštěvě Polýnska se Král chystá do Harenéše, tam už je infrastruktura vybudovaná, je tam přesně m měst a rychlodráhy splňují zvláštní pravidla. Z každého města vedou přesně dvě rychlodráhy, jedna označená jako 0 a jedna jako 1. A opět platí, že z každého města je možné se pomocí rychlodrah dostat do libovolného jiného. Cestovním plánem pro krále (který se právě nachází ve městě M) nazveme posloupnost b_1, b_2, ... , b_k nul a jedniček, přičemž král se podle plánu bude pohybovat tak, že z města M použije rychlodráhu označenou b_1, dostane se do nějakého dalšího města, použije rychlodráhu označenou b_2, potom b_3, ... , nakonec b_k. Král má rád, když si může naplánovat, jak bude cestovat, chtěl by tedy mít nějaký cestovní plán dříve, než do Harenéše pojede. Nicméně nezná infrastrukturu, pouze ví, že v Harenéši je m měst. A to je přesně úkol pro Tebe. Navrhni pro krále nějaký univerzální cestovní plán, tj. takový, že ať král začne v jakémkoliv městě a rozvržení rychlodrah je libovolné, bude mít král vždy jistotu, že projde pomocí tohoto plánu všechna města. (3 BODY)

2. ÚLOHA

Nechť ABC je ostroúhlý trojúhelník. Označme D, E, F paty jeho výšek spuštěných po řadě z bodů A, B, C. Dále označme G, H, I po řadě průsečíky úhlopříček čtyřúhelníků $AFDE$, $BDEF$, $CDFE$. Body J, K, L získáme po řadě jako průsečíky úhlopříček čtyřúhelníků $BCIH$, $ACIG$ a $ABHG$. A na závěr, body M, N, O, P, Q a R získáme (opět po řadě) jako průsečíky úhlopříček čtyřúhelníků $BFGD$, $CEGD$, $AFHE$, $CEHD$, $AEIF$ a $BFID$.

(a) V závislosti na velikostech vnitřních úhlů trojúhelníku ABC určete velikosti vnitřních úhlů trojúhelníku DEF. (2 BODY)

(b) Dokažte, že se šestice úseček AJ, BK, CL, MN, OP, QR protíná v jednom bodě. (3 BODY)

[1] Přitom ale měst nechce postavit příliš mnoho – výstavba měst je poměrně nákladná.

3. ÚLOHA

(a) V závislosti na přirozeném n seřaďte podle velikosti čísla 4^n, $n!$ a $\binom{2n}{n}$. Odpověď zdůvodněte. (2 BODY)

(b) Dokažte nerovnost

$$\sum_{i=1}^{n-1} \sqrt{i}\binom{n}{i} \leq \sqrt{n\left((2n-1)\binom{2n-2}{n} - n + 1\right)}.$$

(3 BODY)

4. ÚLOHA

Mějme dána přirozená čísla k a n. Předpokládejme, že máme čísla 1, 2, ..., n seřazena cyklicky, tj. 2 následuje po 1, 3 následuje po 2, ..., n následuje po $n-1$ a 1 následuje po n. Na začátku jsou všechna čísla 1, 2, ..., n obarvena okrově. Povolené barvy jsou okrová a snědá. V jednom kroku si Honza vybere úsek k po sobě jdoucích čísel[2] a změní barvy všech čísel v tomto úseku. Označme $H_{n,k}$ počet různých obarvení, která může Honza (po libovolném počtu kroků) získat.

(a) Dokažte, že $H_{n,k}$ je mocnina 2. (2 BODY)

(b) V závislosti na přirozeném n a prvočísle p určete $H_{n,p}$. (3 BODY)

5. ÚLOHA

(a) V přirozených číslech vyřešte soustavu kongruencí (2 BODY)

$$\begin{aligned} x &\equiv 1 \pmod{2^y},\\ y &\equiv 1 \pmod{2^z},\\ z &\equiv 1 \pmod{2^x}. \end{aligned}$$

(b) Vyřešte v přirozených číslech jinou soustavu kongruencí: (3 BODY)

$$\begin{aligned} 2^y &\equiv 1 \pmod{x},\\ 2^z &\equiv 1 \pmod{y},\\ 2^x &\equiv 1 \pmod{z}. \end{aligned}$$

6. ÚLOHA

(a) Na papíře jsou dány dva různé body A a B. Napřehýbejte body C a D tak, aby úsečka CD byla hranou krychle, která má osmkrát větší objem než krychle s hranou AB. Nesmíte přitom používat „obtiskávání“ bodů ani vícenásobné přehýbání papíru (tedy postup, kdy papír přehneme a přehnutý ho přehneme znovu). (2 BODY)

(b) Na papíře jsou dány dva různé body A a B. Napřehýbejte body E a F tak, aby úsečka EF byla hranou krychle, která má dvakrát větší objem než krychle s hranou AB. Můžete používat veškeré prostředky povolené v šesté sérii. (3 BODY)

[2]Vzhledem k cyklickému uspořádání je tedy například $(n-2, n-1, n, 1, 2, \dots, k-3)$ úsekem k po sobě jdoucích čísel.

7. ÚLOHA

(a) Nechť $f : \langle 0,1\rangle \to \mathbb{R}$ je funkce taková, že je ji možné napsat jako součet nerostoucí a neklesající funkce. Dokažte, že potom existuje konstanta c (závisející pouze na zvolené funkci f) taková, že kdykoliv si vybereme čísla $0 \le d_1 < d_2 < \cdots < d_n \le 1$ (n je libovolné), potom výraz

$$|f(d_1) - f(d_2)| + |f(d_2) - f(d_3)| + \cdots + |f(d_{n-1}) - f(d_n)|$$

je menší nebo roven[3] c. (2 BODY)

(b) Nechť $f : \langle 0,1\rangle \to \mathbb{R}$ je funkce definovaná

$$f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right),\ x \in (0,1\rangle,$$

$$f(0) = \frac{1}{2}.$$

Nechť g vznikne z f zúžením na interval $(0,1)$. Rozhodněte, zda je možné funkci f, resp. g zapsat jako součet neklesající a nerostoucí funkce (samozřejmě na intervalech, na kterých jsou definované). (3 BODY)

(c) (pro náročnější) Nechť $f : \langle 0,1\rangle \to \mathbb{R}$ je funkce taková, že kdykoliv si vybereme čísla $0 \le d_1 < d_2 < \cdots < d_n \le 1$, potom

$$|f(d_1) - f(d_2)| + |f(d_2) - f(d_3)| + \cdots + |f(d_{n-1}) - f(d_n)| < 2005.$$

Dokažte, že je možné funkci f napsat jako součet nerostoucí a neklesající funkce.

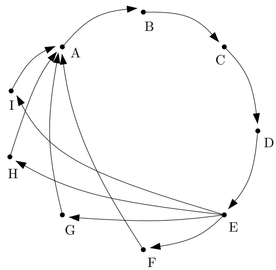
[3]Nenech se odradit trochu odstrašujícím zadáním této úlohy, je ve skutečnosti jednoduchá. Pokud Ti nepůjde vymyslet řešení pro obecnou funkci f, zkus úlohu alespoň vyřešit pro f neklesající či nerostoucí, dostaneš od nás bod.

Řešení 8. série

1. úloha **(19, 18, 2,05, 2,0)**

(a) Král Esengelésie plánuje příští rok navštívit provinční oblast Polýnsko. Jeho syn Dran se těší, že bude moci vládnout, a chce tedy vládnout co nejdéle. Dran je v království vrchním územním plánovačem. Rozhodl se tedy, že postaví v Polýnsku novou infrastrukturu. Král bude určitě chtít navštívit všechna města. Dranovým cílem je, aby král mezi městy co nejdéle cestoval[4]. Rozhodl se tedy, že zvolí následující strategii. Vybere si přirozené číslo n, které bude značit počet měst. Mezi některými dvojicemi měst vybuduje rychlodráhy, přičemž rychlodráhy může Dran stavět tak, aby mezi městy fungovaly obousměrně, ale i jednosměrně. Král určitě bude cestovat jen pomocí rychlodrah. Rychlodráhy chce Dran postavit tak, aby z každého města bylo možné (možná přes některá další města) dojet pomocí rychlodrah do libovolného jiného. Navíc bude chtít, aby ať bude král jakkoliv cestovat tak, že navštíví všechna města, bude muset jet alespoň po $2n$ cestách. Dokažte, že se Dranovi plán může povést, tj. vyberte si n, navrhněte n měst a dráhy mezi nimi a dokažte, že v takovém plánu musí král použít rychlodráhu alespoň $2n$-krát (král si může vybrat, kde začne a skončí). (2 BODY)

(b) Rok po návštěvě Polýnska se Král chystá do Harenéše, tam už je infrastruktura vybudovaná, je tam přesně m měst a rychlodráhy splňují zvláštní pravidla. Z každého města vedou přesně dvě rychlodráhy, jedna označená jako 0 a jedna jako 1. A opět platí, že z každého města je možné se pomocí rychlodrah dostat do libovolného jiného. Cestovním plánem pro krále (který se právě nachází ve městě M) nazveme posloupnost b_1, b_2, … , b_k nul a jedniček, přičemž král se podle plánu bude pohybovat tak, že z města M použije rychlodráhu označenou b_1, dostane se do nějakého dalšího města, použije rychlodráhu označenou b_2, potom b_3, … , nakonec b_k. Král má rád, když si může naplánovat, jak bude cestovat, chtěl by tedy mít nějaký cestovní plán dříve, než do Harenéše pojede. Nicméně nezná infrastrukturu, pouze ví, že v Harenéši je m měst. A to je přesně úkol pro Tebe. Navrhni pro krále nějaký univerzální cestovní plán, tj. takový, že ať král začne v jakémkoliv městě a rozvržení rychlodrah je libovolné, bude mít král vždy jistotu, že projde pomocí tohoto plánu všechna města. (3 BODY)



(a) Představme si, že Dran postavil takovou síť rychlodrah, jako je na obrázku. Král chce projet každým z měst F, G, H a I; ovšem je-li v nějakém z těchto čtyř měst a chce se dostat do jiného z nich, musí použít rychlodráhu aspoň šestkrát. Mezi nějakými dvěma z těchto čtyř měst se přesune přinejmenším třikrát, takže rychlodráhu celkově použije minimálně 18-krát. A poněvadž je celkový počet měst 9 a $18 = 2 \cdot 9$, našli jsme požadované rozvržení drah.

(b) Předpokládejme nejprve, že rychlodráhy jsou rozvrženy nějakým známým způsobem, a značme města 1, 2, … , n. Pokud král začíná v městě 1, určitě existuje nějaký cestovní plán P_1 takový, že pomocí něj král projede všechna města. Co kdyby ale král začínal v městě 2? Pak se

[4]Přitom ale měst nechce postavit příliš mnoho – výstavba měst je poměrně nákladná.

použitím plánu P_1 dostane do nějakého města i, a není těžké najít plán Q_2 takový, že z i podle něj projede všemi městy. Uvažujme tedy dále plán P_2, který vypadá tak, že napřed se cestuje podle P_1 a pak podle Q_2[5]. Vyrazí-li král z města 3, podle P_2 se dostane do nějakého města k, z nějž použitím vhodného plánu Q_3 procestuje všechna města. Opět značme P_3 spojení plánů P_2 a Q_3. Takto můžete pokračovat a uvažovat postupně další a další počáteční města, až nakonec dostaneme cestovní plán P_n, pomocí nějž král projede všemi městy, ať už začínal v jakémkoli z nich.

Počet všech možných rozvržení rychlodráh mezi městy je zřejmě konečný, můžeme tedy sestrojit cestovní plán P_n pro každé z nich, a tyto plány spojit do jednoho plánu P. Jak si každý jistě bez problémů uvědomí, vzniklý plán P je univerzálním cestovním plánem.

2. úloha **(23, 17, 1,87, 2,0)**

Nechť ABC je ostroúhlý trojúhelník. Označme D, E, F paty jeho výšek spuštěných po řadě z bodů A, B, C. Dále označme G, H, I po řadě průsečíky úhlopříček čtyřúhelníků $AFDE$, $BDEF$, $CDFE$. Body J, K, L získáme po řadě jako průsečíky úhlopříček čtyřúhelníků $BCIH$, $ACIG$ a $ABHG$. A na závěr, body M, N, O, P, Q a R získáme (opět po řadě) jako průsečíky úhlopříček čtyřúhelníků $BFGD$, $CEGD$, $AFHE$, $CEHD$, $AEIF$ a $BFID$.

(a) V závislosti na velikostech vnitřních úhlů trojúhelníku ABC určete velikosti vnitřních úhlů trojúhelníku DEF. (2 BODY)

(b) Dokažte, že se šestice úseček AJ, BK, CL, MN, OP, QR protíná v jednom bodě. (3 BODY)

(a) Označme po řadě α, β, γ vnitřní úhly trojúhelníku ABC. Z pravoúhlého trojúhelníku AFC plyne, že $|\sphericalangle ACF| = 90^\circ - \alpha$. Dále body F i D leží na Tháletově kružnici nad přeponou AC. Speciálně je tedy čtyřúhelník $AFDC$ tětivový, odkud podle věty o obvodovém úhlu plyne, že $|\sphericalangle ADF| = |\sphericalangle ACF| = 90^\circ - \alpha$. Analogickým postupem odvodíme, že $|\sphericalangle ADE| = |\sphericalangle ABE| = 90^\circ - \alpha$. Potom $|\sphericalangle FDE| = |\sphericalangle FDA| + |\sphericalangle ADE| = 180^\circ - 2\alpha$. Využijeme-li princip cyklické záměny, odvodíme, že $|\sphericalangle DEF| = 180^\circ - 2\beta$, $|\sphericalangle EFD| = 180^\circ - 2\gamma$.
(b) Označme V ortocentrum (průsečík výšek) trojúhelníku ABC. Dokážeme, že všech 6 úseček prochází bodem V, čímž bude úloha vyřešena. Nejprve se zaměříme na úsečky AJ, BK a CL. Pokud dokážeme, že bod J leží na úsečce VD, potom už nutně V leží na AJ. K tomu, abychom dokázali, že bod J leží na VD nám stačí dokázat, že úsečky CH, BI a VD procházejí jedním bodem. K důkazu použijeme takzvanou Cévovu větu, kterou zde zformulujeme, nicméně ji nebudeme dokazovat, neboť by řešení úlohy příliš nabobtnalo:

Věta. (Cévova) Nechť[6] je dán trojúhelník $A'B'C'$ a body D', E', F' po řadě leží na stranách $B'C'$, $A'C'$, $A'B'$. Potom úsečky $A'D'$, $B'E'$ a $C'F'$ procházejí jedním bodem, právě když

$$\frac{|A'F'||B'D'||C'E'|}{|B'F'||C'D'||A'E'|} = 1.$$

Použijeme-li Cévovu větu pro trojúhelník BVC a body D, H a I, stačí nám tedy dokázat, že

$$\frac{|BH||CD||VI|}{|VH||BD||CI|} = 1.$$

[5] Zdůrazněme, že cestuje-li král podle P_2 a začne v městě 1, také projede všemi městy – přidání Q_2 na konec původního plánu totiž jeho vlastnosti neovlivnilo.

[6] Ve znění věty používáme čárkovaná písmenka, aby se nám nepletla s písmenky z úlohy – nenech se jimi zmást.

Nyní si vyjádříme délky některých úseček pomocí goniometrických funkcí trojúhelníku. Za tímto účelem si zformulujeme jedno lemma, které budeme hojně využívat.

Lemma. Nechť je dán trojúhelník XYZ a bod T na straně XY. Potom

$$\frac{|XT|}{|YT|} = \frac{\sin(|\sphericalangle XZT|)\sin(|\sphericalangle ZYT|)}{\sin(|\sphericalangle ZXT|)\sin(|\sphericalangle TZY|)}.$$

Důkaz. Podle sinové věty je

$$\frac{|XT|}{|TZ|} = \frac{\sin(|\sphericalangle XZT|)}{\sin(|\sphericalangle ZXT|)} \text{ a } \frac{|TZ|}{|YT|} = \frac{\sin(|\sphericalangle ZYT|)}{\sin(|\sphericalangle TZY|)}.$$

Odtud lemma přímo plyne.

Nyní použijeme lemma pro trojúhelník VDB a bod D na straně VB. Podle řešení části (a) nebo elementárními výpočty je

$$|\sphericalangle VDH| = 90^\circ - \alpha, |\sphericalangle HDB| = \alpha, |\sphericalangle DVH| = \gamma, |\sphericalangle DBH| = 90^\circ - \gamma.$$

Odtud je

$$\frac{|BH|}{|VH|} = \frac{\sin\alpha\sin\gamma}{\sin(90^\circ - \alpha)\sin(90^\circ - \gamma)} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\frac{\sin\gamma}{\cos\gamma} = \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\gamma.$$

Analogicky odvodíme (pozor na převrácenou hodnotu), že

$$\frac{|VI|}{|CI|} = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}.$$

A použijeme-li lemma pro trojúhelník ABC a bod D, dostáváme

$$\frac{|CD|}{|BD|} = \frac{\sin(90^\circ - \gamma)\sin\beta}{\sin(90^\circ - \beta)\sin\gamma} = \frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\gamma}.$$

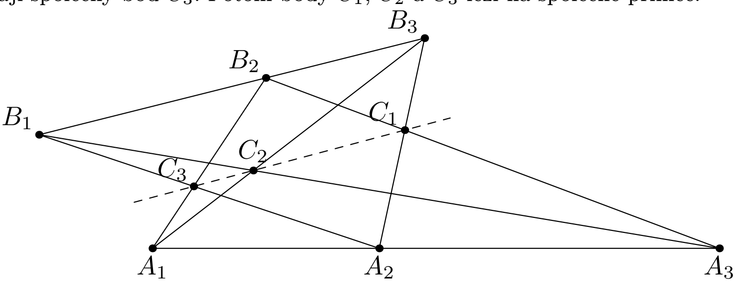
Když všechny tři rovnosti vynásobíme, dostaneme

$$\frac{|BH||CD||VI|}{|VH||BD||CI|} = \frac{\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma}{\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma} = 1.$$

Tím jsme ověřili podmínku Cévovy věty, a tedy víme, že se úsečky CH, BI a VD protínají v jednom bodě, neboli bod V leží na úsečce AJ. Naprosto analogickým způsobem ověříme, že bod V leží na úsečkách BK a CL.

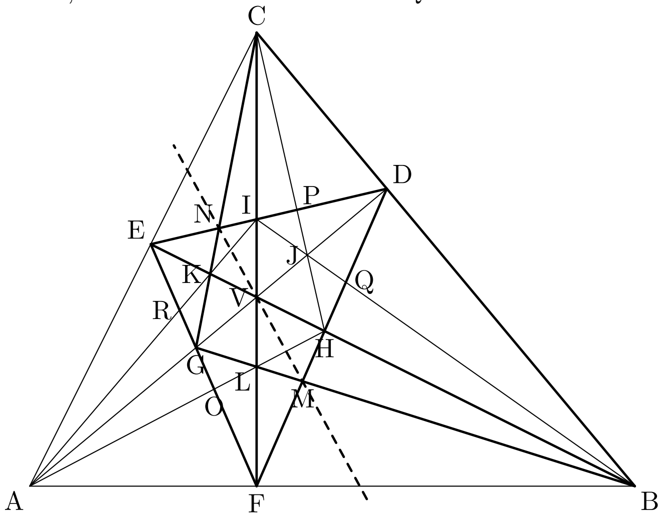
Dále si zmíníme Pappovu větu, která nám pomůže k dalšímu řešení.

Věta. (Pappova) Nechť A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3 je 6 různých bodů v rovině takových, že A_1, A_2 a A_3 leží na společné přímce a B_1, B_2 a B_3 leží na společné přímce. Navíc nechť se přímky A_2B_3 a B_2A_3 protínají v bodě C_1, přímky A_1B_3 a B_1A_3 mají společný bod C_2 a přímky A_1B_2 a B_1A_2 mají společný bod C_3. Potom body C_1, C_2 a C_3 leží na společné přímce.



Důkaz opět vynecháme, lze ho například (ve speciálním případě, který by pro řešení této úlohy stačil) provést několikanásobným použitím Menelaovy věty. Další možný důkaz je pomocí analytické geometrie.

Použijeme-li Pappovu větu na body B, D a C; F, G a E, vyjdou nám jako body C_1, C_2, C_3, body N, V, M, odkud plyne, že body M, N a V leží na jedné přímce. To ale znamená, že bod V leží na úsečce MN, neboť V je vnitřní bod trojúhelníku DEF a body M, N jsou krajní body. Analogicky se dokáže, že bod V leží na úsečkách OP a QR.



Úlohu by bylo možné řešit i elementárněji bez využití Pappovy věty například použitím výrazně známější Menelaovy věty pro trojúhelník BKG a potom počty podobnými jako v první části úlohy (o trochu složitějšími).

3. úloha **(26, 20, 2, 27, 2, 0)**

(a) V závislosti na přirozeném n seřaďte podle velikosti čísla 4^n, $n!$ a $\binom{2n}{n}$. Odpověď zdůvodněte.

(2 body)

(b) Dokažte nerovnost

$$\sum_{i=1}^{n-1} \sqrt{i}\binom{n}{i} \leq \sqrt{n\left((2n-1)\binom{2n-2}{n} - n + 1\right)}.$$

(3 body)

(a) Jak každý snadno (z hlavy ;)) spočítá, pro $n \in \{1,2,3,4,5,6\}$ platí $n! < \binom{2n}{n} < 4^n$. A pro n rovno 7 nebo 8 zase platí $\binom{2n}{n} < n! < 4^n$.

Dál už předpokládejme, že $n \geq 9$ a dokažme, že potom $\binom{2n}{n} < 4^n < n!$. Protože $9! > 4^9$, platí $n! = n \cdot (n-1) \cdots 10 \cdot 9! > 4 \cdot 4 \cdots 4 \cdot 9! > 4^{n-9}4^9 = 4^n$, hle – první nerovnost!

Podle binomické věty pro každé přirozené číslo k a jakákoli reálná čísla a a b platí:

$$(a+b)^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} a^i b^{k-i},$$

odkud po dosazení $a = b = 1$ a $k = 2n$ dostaneme

$$4^n = (1+1)^{2n} = \sum_{i=0}^{2n} \binom{2n}{i} > \binom{2n}{n},$$

čímž jsme dokázali i druhou z nerovností.

(b) Známá Cauchyova nerovnost říká, že pro libovolná reálná čísla $x_1, x_2, \ldots, x_k$ a $y_1, y_2, \ldots, y_k$ (kde k je libovolné přirozené číslo) platí

$$\left(\sum_{i=1}^{k} x_i y_i\right)^2 \leq \sum_{i=1}^{k} x_i^2 \sum_{i=1}^{k} y_i^2,$$

odkud pro $k = n-1$, $x_i = \sqrt{i}$ a $y_i = \binom{n}{i}$ dostaneme

$$\left(\sum_{i=1}^{n-1} \sqrt{i}\binom{n}{i}\right)^2 \leq \sum_{i=1}^{n-1} i \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n}{i}^2 = \frac{n(n-1)}{2}\left(\binom{2n}{n} - 2\right),$$

což není těžké upravit do tvaru dokazované nerovnosti. Už si tedy musíme jenom uvědomit, proč platí poslední rovnost.

Vztah pro součet aritmetické řady $\sum_{i=1}^{n-1} i$ je dosti známý a dokáže se snadno indukcí, takže Ti jej ponechám k rozmyšlení, milá čtenářko (a čtenáři). Radši se podívejme na zoubek druhému z použitých vztahů. Ten dokážeme trikem:

Předpokládejme, že doma chovám motýly (to bohužel není pravda, ale co kdyby ... (:) a n jich mám oranžových a n fialových (a protože nosím brýle, nečiní mi problémy navzájem rozeznat ani motýly téže barvy). A řekněme, že za pár dní odjíždím na soustředění PraSátka a napadlo mě, že bych mohl s sebou dovézt nějakých n motýlů a pochlubit se jimi. No a jelikož jsem člověk nerozhodný, nemůžu se rozhodnout, kterých n motýlů bych měl vzít (všichni jsou přece krásní a úžasní). Tak by mě aspoň zajímalo, kolika způsoby ty motýly můžu vybrat. Mohl bych se třeba rozhodnout nehledět na barvy, takže bych vybíral nějakých n z celkem $2n$ motýlů, což jde udělat přesně $\binom{2n}{n}$ způsoby. Ale taky bych si mohl říct, že vezmu i oranžových a zbylých $n-i$ motýlů fialových. Ty oranžové jde vybrat $\binom{n}{i}$ způsoby; fialoví jdou vybrat $\binom{n}{n-i} = \binom{n}{i}$ způsoby. Toto je pravda pro jakékoli i, celkový počet možností je tudíž $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2$.

Porovnáním těchto dvou různých výsledků (které jsou ale kupodivu oba správně (:) po snadné úpravě dostaneme kýžený vztah

$$\sum_{i=1}^{n-1} \binom{n}{i}^2 = \left(\binom{2n}{n} - 2\right).$$

4. úloha **(4, 3, 2, 25, 2, 0)**

Mějme dána přirozená čísla k a n. Předpokládejme, že máme čísla 1, 2, ..., n seřazena cyklicky, tj. 2 následuje po 1, 3 následuje po 2, ..., n následuje po $n-1$ a 1 následuje po n. Na začátku jsou všechna čísla 1, 2, ..., n obarvena okrově. Povolené barvy jsou okrová a snědá. V jednom kroku si Honza vybere úsek k po sobě jdoucích čísel[7] a změní barvy všech čísel v tomto úseku. Označme $H_{n,k}$ počet různých obarvení, která může Honza (po libovolném počtu kroků) získat.

(a) Dokažte, že $H_{n,k}$ je mocnina 2. (2 BODY)

(b) V závislosti na přirozeném n a prvočísle p určete $H_{n,p}$. (3 BODY)

(a) Prvně si uvědomíme, že nezáleží na pořadí v jakém si Honza vybírá úseky. Totiž počet změn barvy nějakého čísla c závisí jen na počtu měněných úseků, ve kterých c leží.

Dále si uvědomme, že nemá význam, aby Honza nějaký úsek měnil dvakrát (či vícekrát). Můžeme totiž změnit pořadí Honzových výběrů tak, aby si ten samý úsek vybral dvakrát těsně po sobě, což má stejný efekt, jako by si ho vůbec nevybral. Při určování čísel $H_{n,k}$ tedy můžeme předpokládat, že si Honza každý úsek vybere nejvýše jednou.

Nyní si označme U_1 množinu všech úseků, které má Honza k dispozici. Pro i přirozené provádějme následující postup:

Předpokládejme, že už známe množinu úseků U_i. Ptejme se, zda existují nějaká V_i podmnožina U_i taková, že když Honza postupně použije úseky z množiny V_i dostane se do původního stavu, jako na začátku.

Pokud taková V_i existuje, vyberme nějaký úsek $u_i \in V_i$ a zvolme $U_{i+1} = U_i \setminus \{u_i\}$.

Pokud taková V_i neexistuje, postup zastavme a označme si takto získané i jako l.

Nyní učiníme několik pozorování. První je, že se postup musí zastavit, neboť začínáme s konečnou množinou, kterou v každém úspěšném kroku zmenšujeme. Dále si označme $H_{n,k;i}$ počet možných obarvení, bude-li Honza používat jenom úseky z U_i. Zřejmě $H_{n,k} = H_{n,k;1}$. Naším cílem je dokázat, že[8]

$$H_{n,k;1} = H_{n,k;2} = \cdots = H_{n,k;l} = 2^{|U_l|}.$$

[7]Vzhledem k cyklickému uspořádání je tedy například $(n-2, n-1, n, 1, 2, \ldots, k-3)$ úsekem k po sobě jdoucích čísel.

[8]Pokud neznáš značení $|M|$ pro množinu M, tak věz, že se jedná o označení počtu prvků množiny M, tedy například $|\{1, 3, \heartsuit\}| = 3$.

Odtud už plyne tvrzení části (a).

Další pozorování tedy bude, že pro $i \in \{1, 2, \ldots, l-1\}$ je $H_{n,k;i} = H_{n,k;i+1}$. Zřejmě $H_{n,k,i} \geq H_{n,k,i+1}$ (množinu úseků při každém kroku zmenšujeme). Stačí nám tedy dokázat, že každé obarvení, které dostaneme z úseků z množiny U_i lze dostat jen z úseků množiny U_{i+1}. Předpokládejme tedy, že máme úseky v množině $X \subseteq U_i$, které indukují[9] nějaké obarvení B. Pokud $X \subseteq U_{i+1}$, potom lze toto obarvení získat stejným způsobem jen z úseků množiny U_{i+1}. Pokud $X \nsubseteq U_{i+1}$, potom nutně $u_i \in X$ (podívej se na postup tvorby U_{i+1}). Když nyní použijeme po použití úseků z X ještě úseky z V_i, obarvení se nám nezmění, protože V_i obarvení nemění. Tím jsme úsek u_i použili dvakrát, tudíž ho můžeme vynechat. Možná, že jsme použili ještě některé další úseky dvakrát, ty také vynecháme. Potom ale používáme k výrobě obarvení B jenom úseky z U_{i+1}, což jsme chtěli dokázat.

Nakonec si všimneme, že $H_{n,k;l} = 2^{|U_l|}$. Množina U_l má $2^{|U_l|}$ podmnožin, stačí si uvědomit, že každá indukuje jiné obarvení. Nechť pro spor nějaké dvě $X, Y \subseteq U_l$, $X \neq Y$ indukují stejné obarvení (lépe řečeno stejnou změnu obarvení). Potom stačí použít úseky z X a Y po sobě, vynechat dvojí použití některých úseků (alespoň jeden úsek je použit právě jednou, neboť $X \neq Y$). Tím dostaneme nějakou neprázdnou množinu úseků, která dává původní obarvení, to je ale spor, že se postup zastavil.

Tím máme část (a) za sebou.

(b) Na začátku napíšeme jednu drobnou poznámku k zadání. Aby úloha dávala smysl, má být samozřejmě $p \geq n$. Pokud bychom tento předpoklad zapomněli a snažili se úlohu nějak interpretovat, pokud $p > n$, potom každý úsek p po sobě jdoucích čísel obsahuje nutně všechna čísla, tedy Honza mění všechny barvy a vyjdou dvě možná obarvení.

Budeme navazovat na část (a), budeme se snažit zjistit $|U_l|$ při nějakém vhodně zvoleném postupu.

Pro stručnost značme u_j úsek p po sobě jdoucích čísel začínající v čísle j; například $x_n = (n, 1, 2, \ldots, p-1)$.

Úlohu rozdělíme na několik částí v závislosti na p a n. Dokážeme následující výsledky:

$$\begin{aligned} p|n \text{ nebo } p = 2 \quad &\Rightarrow \quad H_{p,n} = 2^{n+1-p},\\ p \nmid n, p \neq 2 \quad &\Rightarrow \quad H_{p,n} = 2^n. \end{aligned}$$

Vyřešme tedy nejprve první situaci: $p|n$ nebo $p = 2$. Množina U_1 obsahuje všechny úseky. Dokážeme, že podle postupu v části (a) lze volit U_i pro $1 \leq i \leq p$ tak, že obsahuje úseky x_1, x_2, x_3, … , $x_{n-(i-1)}$. A pro $i = p$ se postup zastaví.

Předpokládejme tedy, že známe už množinu U_i, nejprve nechť $i < p$, a vytvořme množinu U_{i+1}. Množina U_i zatím obsahuje úseky (samozřejmě může obsahovat ještě některé další) x_1, x_{p+1}, x_{2p+1}, x_{n-p+1} a $x_{p-(i-1)}$, $x_{2p-(i-1)}$, … , $x_{n-(i-1)}$, pokud n dělí p, jinými slovy V_i zvolíme tak, aby obsahovala přesně úseky vyjmenované v předchozím výčtu. Pokud $p = 2$, potom $i < p$ implikuje $i = 1$ a zvolíme $V_i (= V_1) = U_1$. V obou případech, když Honza použije úseky z V_i, bude u každého čísla jeho barva změněna právě dvakrát (rozmysli si), tudíž dostane původní obarvení. Nyní stačí zvolit $u_i = x_{n-(i-1)} \in V_i$, a tedy $U_{i+1} = U_i \setminus \{u_i\} = U_i \setminus \{x_{n-(i-1)}\}$, což přesně odpovídá popisu U_{i+1}, který jsme uváděli v minulém odstavci.

Dále si zbývá uvědomit, že pro $i = p$ se postup zastaví. Pro spor nechť existuje $V_p \subseteq U_p = \{x_1, x_2, \ldots, x_{n-p+1}\}$, taková, že když Honza použije úseky z V_p, dostane původní obarvení. Připomeňme, že $x_{n-p+1} = (n-p+1, n-p+2, \ldots n)$, tedy žádný z úseků nepoužívá cykličnost uspořádání. Nechť $x_j \in V_p$ je úsek s nejmenším indexem. Potom prvek j se ve V_p vyskytuje

[9] To znamená, že když Honza bude postupně měnit barvy na úsecích z množiny X, dostane tím nějaké obarvení B.

pouze v x_j, tedy se změní jeho barva (po použití úseků z V_p), což je spor s tím, že V_p barvu nemění. Postup se tedy musí zastavit.

Podle části (a) je $H_{n,p} = 2^{|U_p|} = 2^{n+1-p}$, což jsme chtěli dokázat.

Nyní zbývá situace, že $p \nmid n$, $p \neq 2$. Teď zapomeneme, co jsme zatím používali a budeme postupovat jinak. Všech možných obarvení n-prvkové množiny je 2^n, tedy nutně $H_{n,k} \leq 2^n$. Stačí tedy dokázat, že každé obarvení je dosažitelné.

Zde použijeme větu z teorie čísel, kterou (abychom řešení zbytečně nenatahovali) zde nebudeme dokazovat.

Věta. (Bezout – drobná modifikace) Nechť k, l jsou nesoudělná přirozená čísla, potom existují a, b přirozená taková, že $ak - bl = 1$.

Větu použijeme pro $k = p$ a $l = n$, dostaneme tak nějaká přirozená čísla a a b taková, že $ap - bn = 1$. Nyní Honza změní barvu na úsecích $u_{1 \pmod n}$, $u_{p+1 \pmod n}$, $u_{2p+1 \pmod n}$, $\dots$, $u_{(a-1)p+1 \pmod n}$. Přitom $(a-1)p+1 \pmod n = ap - p + 1 \pmod n = (bn+1) - p + 1 \pmod n = n - p + 2$. Tedy poslední zmiňovaný úsek je úsek $(n-p+2, n-p+1, \dots, n-1, n, 1)$. Úseky po sobě těsně následují, což znamená, že Honza barvu jedničky měnil o jedna vícekrát, než barvu kteréhokoliv dalšího čísla. Dostáváme tedy dvě možnosti. První je, že se barva jedničky změnila a barva všech ostatních čísel nezměnila, s touto možností budeme prozatím spokojení. Druhá možnost je, že se barva jedničky nezměnila a barva všech ostatních čísel se změnila. Potom Honzovi ale stačí postupně změnit barvu na úplně všech úsecích. Tím se změní barva každého čísla (každé číslo změní barvu p-krát a p je liché), čímž dostáváme postup, který umí změnit barvu jedničky a všechna ostatní čísla zachovat. Bude-li Honza tento postup posouvat, umí změnit barvu libovolného čísla, které si usmyslí, a všechna ostatní čísla zachovat. Protože na pořadí změn nezáleží, dokáže Honza tímto postupem získat libovolné obarvení (stačí postupně změnit barvy potřebným číslům).

5. úloha **(20, 8, 1,65, 1,0)**

(a) V přirozených číslech vyřešte soustavu kongruencí (2 BODY)

$$x \equiv 1 \pmod{2^y},$$
$$y \equiv 1 \pmod{2^z},$$
$$z \equiv 1 \pmod{2^x}.$$

(b) Vyřešte v přirozených číslech jinou soustavu kongruencí: (3 BODY)

$$2^y \equiv 1 \pmod{x},$$
$$2^z \equiv 1 \pmod{y},$$
$$2^x \equiv 1 \pmod{z}.$$

(a) Dokažme nejprve, že nějaké z čísel je rovno 1. Co by se stalo v opačném případě, tedy kdyby všechna byla aspoň 2? Pak 2^y dělí přirozené číslo $x-1$, takže musí platit nerovnost $2^y \leq x-1$. Z podobného důvodu platí i nerovnosti $2^z \leq y-1$ a $2^x \leq z-1$. Sečtením všech tří zjistíme, že nutně $2^x + 2^y + 2^z \leq x + y + z - 3$. Pro libovolné přirozené číslo n ale platí nerovnost $2^n > n$ (můžeš ji zkusit dokázat matematickou indukcí), takže $2^x + 2^y + 2^z > x + y + z$, což není možné.

Aspoň jedno z čísel je tedy 1. Uvažovaná soustava je symetrická vůči **cyklické** záměně neznámých,[10] búno[11] tedy můžeme předpokládat, že $z = 1$. Pak z druhé kongruence vyplývá, že $y \equiv 1 \pmod 2$, takže existuje nezáporné číslo k takové, že $y = 2k + 1$. A z první kongruence nakonec dostaneme, že existuje nezáporné číslo l takové, že $x = 2^{2k+1}l + 1$. Jak každý snadno ověří, trojice $(2^{2k+1}l + 1, 2k + 1, 1)$ řeší danou kongruenci; jejími řešeními jsou i trojice, které dostaneme cyklickou záměnou: $(1, 2^{2k+1}l + 1, 2k + 1)$ a $(2k + 1, 1, 2^{2k+1}l + 1)$.

(b) Opět nejdříve dokážeme, že nějaké z čísel je rovno 1. Pro spor předpokládejme, že soustava má nějaké řešení takové, že všechna čísla jsou větší než 1. Uvažujme to, pro něž je hodnota součinu xyz nejmenší.[12] Nejprve si uvědomme, že čísla x, y a z jsou zřejmě lichá, a tedy nesoudělná s 2. Podle Eulerovy věty (viz úvod k 5. sérii) potom platí, že $2^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod n$ (n je libovolné z čísel x, y a z), takže existuje nějaké přirozené číslo k takové, že $2^k \equiv 1 \pmod n$. Označme $a(n)$ nejmenší ze všech takovýchto přirozených čísel. Není těžké si potom uvědomit, že $a(n)$ dělí libovolné k takové, že $2^k \equiv 1 \pmod n$ a že $a(n) < n$.

Potom[13] $a(x)|y$, $a(y)|z$ a $a(z)|x$ a $2^{a(x)} \equiv 1 \pmod x$, takže $2^{a(x)} \equiv 1 \pmod{a(z)}$. Obdobně platí i $2^{a(y)} \equiv 1 \pmod{a(x)}$ a $2^{a(z)} \equiv 1 \pmod{a(y)}$. Tím jsme ovšem našli trojici $(a(z), a(x), a(y))$, která také řeší zadanou soustavu. Přitom ale $a(x)a(y)a(z) < xyz$, což je spor s volbou čísel x, y a z.

Aspoň jedno z čísel je tedy 1. Dosazením do zadání potom ihned zjistíme, že i zbývající dvě čísla jsou rovna 1. Snadno ověříme, že trojice $(1, 1, 1)$ vskutku je řešení. Je to tedy jediné řešení zadané soustavy kongruencí.

Poznámky k došlým řešením: Chtěl bych jen ještě jednou zdůraznit častou chybu, jíž jste se, milí řešitelé, dopouštěli v části (a). Šlo o tvrzení, že daná soustava je symetrická. To bohužel není pravda. Aby byla symetrická, nesměla by se změnit při žádném přeházení (vznešeně se tomu říká permutace) neznámých x, y a z. Ovšem zaměníme-li navzájem x a y, dostaneme jinou soustavu (je sice podobná, ale ne stejná).

Toto pak často vedlo k tomu, že když jste správně našli například řešení $(2^{2k+1}l+1, 2k+1, 1)$, prohlásili jste, že potom už jsou i všechny permutace řešením. To ale neplatí – třeba $(9, 3, 1)$ soustavu řeší, ale $(3, 9, 1)$ ne! Můžete si tu povšimnout, že zkouška, zda nalezená řešení řešeními vskutku jsou, občas není zcela zbytečná ... Já jsem za to sice body téměř nestrhával, ale třeba v matematické olympiádě by vás takovéto hlouposti přišly docela draho.

6. úloha **(31, 31, 2, 23, 2, 0)**

(a) Na papíře jsou dány dva různé body A a B. Napřehýbejte body C a D tak, aby úsečka CD byla hranou krychle, která má osmkrát větší objem než krychle s hranou AB. Nesmíte přitom

[10] To znamená, že pokud nahradíme neznámou x neznámou y, y nahradíme z a místo z budeme psát x, soustava se nezmění. Není ale pravda, že neznámé můžeme navzájem zaměňovat libovolně! Viz poznámku opravovatele.

[11] bez újmy na obecnosti

[12] To je velmi užitečný trik. Objevil jej francouzský matematik Pierre de Fermat (žil v letech 1601 až 1665) a často se mu říká nekonečný sestup nebo zmenšování ad absurdum. V původní verzi vypadá tak, že z předpokladu existence libovolného řešení dokážeme, že musí existovat i (v nějakém smyslu) menší řešení. Z tohoto ovšem můžeme odvodit další, ještě menší řešení, a tak dále. Protože ale neexistuje nekonečná klesající posloupnost přirozených čísel, dostáváme spor.

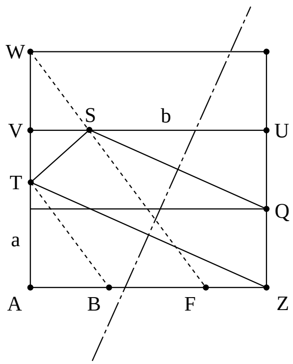
[13] Ta svislá čára uprostřed je zkratkou za slovo dělí. Píšeme tedy $a|b$, jestliže a dělí b.

používat „obtiskávání“ bodů ani vícenásobné přehýbání papíru (tedy postup, kdy papír přehneme a přehnutý ho přehneme znovu). (2 BODY)

(b) Na papíře jsou dány dva různé body A a B. Napřehýbejte body E a F tak, aby úsečka EF byla hranou krychle, která má dvakrát větší objem než krychle s hranou AB. Můžete používat veškeré prostředky povolené v šesté sérii. (3 BODY)

(a) Chceme krychli s osmkrát větším objemem, tedy s dvakrát delší hranou. Veďme podle (A1) přímku p body A a B. Dále si zvolme libovolný bod X mimo tuto přímku (tedy přehneme náhodně dvě přímky a vezmeme jejich průsečík) a podle (A1) sestrojme přímku q body A, X. Nyní aplikujme (A2) na A a X, průsečík vzniklého přehybu s q nechť je Y. Jsme tedy v situaci, kdy $|AX| = 2|AY|$. Přehněme proto podle (A1) přímku r body Y a B, poté podle (A4) kolmici s na r bodem X a podle téhož axiomu ještě kolmici t k s bodem X (tedy t je rovnoběžná s r a prochází X). Průsečík p a t označme C. Z podobnosti trojúhelníků AXC a AYB plyne, že $|AC| = 2|AB|$, což jsme chtěli (ještě si pojmenujeme bod A jako D, abychom dostali úsečku CD). Všimněte si, že tento postup lze úspěšně aplikovat na sestrojení libovolného racionálního násobku zadané délky.

(b) V této části se pokusíme provést zdvojení krychle, problém, který není řešitelný kružítkem a pravítkem. Z osmé úlohy šesté série už víme, že to pro nás nemusí být nepřekonatelná překážka, a také bychom mohli mít dojem, že se uplatní síla axiomu (A6). A tento dojem je správný :).



Chceme tedy sestrojit úsečku délky $\sqrt[3]{2}|AB|$. Proveďme konstrukci jako na obrázku. Prohlásíme $|AB|$ za jednotku a vybudujeme čtverec o straně délky 3 (umíme kolmice a můžeme obtiskávat, takže žádný problém, navíc díky tomu, že začínáme délkou jedna, snadno docílíme rozdělení stran čtverce na třetiny). Po této triviální přípravě přijde rozhodující krok – přehyb podle (A6) takový, že bod Z bude na přímce AW a bod Q na přímce UV. A to je vlastně vše, teď nahlédneme, že $|WT|/|TA| = \sqrt[3]{2}$, odtud už je k řešení malý krůček, budeme vlastně postupovat jako v případě (a).

Označme si jako na obrázku $a = |AT|$, $b = |US|$. Z Pythagorovy věty pro trojúhelník SVT máme $(2-a)^2 + (3-b)^2 = 1$, z podobnosti ZAT a SUQ pak máme $a/3 = 1/b$, tedy $a = 3/b$. Když toto dosadíme do první rovnosti, dostaneme po snadných úpravách

$$a^4 - 3a^3 + 12a^2 - 18a + 9 = 0.$$

A co dál? Tak předně můžeme uhodnout řešení $a = 1$, které nám však nevyhovuje, a rovnici vydělit výrazem $a - 1$, dostáváme

$$a^3 - 3a^2 + 9a - 9 = 0.$$

A co s touto rovnicí? No, silnější povahy zkusí vzorce pro řešení kubické rovnice, případně si na to zavolají nějaký matematický program. My však budeme chytřejší, víme totiž, co chceme, aby nám vyšlo.

Chceme přece dokázat, že

$$\frac{3-a}{a} = \sqrt[3]{2},$$

tedy že

$$a = \frac{3}{1+\sqrt[3]{2}}.$$

Dosadíme-li toto do naší rovnice, vyjde nám, že skutečně jde o řešení (k tomuto bych už matematický program doporučil), vydělíme-li potom rovnici příslušným členem $(x - 3/(1+\sqrt[3]{2}))$, dostaneme kvadratickou rovnici, která už nemá řešení v reálných číslech. Tím je naše tvrzení dokázáno.

Zbývá už jen maličkost. Veďme podle (A1) přímku body T, B a k této přímce rovnoběžku x bodem W, průsečík x a AB budiž F. Nyní

$$\frac{|BF|}{|AB|} = \frac{|AF|-|AB|}{|AB|} = \frac{|AF|}{|AB|} - 1 = \frac{|AW|}{|AT|} - 1 = \frac{|TW|+|AT|}{|AT|} - 1 = \frac{|TW|}{|AT|} + 1 - 1 = \sqrt[3]{2},$$

tedy označením $E = B$ dostáváme $|EF| = \sqrt[3]{2}|AB|$.

Poznámky k došlým řešením: Téměř všechna správná řešení první části spočívala v konstrukci dvou čtverců vedle sebe (či aspoň jejich pro úlohu podstatných částí), myšlenku vzorového řešení použil pouze *Daniel Petrík.*

V druhé části se pak vyskytla pouze dvě správná řešení, obě využívající toho, že ohyb podle (A6) sestrojí tečnu společnou dvěma parabolám – dané body jsou ohniska a dané přímky řídící přímky.

7. úloha **(17, 10, 1,82, 2,0)**

(a) Nechť $f : \langle 0,1\rangle \to \mathbb{R}$ je funkce taková, že je ji možné napsat jako součet nerostoucí a neklesající funkce. Dokažte, že potom existuje konstanta c (závisející pouze na zvolené funkci f) taková, že kdykoliv si vybereme čísla $0 \le d_1 < d_2 < \dots < d_n \le 1$ (n je libovolné), potom výraz

$$|f(d_1) - f(d_2)| + |f(d_2) - f(d_3)| + \dots + |f(d_{n-1}) - f(d_n)|$$

je menší nebo roven[14] c. (2 BODY)

(b) Nechť $f : \langle 0,1\rangle \to \mathbb{R}$ je funkce definovaná

$$f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right),\ x \in (0,1\rangle,$$

[14]Nenech se odradit trochu odstrašujícím zadáním této úlohy, je ve skutečnosti jednoduchá. Pokud Ti nepůjde vymyslet řešení pro obecnou funkci f, zkus úlohu alespoň vyřešit pro f neklesající či nerostoucí, dostaneš od nás bod.

$$f(0) = \frac{1}{2}.$$

Nechť g vznikne z f zúžením na interval $(0,1)$. Rozhodněte, zda je možné funkci f, resp. g zapsat jako součet neklesající a nerostoucí funkce (samozřejmě na intervalech, na kterých jsou definované). (3 BODY)

(c) (pro náročnější) Nechť $f : \langle 0,1\rangle \to \mathbb{R}$ je funkce taková, že kdykoliv si vybereme čísla $0 \le d_1 < d_2 < \cdots < d_n \le 1$, potom

$$|f(d_1) - f(d_2)| + |f(d_2) - f(d_3)| + \cdots + |f(d_{n-1}) - f(d_n)| < 2005.$$

Dokažte, že je možné funkci f napsat jako součet nerostoucí a neklesající funkce.

(a) Nejprve si vyjádřeme $f = g + h$, kde g je nerostoucí a h je neklesající funkce. Dopředu prozradíme, že naše konstanta c bude rovna $g(0) - g(1) + h(1) - h(0)$ (všimni si, že $g(0) - g(1)$ a $h(1) - h(0)$ jsou nezáporná čísla vzhledem k předpokládaným vlastnostem f a g).

Odhadněme nejprve výraz $|f(d_i) - f(d_{i+1})|$:

$$|f(d_i) - f(d_{i+1})| = |g(d_i) + h(d_i) - g(d_{i+1}) - h(d_{i+1})| \le$$

$$|g(d_i) - g(d_{i+1})| + |h(d_i) - h(d_{i+1})| = g(d_i) - g(d_{i+1}) + h(d_{i+1}) - h(d_i).$$

V nerovnosti jsme použili takzvanou trojúhelníkovou[15] nerovnost $|a+b| \le |a| + |b|$, kde a, b jsou reálná čísla, její platnost si snadno ověříš vyzkoušením několika možností. Závěrečná rovnost plyne z toho, že g je nerostoucí a h neklesající.

S využitím tohoto odhadu dostáváme:

$$\sum_{i=1}^{n-1} |f(d_i) - f(d_{i+1})| \le \sum_{i=1}^{n-1} g(d_i) - g(d_{i+1}) + h(d_{i+1}) - h(d_i) =$$

$$= g(d_1) - g(d_n) + h(d_n) - h(d_1) \le g(0) - g(1) + h(1) - h(0),$$

což jsme chtěli dokázat. V poslední nerovnosti jsme opět využívali toho, že g je nerostoucí a h je neklesající.

(b) Funkci f tak zapsat nelze, důkaz provedeme s pomocí části (a). Zvolíme dělení $0 \le d_1 < d_2 < \cdots < d_n \le 1$ tak, že

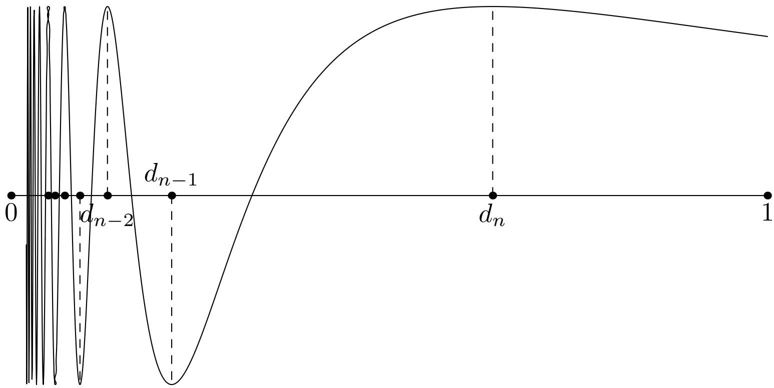
$$d_j = \frac{1}{(2(n-j)+0.5)\pi}.$$

Potom $f(d_j) = \pm 1$. Přitom se plusy a minusy střídají, tedy $|f(d_i) - f(d_{i+1})| = 2$. Tedy

$$\sum_{i=1}^{n-1} |f(d_i) - f(d_{i+1})| = 2(n-1),$$

tedy tento výraz nelze omezit žádnou konstantou závisející jenom na funkci f. Podle části (a) pak f nemůže být součtem nerostoucí a neklesající funkce.

[15] Název trojúhelníková je odvozen od degenerovaného trojúhelníku v $\mathbb{R}$ s vrcholy v číslech 0, a a $-b$.



Na druhou stranu, funkci g tak zapsat lze. Toto trochu podivné tvrzení má základ v tom, že je velmi důležité, že interval $\langle 0,1\rangle$ z části (a) je uzavřený.

Budeme se snažit vyjádřit $g = u + v$, kde u je nerostoucí a v je neklesající funkce. Funkce $g(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ je pro $k \in \mathbb{N}_0$ na intervalech

$$\left\langle \frac{1}{(2k+1.5)\pi}, \frac{1}{(2k+0.5)\pi} \right\rangle$$

rostoucí. Myšlenka řešení spočívá v tom, že u na těchto intervalech bude konstantní a $v(x)$ bude $g(x) - u(x)$. Podobně je g pro $k \in \mathbb{N}$ na intervalech

$$\left\langle \frac{1}{(2k+0.5)\pi}, \frac{1}{(2k-0.5)\pi} \right\rangle$$

a na intervalu $\left\langle \frac{1}{0.5\pi}, 1\right\rangle$ klesající. Tady bude v konstantní a $u(x)$ bude $g(x) - v(x)$.

Konkrétně stačí na intervalu

$$\left\langle \frac{1}{(2k+1.5)\pi}, \frac{1}{(2k+0.5)\pi} \right\rangle$$

zvolit $u(x) = 2k+1$, $v(x) = g(x) - (2k+1)$, na intervalu

$$\left\langle \frac{1}{(2k+0.5)\pi}, \frac{1}{(2k-0.5)\pi} \right\rangle$$

pak $v(x) = -2k$ a $u(x) = g(x) + 2k$ a konečně na intervalu $\left\langle \frac{1}{0.5\pi}, 1\right\rangle$ zvolíme $v(x) = 0$ a $u(x) = g(x)$. Snadno si ověříš, že u je nerostoucí a v je neklesající.

Všimni si, že rozdíl oproti předchozí situaci spočívá v tom, že nemusíme funkce u a v definovat v nule.

(c) V této části nebudeme řešit všechny technické detaily, pouze nastíníme myšlenku řešení. Nejprve si pro reálné číslo x označme

$$x_+ = \max(x, 0) = \frac{|x| + x}{2}$$

a

$$x_- = \max(-x, 0) = \frac{|x| - x}{2}.$$

Potom platí vztahy $x_+ + x_- = |x|$ a $x_+ - x_- = x$, obě čísla x_+ a x_- jsou nezáporná (nejvýše jedno z nich kladné).

Nyní ještě řekneme pár slov o supremu množiny a infimu množiny. Nechť A je neprázdná shora omezená podmnožina reálných čísel. Potom existuje[16] nejmenší číslo s takové, že pro každé $a \in A$ platí že $s \geq a$. Tomuto číslu se říká supremum množiny A a značí se $\sup A$. Pojem suprema zobecňuje maximum množiny. Například $\sup\langle 0, 1\rangle = \max\langle 0, 1\rangle = 1$, na druhou stranu $\sup(0, 1) = 1$, zatímco $\max(0, 1)$ neexistuje. Podobně se pro B neprázdnou zdola omezenou množinu definuje $\inf B$ jako největší číslo takové, které je menší než libovolný prvek z B. Infimum zobecňuje minimum.

Nyní se budeme snažit zapsat f jako $g + h$, kde g je nerostoucí h je neklesající. Zvolíme si $g(0) = h(0) = 0$. Dále budeme chtít určit $g(x)$ a $h(x)$. Zvolíme si dělení $D = (d_1, d_2, \ldots, d_n)$, kde $0 \leq d_1 < d_2 < \cdots < d_n \leq x$, raději ještě jednou upozorníme, že $d_n \leq x$. Pro toto dělení označíme

$$P(D) = (d_2 - d_1)_+ + (d_2 - d_3)_+ + \cdots (d_n - d_{n-1})_+,$$

vzhledem k předpokladům zadání je $P(D) < 2005$. Potom zvolíme

$$h(x) = \sup\{P(D)|D \text{ je dělení takové, že } d_n \leq x\}.$$

Tady se tedy využívá předpoklad ze zadání, aby ono supremum existovalo. Podobně se zavede

$$N(D) = (d_2 - d_1)_- + (d_2 - d_3)_- + \cdots (d_n - d_{n-1})_-,$$

zvolí se

$$g(x) = -\sup\{N(D)|D \text{ je dělení takové, že } d_n \leq x\}.$$

Poměrně snadno se dá nahlédnout, že h je neklesající a g nerostoucí. O něco těžší je dokázat, že $f = g + h$. Tento důkaz je především technický, proto ho zde nebudeme uvádět, můžeš si ho zkusit rozmyslet pro nějaké konkrétní „hezké“ funkce f.

[16] Důkaz existence vynecháme, silně totiž souvisí s tím, jak se definují reálná čísla.