1. seriálová série

Téma: Matematická biologie

Termín odeslání: 3. ledna 2005

1. úloha (5 bodů)

Uvažujme věkově strukturovanou populaci obsahující mladší jedince, jejich počet v čase t označíme N_t^0, a starší jedince, jejichž počet v čase t označíme N_t^1. Nechť v čase $t = 0$ máme 28 mladších jedinců a jednoho staršího jedince a nechť se vývoj populace řídí podle následujícího Leslieho modelu:

$$N_{t+1}^0 = N_t^0 + 4N_t^1,$$
$$N_{t+1}^1 = 0{,}5N_t^0.$$

Nalezněte počty mladších a starších jedinců v čase $t = 10$, $t = 100$ a v libovolném čase t s využitím metody ze seriálu.

2. úloha (5 bodů)

(a) Uvažujte diferenční rovnici $N_{t+1} = 50 + \frac{N_t}{2}$. Najděte pevný bod této diferenční rovnice. Je tento pevný bod globálně stabilní?
(b) Pro libovolné C nalezni všechny pevné body diferenční rovnice $N_{t+1} = 100 + C(N_t - 100)$.
(c) Pro každý pevný bod z části (b) rozhodni, zda-li je globálně stabilní.

3. úloha (5 bodů)

Uvažujme systém dvou soupeřících organismů, jejichž počty v čase t si označíme N_t a M_t. Předpokládejme, že se počty N_t a M_t vyvíjejí dle následujícího systému diferenčních rovnic:

$$N_{t+1} = \frac{N_t}{M_t + 1} + \frac{1}{M_t + 1},$$
$$M_{t+1} = \frac{M_t}{N_t + 1} + \frac{1}{N_t + 1}.$$

Nalezněte co nejvíce počátečních podmínek N_0 a M_0 takových, že druhá populace M_t dříve nebo později vyhyne. Zde slovo vyhynutí znamená, že hodnota M_t je od nějakého času menší než 1.

Úlohy první série pro Tebe připravili Martin Tancer (1, 8), Víťa Kala (3, 4, 6, 7) a Saša Kazda (5). Úloha číslo 2 je dílem kolektivním, nemá konkrétního autora. Vzorová řešení sepsali zadávající, řešení druhé úlohy pak Martin Tancer.

Úlohy první série opravovali (řazeno podle opravované úlohy) Milan Benda, Petra Valešová, Alenka Drábková, Martin „Tritas“ Dungl, Saša Kazda, Michal Hroch, Víťa Kala a Honza Kynčl.

2. seriálová série

Téma: Matematická biologie

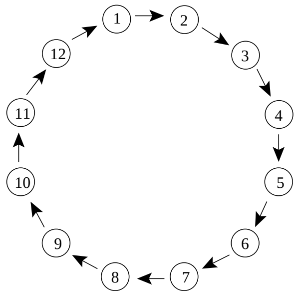
Termín odeslání: 21. března 2005

4. úloha (5 bodů)

Uvažuj, že můžeš libovolně vytvořit molekulu RNA o délce maximálně 300 nukleotidů. Kolik různých proteinů (posloupností aminokyselin) můžeš překladem informace obsažené v RNA získat?

5. úloha (5 bodů)

Uvažuj graf o 12 vrcholech označených 1 až 12 daný následujícím obrázkem.



Rozdej každému z vrcholů jedno z pravidel Identita, Inverze, Nula a Jedna tak, aby výsledný graf měl cyklus (periodické řešení) s největší možnou délkou. Své řešení zdůvodni.

6. úloha (5 bodů)

a) Jaké jsou všechny možné délky cyklů (periodických řešení) pro graf z příkladu 5 pro všechny možné volby pravidel pro vrcholy?

b) Jaké nejdelší periodické řešení může mít obecný graf o N vrcholech, kde do každého vrcholu míří jen jedna hrana, tj. graf, jehož vrcholy mají stavy řídící se pravidly Identita, Inverze, Nula a Jedna?

Druhou sérii zadali Martin Tancer (1, 2, 4, 5, 7, 8) a Víťa Kala (3, 6).

Úlohy druhé série opravovali (řazeno podle opravované úlohy) Jiří Koula, Ben Vejnar, Pepa Křišťan, Honza Kynčl, Marek Tesař, Víťa Kala, Martin Tancer a Anša Lauschmannová.

3. seriálová série

Téma: Matematická biologie

Termín odeslání: 30. května 2005

7. úloha (5 bodů)

Předpokládej, že adenovirus má tvar pravidelného dvacetistěnu o průměru[1] 90 nm. Jaký je jeho povrch? Svou odpověď zdůvodni.

8. úloha (5 bodů)

Předpokládej, že virus má tvar koule o průměru 90 nm. Máš k dispozici kroužky (molekuly) o průměru 1 nm, kterými chceš zakrýt jeho povrch. Předpokládej, že se kroužky nemohou překrývat. Jakou maximální část povrchu viru můžeš kroužky zakrýt?

9. úloha (5 bodů)

Zjednodušme si problém o jednu prostorovou dimenzi. Uvažujme kružnici o průměru 90 nm, kterou se snažíme zakrýt malými interválky o délce π nm.

(a) Jakou maximální a minimální část povrchu kružnice můžou vzájemně se nepřekrývající interválky zakrýt (tak, že už není možné přidat další interválek, aby se nepřekrýval s již umístěnými)?

(b) Uvažuj, že intervaly jsou pokládány na kružnici náhodně. Interval je položen, jen pokud se v náhodně zvoleném místě nepřekrývá s již položenými intervaly. Tento postup je opakován až do chvíle, kdy už na kružnici není volná mezera pro nějaký další interval, a poté spočítáme celkový pokrytý povrch kružnice. Jakou část povrchu kružnice interválky v průměru zakrývají? To znamená: Pokud zopakuješ pokrývání kružnice mnohokrát a pro každé pokrytí spočítáš zakrytou část povrchu kružnice – jaký bude jejich průměr? Svou odpověď zdůvodni.

Úlohy třetí série zadali Víťa Kala (1, 3, 4, 5, 7) a Martin Tancer (2, 6, 8), vzorová řešení sepsali zadávající.

Úlohy třetí série opravovali postupně Saša Kazda, Marek Tesař, Martin Dungl, Michal Hroch, Ben Vejnar, Pepa Křišťan, Víťa Kala a Martin Tancer.

[1] Přesněji, průměr koule opsané dvacetistěnu je 90 nm.

Řešení 1. seriálové serie

1. úloha
Uvažujme věkově strukturovanou populaci obsahující mladší jedince, jejichž počet v čase t označíme N_t^0, a starší jedince, jejichž počet v čase t označíme N_t^1. Nechť v čase $t = 0$ máme 28 mladších jedinců a jednoho staršího jedince a nechť se vývoj populace řídí podle následujícího Leslieho modelu:

$$\begin{aligned} N_{t+1}^0 &= N_t^0 + 4N_t^1, \\ N_{t+1}^1 &= 0{,}5N_t^0. \end{aligned}$$

Nalezněte počty mladších a starších jedinců v čase $t = 10$, $t = 100$ a v libovolném čase t s využitím metody ze seriálu.

Nejprve najdeme vlastní čísla modelu, řešíme tedy soustavu rovnic

$$\begin{aligned} \lambda N_0^0 &= N_0^0 + 4N_0^1, \\ \lambda N_0^1 &= 0{,}5N_0^0, \end{aligned}$$

což upravíme na

$$\begin{aligned} (\lambda - 1)N_0^0 - 4N_0^1 &= 0, \\ -0{,}5N_0^0 + \lambda N_0^1 &= 0. \end{aligned}$$

Jedna rovnice musí být násobkem druhé, což vede na rovnici $(\lambda - 1)\lambda = 2$, což je kvadratická rovnice s řešeními 2 a -1. Pro vlastní číslo 2 najdeme z první rovnice vlastní vektor např. $(4, 1)$, pro vlastní číslo -1 pak vlastní vektor $(2, -1)$. Obecné řešení je tedy tvaru

$$\begin{aligned} N_t^0 &= C_1 \cdot 2^t \cdot 4 + C_2 \cdot (-1)^t \cdot 2, \\ N_t^1 &= C_1 \cdot 2^t + C_2 \cdot (-1)^t \cdot (-1). \end{aligned}$$

Konstanty C_1 a C_2 odvodíme z počátečních podmínek: dosazením obdržíme soustavu:

$$28 = N_0^0 = 4C_1 + 2C_2, \quad 1 = C_1 - C_2.$$

Řešením této soustavy je $C_1 = 5$, $C_2 = 4$, proto počty jedinců v čase t jsou

$$\begin{aligned} N_t^0 &= 20 \cdot 2^t + 8 \cdot (-1)^t, \\ N_t^1 &= 5 \cdot 2^t - 4 \cdot (-1)^t. \end{aligned}$$

Pro $t = 10$ tak dostaneme $(N_{10}^0, N_{10}^1) = (20488, 5116)$ a pro $t = 100$ potom máme přibližně $(N_{100}^0, N_{100}^1) = (2{,}5 \cdot 10^{31}, 6{,}3 \cdot 10^{30})$.

2. úloha

(a) Uvažujte diferenční rovnici $N_{t+1} = 50 + \frac{N_t}{2}$. Najděte pevný bod této diferenční rovnice. Je tento pevný bod globálně stabilní?

(b) Pro libovolné C nalezněte všechny pevné body diferenční rovnice $N_{t+1} = 100 + C(N_t - 100)$.

(c) Pro každý pevný bod z části (b) rozhodněte, zdali je globálně stabilní.

(a) Je-li x pevný bod zadané diferenční rovnice, musí platit $x = 50 + \frac{x}{2}$. Řešením této rovnice je pak $x = 100$. Nahlédneme, že tento bod je globálně stabilní. Je-li $N_t < 100$, potom

$$N_{t+1} = 50 + \frac{N_t}{2} > \frac{N_t}{2} + \frac{N_t}{2} = N_t,$$
$$N_{t+1} = 50 + \frac{N_t}{2} < 50 + 50 = x,$$

Co z toho plyne? Posloupnost hodnot N_t začínající nějakým $N < 100$ bude stále růst, avšak vždy bude menší než 100. Z toho plyne, že se musí zdola blížit k nějakému číslu. V našem případě máme pouze jednoho kandidáta na limitu – pevný bod $x = 100$, takže posloupnost N_t se zdola blíží k x. Je-li naopak $N_t > 100$, budou platit přesně opačné nerovnosti a posloupnost se k x bude blížit shora.

(b) Mějme konkrétní C, potom pevný bod x splňuje rovnici $x = 100 + C(x - 100)$, jejímž řešením je $x = 100$ pro $C \neq 1$ a x libovolné pro $C = 1$. Pro $C = 1$ je proto pevným bodem každé reálné číslo, pro $C \neq 1$ je pevným bodem vždy číslo 100.

(c) Je-li $C = 1$, zřejmě žádný z pevných bodů není globálně stabilní. Buď $C > 1$ a $N_t > 100$, potom

$$N_{t+1} = 100 + C(N_t - 100) = N_t + (C - 1)(N_t - 100) > N_t,$$

posloupnost N_t tedy poroste a pevný bod 100 proto není pro $C > 1$ globálně stabilní.

Buď nyní $C < -1$. Potom

$$N_{t+2} = 100 + C(N_{t+1} - 100) = 100 + C(100 + C(N_t - 100) - 100) = 100 + C^2(N_t - 100),$$

tedy použijeme-li stejný argument jako výše, dostaneme, že pro $N_t > 100$ je $N_{t+2} > N_t$, podposloupnost $N_t, N_{t+2}, N_{t+4}, \dots$ bude rostoucí a pevný bod 100 tak pro $C < -1$ není globálně stabilní.

Teď se podívejme na $C = -1$. Potom nám rovnice přejde na $N_{t+1} = 200 - N_t$, tudíž $N_{t+2} = 200 - (200 - N_t) = N_t$ a posloupnost se proto nebude blížit k pevnému bodu pro žádné $N_t \neq 100$, tento pevný bod opět není globálně stabilní.

Zbývá nám možnost $C \in (-1, 1)$. Upravme si rovnici na $N_{t+1} = (1 - C) \cdot 100 + C \cdot N_t$. Všimněte si, že volbou $C = \frac{1}{2}$ dostaneme příklad (a). Zkusme tedy použít stejný postup: předpokládejme, že $C \in (0, 1)$. Buď $N_t > 100$, potom

$$N_{t+1} = (1 - C) \cdot 100 + C \cdot N_t > (1 - C) \cdot 100 + C \cdot 100 = 100,$$
$$N_{t+1} = (1 - C) \cdot 100 + C \cdot N_t < (1 - C) \cdot N_t + C \cdot N_t = N_t,$$

posloupnost N_t se proto blíží shora k pevnému bodu 100, pro $N_t < 100$ budou platit opačné nerovnosti a posloupnost půjde k 100 zdola, tedy 100 je globálně stabilní pevný bod.

Pro $C = 0$ máme rovnici $N_t = 100$ a posloupnost je tak rovna pevnému bodu počínaje druhým členem bez ohledu na počáteční podmínku, pevný bod je tedy globálně stabilní.

Nakonec buď $C \in (-1, 0)$. Nechť $N_t > 100$. Potom

$$N_{t+1} = (1 - C) \cdot 100 + C \cdot N_t < (1 - C) \cdot 100 + C \cdot 100 = 100,$$

zároveň jsme dříve ukázali, že

$$N_{t+2} = 100 + C^2(N_t - 100) = (1 - C^2) \cdot 100 + C^2 \cdot N_t.$$

Použijeme-li nyní stejný argument jako výše, vidíme, že posloupnost $N_t, N_{t+2}, N_{t+4}, \ldots$ jde k 100 shora a posloupnost $N_{t+1}, N_{t+3}, N_{t+5}, \ldots$ jde k 100 zdola, celkově tak posloupnost N_t jde k pevnému bodu 100. Pro $N_t < 100$ se jen prohodí nerovnosti, dostáváme tak, že pro $C \in (-1, 0)$ je 100 globálně stabilní pevný bod.

Shrneme-li předchozí odstavce, můžeme říct, že jediným globálně stabilním pevným bodem je číslo 100 a to právě pro $C \in (-1, 1)$.

Poznámky opravovatele: Hledání pevných bodů nedělalo většinou problémy, až na pár řešitelů, kteří si zřejmě nedostatečně prostudovali seriál, a další, kteří v části (b) nerozebrali zvlášť případ $C = 1$, a potom dělili nulou.

Několik řešitelů se snažilo v části (a) rozhodovat o globální stabilitě podobným způsobem, jaký je ve vzorovém řešení. Všichni napsali, že pro $N_t < 100$ platí $N_{t+1} > N_t$, ale až na výjimky už neuvedli, že i $N_{t+1} < 100$. To je ale důležitý předpoklad, protože to první platí např. i v části (c) pro $C = -1$, kdy ale 100 globálně stabilní není. Častějším (a přesnějším) způsobem bylo nalézt vyjádření N_t přímo pomocí N_0 a t. V části (c) se takto dostalo $N_t = 100 + C^t(N_0 - 100)$, což šlo snadno dokázat indukcí. Tím se úloha převedla na určení $\lim_{t\to\infty} C^t$.

Několik řešitelů si všimlo, že rovnice z části (a) je vlastně jen speciální případ rovnice z částí (b) a (c) pro $C = \frac{1}{2}$, a dostalo za to +i.

3. úloha

Uvažujme systém dvou soupeřících organismů, jejichž počty v čase t si označíme N_t a M_t. Předpokládejme, že se počty N_t a M_t vyvíjejí dle následujícího systému diferenčních rovnic:

$$\begin{aligned} N_{t+1} &= \frac{N_t}{M_t + 1} + \frac{1}{M_t + 1}, \\ M_{t+1} &= \frac{M_t}{N_t + 1} + \frac{1}{N_t + 1}. \end{aligned}$$

Nalezněte co nejvíce počátečních podmínek N_0 a M_0 takových, že druhá populace M_t dříve nebo později vyhyne. Zde slovo vyhynutí znamená, že hodnota M_t je od nějakého času menší než 1.

Označme si $N_0 = n$, $M_0 = m$. Zadané diferenční rovnice si můžeme přepsat jako

$$N_{t+1} = \frac{N_t + 1}{M_t + 1}, \quad M_{t+1} = \frac{M_t + 1}{N_t + 1}.$$

Zkusme se podívat na vývoj systému pro malá t:

$$N_1 = \frac{n+1}{m+1}, \quad M_1 = \frac{m+1}{n+1},$$

$$N_2 = \frac{\frac{n+1}{m+1} + 1}{\frac{m+1}{n+1} + 1} = \frac{\frac{n+1+m+1}{m+1}}{\frac{m+1+n+1}{n+1}} = \frac{n+1}{m+1},$$

obdobně $M_2 = \frac{m+1}{n+1}$. Vidíme tedy, že pro $t \geq 2$ je $N_t = N_1$ a $M_t = M_1$. Má-li populace M_t vyhynout, musí se tak stát v čase t_1. Ovšem $M_1 < 1$ právě tehdy, když $M_0 = m < n = N_0$.

Vidíme, že populace M_t vyhyne právě tehdy, když $M_0 < N_0$ (všimněte si, že situace je symetrická, tedy v případě $M_0 > N_0$ vyhyne N_t, v případě $M_0 = N_0$ je $M_t = N_t = 1$ pro $t \geq 1$).

Řešení 2. seriálové série

4. úloha

Uvažujte, že můžete libovolně vytvořit molekulu RNA o délce maximálně 300 nukleotidů. Kolik různých proteinů (posloupností aminokyselin) můžete překladem informace obsažené v RNA získat?

Jelikož tři písmena kódují jednu aminokyselinu, může mít výsledný protein maximálně 100 aminokyselin. Jelikož máme možnost vytvářet molekuly RNA libovolně, můžeme vytvořit všechny možné proteiny o délce 100 aminokyselin. Jelikož je kódovatelných celkem 20 aminokyselin, existuje teoreticky 20^{100} řetězců různě se opakujících dvaceti aminokyselin o délce sto. Jelikož může být kdekoliv v řetězci RNA také signál k přerušení překladu, máme možnost vytvořit i všechny možné řetězce o délce 99 aminokyselin, 98 aminokyselin, ... , až 1 aminokyseliny. Jejich počty jsou 20^{99}, 20^{98}, 20^{97}, ... , 20^{1}. Celkem můžeme tedy vytvořit

$$20^1 + 20^2 + 20^3 + \cdots + 20^{98} + 20^{99} + 20^{100}$$

posloupností aminokyselin, což po úpravě dává

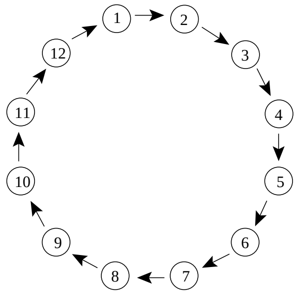
$$20^1 + 20^2 + 20^3 + \cdots + 20^{98} + 20^{99} + 20^{100} =$$

$$= 20(1 + 20^1 + 20^2 + \cdots + 20^{97} + 20^{98} + 20^{99}) =$$

$$= 20\frac{20^{100} - 1}{20 - 1} = \frac{20}{19}(20^{100} - 1).$$

5. úloha

Uvažujte graf o 12 vrcholech (označených 1 až 12) daný následujícím obrázkem.



Přiřaďte každému z vrcholů jedno z pravidel identita, inverze, nula a jedna tak, aby výsledný graf měl cyklus (periodické řešení) s největší možnou délkou. Své řešení zdůvodněte.

Pokud použijeme pravidla nula nebo jedna, pak výsledný graf nebude mít žádný cyklus. Přesněji řešení bude mít pevný bod, který bychom také mohli nazývat cyklem o délce jedna (rozmysli si!).

Abychom dostali graf s delším cyklem, musíme rozdat vrcholům jen pravidla identita a inverze. Uvažuj nyní následující pravidla pro vrcholy grafu: Pro vrchol 1 inverze, pro ostatní vrcholy identita. Zvolme za počáteční stav systému uspořádanou dvanáctici 111111111111 (zde první číslo značí hodnotu ve vrcholu 1, druhé hodnotu ve vrcholu 2 atd.). Pak stavy systému v následujících časových krocích jsou

011111111111, 001111111111, 000111111111, 000011111111, 000001111111, 000000111111,

000000011111, 000000001111, 000000000111, 000000000011, 000000000001, 000000000000,

100000000000, 110000000000, 111000000000, 111100000000, 111110000000, 111111000000,

111111100000, 111111110000, 111111111000, 111111111100, 111111111110, 111111111111.

Vidíme, že stav systému se poprvé opakuje po 24 krocích. Objevili jsme tudíž periodické řešení s periodou délky dvacet čtyři, tj. cyklus délky 24. Nyní si již stačí jen uvědomit, že delší cyklus nemůže existovat.

Zdůvodnění je následující: Má-li například vrchol 8 na počátku stav 0, pak informace o tomto stavu „projde“ grafem postupně přes vrcholy 9, 10, 11, 12, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 a 8 a po 12 časových krocích se tato informace „vrátí“ zpět do vrcholu číslo 8. Při každém kroku se buď stav zachová (pokud je v daném vrcholu identita), nebo otočí (pokud je v příslušném vrcholu inverze). Po dvanácti krocích se tedy vrátí do vrcholu s číslem 8 buď stav 0 (pokud je v grafu sudý počet pravidel inverze) nebo stav 1 (pokud je inverzí lichý počet). Pokud se tam vrátil stav 0, pak po dalších dvanácti časových krocích se musí opět vrátit do vrcholu s číslem 8 stav 0. Pokud se naopak do vrcholu s číslem 8 vrátil opačný stav 1, pak dvanáct časových kroků prohazuje nulu na jedničku a ze symetrie též jedničku na nulu. Tedy po dalších dvanácti časových krocích se do vrcholu s číslem 8 vrátí opět stav 0. Stejnou úvahu můžeme udělat pro libovolný jiný vrchol. Tudíž jsme ukázali, že po 24 časových krocích se řešení (v případě pravidel inverze a identita ve vrcholech) musí vždy opakovat. Tedy graf může mít maximální cyklus délky 24.

Výše uvedený cyklus měl délku 24, tedy jsme ukázali, že je maximální možný.

6. úloha

(a) Jaké jsou všechny možné délky cyklů (periodických řešení) pro graf z příkladu 5 pro všechny možné volby pravidel pro vrcholy?

(b) Jaké nejdelší periodické řešení může mít souvislý[2] graf o N vrcholech, kde do každého vrcholu míří právě jedna hrana, tj. graf, jehož vrcholy mají stavy řídící se pravidly identita, inverze, nula a jedna?

Pokud nějaký vrchol obsahuje pravidlo jedna nebo pravidlo nula, pak má graf pevný bod (který bychom mohli považovat za cyklus délky 1). Dále ukážeme, že existují cykly délky 2, 3, 4, 6, 8, 12 a 24. Příklady takových cyklů jsou dány zde:

Cyklus délky 2. Každému z vrcholů přiřadíme pravidlo inverze. Při počátečních hodnotách 111111111111 obdržíme cyklus

000000000000, 111111111111.

Cyklus délky 3. Vrcholům 1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11 přiřadíme pravidlo inverze, vrcholům 3, 6, 9, 12 pravidlo identita. Pro počáteční stav 111111111111 obdržíme cyklus

001001001001, 010010010010, 111111111111.

Cyklus délky 4. Vrcholům 1, 3, 5, 7, 9, 11 přiřadíme pravidlo inverze, vrcholům 2, 4, 6, 8, 10, 12 pravidlo identita. Při počátečním stavu 111111111111 obdržíme cyklus

010101010101, 000000000000, 101010101010, 111111111111.

Cyklus délky 6. Vrcholům 1, 4, 7, 10 přiřadíme pravidlo inverze, vrcholům 2, 3, 5, 6, 8, 9, 11, 12 pravidlo identita. Při počáteční hodnotě 111111111111 obdržíme cyklus

011011011011, 001001001001, 000000000000, 100100100100, 110110110110, 111111111111.

Cyklus délky 8. Vrcholům 1, 5, 9 přiřadíme pravidlo inverze, vrcholům 2, 3, 4, 6, 7, 8, 10, 11, 12 pravidlo identita. Při počáteční podmínce 111111111111 obdržíme cyklus

011101110111, 001100110011, 000100010001, 000000000000,

---

[2]Souvislý graf je takový, že z každého vrcholu se lze po hranách dostat do každého, přičemž můžeme jít i proti směru šipek. V teorii grafů takové souvislosti říkáme *slabá*.

$$100010001000,\ 110011001100,\ 111011101110,\ 111111111111.$$

Cyklus délky 12. Vrcholům 1, 7 přiřadíme pravidlo inverze, vrcholům 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 12 pravidlo identita. Při počáteční podmínce 111111111111 obdržíme cyklus

$$011111011111,\ 001111001111,\ 000111000111,\ 000011000011,\ 000001000001,\ 00000000000,$$

$$100000100000,\ 110000110000,\ 111000111000,\ 111100111100,\ 111110111110,\ 111111111111.$$

Cyklus délky 24. Vrcholu 1 přiřadíme pravidlo inverze, ostatním pravidlo identita. Při počáteční podmínce 111111111111 obdržíme cyklus

$$011111111111,\ 001111111111,\ 000111111111,\ 000011111111,\ 000001111111,\ 000000111111,$$

$$000000011111,\ 000000001111,\ 000000000111,\ 000000000011,\ 000000000001,\ 000000000000,$$

$$100000000000,\ 110000000000,\ 111000000000,\ 111100000000,\ 111110000000,\ 111111000000,$$

$$111111100000,\ 111111110000,\ 111111111000,\ 111111111100,\ 111111111110,\ 111111111111.$$

Ukázali jsme tedy, že existují cykly délky 2, 3, 4, 6, 8, 12 a 24. Zbývá ukázat, že jiné cykly existovat nemohou. K tomu si všimněme, že délky všech nalezených cyklů dělí číslo 24. Pokud by existoval cyklus o délce k, která není dělitelem čísla 24, musí být $k < 24$, neboť jsme v řešení páté úlohy ukázali, že se řešení bude vždy opakovat (pro pravidla inverze a identita) po maximálně 24 časových krocích.

Uvažujme nyní, že k není dělitelem 24 a k je nejmenší možná délka (perioda) daného cyklu. Potom se ovšem stav bude opakovat po k časových krocích, $2k$ časových krocích, $3k$ časových krocích, atd. Stav se bude také opakovat po $\lfloor \frac{24}{k} \rfloor k$ časových krocích, kde $\lfloor \frac{24}{k} \rfloor$ značí celou část podílu $\frac{24}{k}$. To ovšem znamená, že se stav bude rovněž opakovat po $d = 24 - \lfloor \frac{24}{k} \rfloor k$ časových krocích, neboť se opakuje po 24 časových krocích i po $\lfloor \frac{24}{k} \rfloor k$ časových krocích. Jelikož však $d = 24 - \lfloor \frac{24}{k} \rfloor k < k$ (rozmysli si), našli jsme periodu délky d, která je menší než nejmenší perioda daného řešení, což je evidentně nesmysl. Obdrželi jsme tedy spor a tudíž jsme dokázali, že všechny možné cykly mají délku 2, 3, 4, 6, 8, 12 a 24, jejich příklady byly uvedeny výše.

(b) Uvažujme graf na N vrcholech obdobný grafu z páté úlohy, tedy „kružnici“, přiřaďme vrcholu 1 pravidlo inverze a ostatním pravidlo identita, potom obdržíme cyklus délky $2N$ (rozmysli si!).

Na druhou stranu, obdobně jako v řešení páté úlohy zdůvodníme, že se stav systému musí nejpozději po $2N$ časových krocích zopakovat. Rozmysli si, že graf vyhovující podmínce zadání vypadá jako kružnice, ze které případně vyrůstají stromečky. Je-li délka kružnice L, potom se stav systému zopakuje nejvýše po $2L$ krocích, neboť stav vrcholů stromečku je určen hodnotou kořenu na kružnici, z něhož stromeček roste.

Celkově dostáváme, že nejdelší možná perioda řešení pro souvislý graf na N vrcholech takový, že do každého vrcholu vede právě jedna hrana, je rovna $2N$.

Řešení 3. seriálové série

7. úloha
Předpokládejte, že adenovirus má tvar pravidelného dvacetistěnu o průměru[3] 90 nm. Jaký je jeho povrch?

Poloměr koule opsané dvacetistěnu je roven $r = d/2 = 45$ nm. Jednoduchou geometrickou úvahou čtenář nahlédne, že hrana pravidelného dvacetistěnu má délku

$$a = r\sqrt{2\left(1 - \frac{1}{\sqrt{5}}\right)} \approx 47,32 \text{ nm}.$$

Stěna pravidelného dvacetistěnu je rovnostranný trojúhelník, její obsah proto je

$$S = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{5}}\right)r^2 \approx 969,42 \text{ nm}^2$$

Jelikož má dvacetistěn dvacet stěn, je jeho povrch dvacetinásobkem obsahu jedné jeho stěny, tedy

$$P = 20 \cdot S = 20\frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = 10\sqrt{3}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{5}}\right)r^2 \approx 19388,45 \text{ nm}^2.$$

8. úloha
Předpokládejte, že virus má tvar koule o průměru 90 nm. Máte k dispozici kroužky (molekuly) o průměru 1 nm, kterými chcete zakrýt jeho povrch. Předpokládejte, že se kroužky nemohou překrývat. Jakou maximální část povrchu viru dokážete zakrýt?

Úloha bohužel asi nemá žádné pěkné řešení. Tuto úlohu a část (b) následující úlohy jsme mysleli jako výzvu řešitelům, aby zkusili najít co nejlepší odhady. Omlouváme se proto těm, kdo od nás očekávají přesné řešení. Na druhou stranu možná potěšíme ty, kdo mají rádi přibližné metody.

Zkusme nejprve pokrývat kroužky rovinu. Za tímto účelem si rovinu rozřežeme na šestiúhelníky (bez odpadu) o straně $1/\sqrt{3}$ nm. Do každého šestiúhelníku poté vepíšeme kružnici o průměru 1 nm. Tímto způsobem se nám podaří zakrýt

$$\frac{\pi}{2\sqrt{3}} \approx 90,7\%$$

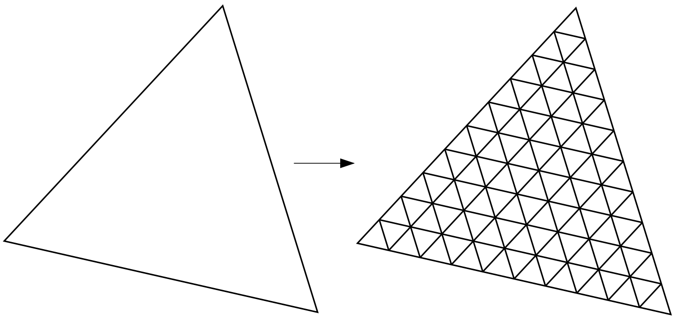
roviny. Koule o průměru 90 nm se z pohledu relativně malého kroužku jeví jako rovina, proto můžeme odhadnout, že výše uvedeným způsobem můžeme pokrýt kolem 90 % povrchu koule.

[3] Přesněji, průměr koule opsané dvacetistěnu je 90 nm.

Bylo by dobré ukázat, že náš odhad je rozumný. Najdeme způsob, jak kouli zcela přesně a korektně pokrýt zhruba ze 68 procent.

Zkusme kouli vepsat dvacetistěn. Ten má (podle řešení úlohy 7) hrany o délce $a > 47\,\mathrm{nm}$ a jeho stěny jsou trojúhelníky. Nyní vytvoříme něco, čemu se říká triangulace 47. stupně.

Co se stane, když si každou hranu rovnoměrně rozdělíme na 47 dílků délky $l = a/47 > 1\,\mathrm{nm}$? Dostáváme 48 bodů na každé hraně (dva body na koncích jsou sdílené). Každé dva takové body jsou jeden od druhého vzdáleny nejméně 1 nm (rozmysli si), což nám vyhovuje. Uvažme nyní triangulaci každé stěny jako na obrázku. Z každého z 46 „vnitřních“ bodů na hranách vedeme rovnoběžky s oběma zbylými hranami. V místě, kde se tyto přímky protnou, zvolíme nové body (viz obrázek).



Tvrdíme, že i každé dva tyto nové body jsou od sebe vzdáleny nejméně 1 nm. To jistě platí v rámci každé stěny a (protože úhly svírané stěnami jsou tupé) platí to i pro dva body ze sousedících stěn. Dvě nesousední stěny pak už jistě jsou od sebe dost daleko.

Kolik bodů jsme takto vytvořili? Na každé stěně máme $1 + 2 + 3 + \cdots + 48 = \frac{48 \cdot 49}{2} = 24 \cdot 49$ vrcholů, stěn máme dvacet. Body na hranách dvacetistěnu jsme přitom počítali dvakrát, body ve vrcholech dvacetistěnu dokonce pětkrát. Hran dvacetistěnu je 30 a vrcholů 12. Na každé hraně je 46 bodů (nepočítaje ty ve vrcholech).

Proto dostáváme pro n počet umístěných bodů:

$$n = 20 \cdot 24 \cdot 49 - 30 \cdot 46 - 4 \cdot 12 = 22\,092.$$

Nyní už stačí tyto body promítnout na kouli opsanou dvacetistěnu: Z každého bodu X povedeme kolmici na jemu příslušnou stěnu (kolmice vede ven z dvacetistěnu, v případě bodů na hranách vedeme kolmici na libovolnou stěnu) a podíváme se, kde se tato kolmice protne s opsanou koulí. Tam zvolíme obraz X' bodu X. Rozmysli si, že vzdálenost žádných dvou bodů se tímto způsobem nemůže zvětšit.

Přitom každý kroužek prokryje zhruba[4] $\frac{\pi}{4}$ čtverečních nanometrů. Poměr pokryté plochy ku celé ploše pak činí:

[4]Protože kroužek je „placatý“, zatímco koule zakřivená, nebude pokrytá oblast mít přesně tvar kruhu, ale kulové výseče. Rozdíl v povrchu ale nečiní ani jedno promile a protože počítáme numericky, dovolíme si ho zanedbat.

$$p = \frac{\frac{\pi}{4} \cdot 22\,092}{4\pi \cdot 45^2} \doteq 0,68.$$

Uvedené pokrytí by jistě šlo aspoň trochu vylepšit, jako dolní odhad však není špatné.

Poznámky opravovatele: Většina řešení obsahovala myšlenku pokrývání koule jako „skororoviny“ pomocí kroužků, ze které plynul odhad pokrytí okolo 90%. Několik lidí se pokusilo kouli pokrýt přesněji, většinou pomocí rozřezání koule na prstence, na které se pak dávaly kroužky. Zcela jasný a „čistý“ dolní nebo horní odhad se bohužel nevyskytl – přeci jen není lehké ověřit, že se přes dvacet tisíc kroužků nikde nepřekrývá.

9. úloha

Zjednodušme si problém o jednu prostorovou dimenzi. Uvažujme kružnici o průměru 90 nm, kterou se snažíme zakrýt malými intervalky o délce π nm.

(a) Jakou maximální a minimální část povrchu kružnice mohou vzájemně se nepřekrývající intervalky zakrýt (tak, že už není možné přidat další intervalek, aby se nepřekrýval s již umístěnými)?

(b) Uvažujte, že intervaly jsou pokládány na kružnici náhodně: Interval je položen, jen pokud se v náhodně zvoleném místě nepřekrývá s již položenými intervaly. Tento postup je opakován až do chvíle, kdy už na kružnici není volná mezera pro nějaký další interval, a poté spočítáme celkový pokrytý povrch kružnice. Jakou část povrchu kružnice intervalky v průměru zakrývají? To znamená: Pokud zopakuješ pokrývání kružnice mnohokrát a pro každé pokrytí spočítáš zakrytou část povrchu kružnice, jaký bude jejich průměr? Svou odpověď zdůvodni.

(a) Obvod kružnice o průměru 90 nm je roven 90π nm. Pokud naskládáme intervalky vedle sebe, pak se jich na obvod kružnice vejde akorát 90 a celý obvod kružnice je pokrytý. Vzájemně se nepřekrývající intervalky mohou tedy maximálně zakrýt 100% obvodu kružnice.

Na druhou stranu položíme-li 46 intervalků na kružnici tak, že mezera mezi libovolnými sousedními je rovna $\frac{22}{23}\pi$ nm, pak už není možné nikam přidat další intervalek. Čtenář si sám může rozmyslet, že jakékoliv pokrytí 45 a méně intervalky musí mít mezeru dostatečně velkou pro přidání dalšího intervalku. V nejhorším možném případě proto položíme na kružnici právě 46 intervalků.

Vzájemně se nepřekrývající intervalky mohou tedy minimálně zakrýt $46/90 \approx 51,1\%$ obvodu kružnice.

(b) Předně se omlouváme čtenářům, kteří zde očekávají obecné řešení. „Hezké“ řešení tohoto problému neznáme. Úloha byla myšlena jako výzva řešitelům k vyzkoušení různých metod zdolání problému.

Úloha vyžaduje určitou základní představu o pravděpodobnosti. Pokud bys měl zájem o podrobnější vysvětlení, můžeš si přečíst třeba seriál o pravděpodobnosti a statistice, který vycházel v minulém ročníku Prasete.

Předně bychom si měli uvědomit, co přesně znamená „průměrný počet intervalů“. Mějme nějakých k možných hodnot $h_1, h_2, \ldots, h_k$ náhodné veličiny, přičemž i-tá hodnota má pravděpodobnost p_i[5], tak průměrná hodnota této veličiny je vážený průměr $\mathrm{E}\, h = \sum_{i=1}^{k} p_i h_i$. Můžete si to představit tak, že uskutečníme strašně moc pokusů a spočítáme si průměrnou hodnotu h připadající na jeden pokus[6].

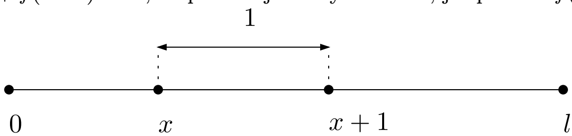
Všimněte si, že průměrná hodnota vůbec nemusí být rovna aritmetickému průměru maximální a minimální hodnoty. Situace obvykle bývá složitější a závisí na rozdělení pravděpodobností.

Nejjednodušší způsob řešení úlohy je napsat si program, který bude přímo simulovat přidávání intervalů[7]: Vygeneruje náhodné číslo určující polohu středu nového intervalku a podívá se, zda je vybrané místo volné. Pokud ano, tak intervalek přidá a pokračuje. Pokud ne, vygeneruje nové náhodné číslo a zkusí to znovu. Když už pro další interval není nikde místo, program skončí a vypíše počet „ubytovaných“ intervalů.

Když tento program pustíme „hodněkrát“, dostaneme sadu čísel, ze kterých už umíme spočítat průměr. Samozřejmě nedostaneme přesně průměrnou hodnotu naší náhodné veličiny, ale hodnotu s nějakou chybou[8]. „Hodněkrát“ pak znamená „tolikrát, aby pravděpodobnost velké chyby byla zanedbatelná“. Náš program dal po 100 000 pokusech hodnotu 67,27 intervalků, což znamená průměrné pokrytí 74.7% kružnice. V tomto případě tedy průměr vychází blízko průměru nejhoršího a nejlepšího případu, ale obecně na to nelze spoléhat.

Jiná možnost je zkusit spočítat funkci $f(l) = \mathrm{E}\, h(l)$ určující pro interval $\langle 0, l\rangle$ průměrný počet ubytovaných intervalků délky 1. Pro $l \in \langle 0, 1)$ je zjevně $f(l) = 0$ a pro $l \in \langle 1, 2)$ je $f(l) = 1$. Navíc pokud známe hodnoty této funkce pro $x \leq l - 1$, tak umíme určit hodnotu $f(l)$ (viz dále).

Podívejme se, co se stane, když umístíme na kružnici o obvodu $l > 1$ první interval. Zatím volná čist kružnice bude mít tvar půlměsíce (čili písmene C, případně U). Tento půlměsíc se chová úplně stejně jako interval délky $l - 1$. Průměrný počet ubytovaných intervalků proto bude $1 + \mathrm{E}\, h(l-1) = 1 + f(l-1)$. Vše, co potřebujeme nyní udělat, je spočítat $f(89)$.



Uvažme tedy interval $\langle 0, l\rangle$, kde zase $l > 1$. Opět si představíme situaci po ubytování prvního intervalku. Označme x polohu jeho levého okraje. Zjevně musí být $0 \leq x \leq l-1$. První intervalek nám $\langle 0, l\rangle$ rozsekne na dva volné (a disjunktní) intervaly $\langle 0, x\rangle$ a $\langle x+1, l\rangle$ (s body na okrajích intervalků si nemusíme dělat starosti – předpokládáme, že intervalky jsou otevřené). Pro ty už hodnotu f spočítat umíme – je to $f(x)$ resp. $f(l - x - 1)$. Pro danou volbu x tedy dostáváme

[5] Třeba při hodu třemi mincemi máme 4 možnosti pro veličinu „počet padlých orlů“: buď nepadne žádný, nebo 1, 2, nebo 3. Pravděpodobnosti jsou postupně $\frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{3}{8}, \frac{1}{8}$.

[6] Pro padlé orly bychom měli $\mathrm{E}\, h = \frac{1}{8} \cdot 0 + \frac{3}{8} \cdot 1 + \frac{3}{8} \cdot 2 + \frac{1}{8} \cdot 3 = \frac{3}{2}$

[7] Obvykle v našem semináři nemáme programy příliš rádi, ale v tomto případě uděláme výjimku, protože úloha nejspíše není řešitelná jinak než numericky

[8] Uvědom si, že výstup našeho programu je sám o sobě vlastně náhodnou veličinou.

průměrně $g(x) = 1 + f(x) + f(l - x - 1)$ ubytovaných intervalků. Chtěli bychom tedy udělat „průměr přes všechna $x \in \langle 0, l - 1\rangle$."

Jako dobré zobecnění sumy se v tomto případě nabízí integrál. Lze si to představit tak, že si interval $\langle 0, l - 1\rangle$ rozdělíme na hodně (ale konečně mnoho) dílků a spočítáme průměr přes tyto dílky.

Dostáváme rovnost:

$$f(l) = \frac{1}{l-1} \int_0^{l-1} g(x)\,\mathrm{d}x,$$

tedy po dosazení:

$$f(l) = \frac{1}{l-1} \int_0^{l-1} 1 + f(x) + f(l-x-1)\,\mathrm{d}x = 1 + \int_0^{l-1} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^{l-1} f(l-x-1)\,\mathrm{d}x$$

Druhý integrál je přitom roven prvnímu, jak je vidět po substituci $z = l - x - 1$. Proto:

$$f(l) = 1 + \frac{2}{l-1} \int_0^{l-1} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Celou dobu jsme tiše předpokládali, že f existuje a je „hezká" (integrovatelná), což jsou celkem přirozené požadavky.

Odtud už umíme (opět numericky) spočítat $f(89)$. Program, který to udělá, může fungovat třeba tak, že si interval $\langle 0, 89\rangle$ rozdělí na hodně dílků a pak postupně počítá hodnoty funkce $f(l)$ pro v jednotlivých dílcích pomocí předcházejících hodnot. Takto nám vyšel průměrný počet intervalků 67,28.

Výhoda oproti předchozí metodě spočívá v tom, že jsme vyloučili náhodnost a úlohu převedli na hledání řešení (integrální) rovnice. Kdybychom měli štěstí a rovnice vyšla jednoduchá, mohli bychom problém vyřešit přesně.

Poznámky opravovatele: Prakticky všichni řešitelé si poradili s první částí úlohy, o druhou část se jich pokoušela zhruba polovina. Nejčastěji řešení druhé části využívala (předpokládané) symetrie problému: Z předpokladu, že pravděpodobnost pokrytí n a $135 - n$ intervaly je stejná, odvodila, že průměrná hodnota bude přesně uprostřed, tedy 67,5. Ve skutečnosti je symetrie pouze přibližná, jak se lze přesvědčit třeba simulací na počítači.