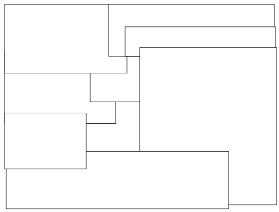
系列七

主題： 繪畫與粘貼

最遲日期： 2006年4月17日

問題1 **(3分)**

以前, 我們研討班的參加者開了一個會議, 並在會議中玩長方形的郵票.他們把郵票黏在桌上. 郵票混亂的蓋過了整個桌子(如圖所示). 你的任務是要找出郵票貼上的先後次序



問題2 **(3分)**

在一張紙上畫了一個邊長爲2的正六邊形. 試把它切成數塊並以它們組成四個邊長爲1的正六邊形.

問題3 **(3分)**

試証明是否可能把邊長爲3, 4, 5的三角形貼在邊長爲2006的正方形上, 使得沒有三角形在正方形之外及沒有任何三角形重疊.

問題4 **(5分)**

設A, B, C是三角形的三個頂點. 角$ACB = 40°$. 在三角形中設一點D使得角$ADB = 140°$. 點D'是點D以AB爲軸的反射的映像. 點D''是點D以AB的中點爲中心的反射的映像. 求証: 角ACD'=角$D''CB$.

問題5 **(5分)**

試証明是否可能把兩個全等的立方體切成有限數目的部份, 使得我們可以以切出來的部份組成兩個正四面體和一個正八面體.

問題6 **(5分)**

已知邊長$a = BC$, $b = AC$ 及CD的長度. D爲三角形ABC的外接圓和角度相等於角ACB的軸的交點. 試畫出三角形ABC (並列出解的數目).

問題7 **(5分)**

設$ABCD$爲AB及CD平行的梯形. 已知$|AB| > |CD| = 1$, 角$ADC > 90°$, AC垂

直BC及$\operatorname{tg}|\sphericalangle ACD| = \frac{4}{3}(|AB|-1)$. 已知角$ADC$大小, 試畫出該梯形.

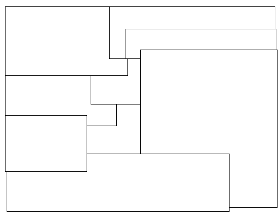
問題8 **(5分)**
三角形KLM的三條邊KL, LM, MK分別被點P點Q和點R分成比例爲２：１的兩部份, 即P在KL上, Q在LM上, R在MK上及$\frac{KP}{PL} = \frac{LQ}{QM} = \frac{MR}{RK} = 2$. 已有三角形$PQR$, 試畫出三角形$KLM$.

7. serio

Temo: Desegnado kaj sigelado

Dato de forsendado: 17. aprilo 2006

Problemo 1 (3 poentoj)
Je unua mitingo klubanoj de nia seminaro ludis kun rektangulaj poŝtmarkoj. Ili mokis de gluado la poŝtmarkojn sur tablon, kio poste estis tute kaĉa kaj tute kovrita (vidu la bildon). Via tasko estas malkovri la ordon, en kio la poŝtmarkoj estis aldonita.



Problemo 2 (3 poentoj)
Sur la folio estas regula sesangulo kun lateroj kun longeco 2. Distondu ĝin al plurajn pecojn kaj kunmetu la pecojn al kvar regulaj sesanguloj kun lateroj kun longeco 1.

Problemo 3 (3 poentoj)
Decidu ĉu estas ebla per trianguloj kun lateroj 3, 4 kaj 5 kovri tutan kvadraton kun latero kun longeco 2006. La trianguloj ne kovras ilin mem kaj neniu forplaŭdas ekster la kvadraton.

Problemo 4 (5 poentoj)
Estu un triangulo ABC, $|\sphericalangle ACB| = 40°$. Interne la triangulo estas punkto D, por ke $|\sphericalangle ADB| = 140°$. Punkto D' estas bildo de punkto D' je aksa reflekto per simetriakso AB; punkto D'' estas bildo de punkto D je centra reflekto, kia simetricentro estas la centro de AB. Pruvu ke $|\sphericalangle ACD'| = |\sphericalangle D''CB|$.

Problemo 5 (5 poentoj)
Decidu ĉu estas ebla distondi du identaj kuboj al finia nombro de partoj, por ke ni volas konstrui du regulajn kvaredrojn kaj un regulan okedron per uzado la tutajn partojn.

Problemo 6 (5 poentoj)

Konstruu triangulon ABC, se vi koni longecojn de ĝiaj lateroj $a = |BC|$, $b = |AC|$ kaj longecon de rektosegmento CD, kie D estas intersekcio de ĉirkaŭskribita cirklo de ABC kaj akso de angulo ACB. Ne forgesu diskuti la nombro de solvoj.

Problemo 7 (5 poentoj)

Estu un norme markata trapezo (do AB kaj CD estas paralelaj). La sekvantaj relacioj valoras: $|AB| > |CD| = 1$, $AC \perp BC$, $\operatorname{tg} |\sphericalangle ACD| = \frac{4}{3}(|AB| - 1)$ kaj $|\sphericalangle ADC| > 90°$. Se la angulo ADC estas donata, konstruu la trapezon.

Problemo 8 (5 poentoj)

En triangulo KLM lateroj KL, LM, MN estas dividata per punktoj P, Q, R (je ĉia ordo) je proporcio 2:1 (do $P \in KL, Q \in LM, R \in MK$ kaj $\frac{KP}{PL} = \frac{LQ}{QM} = \frac{MR}{RK} = 2$). Se la triangulo PQR estas donata, konstruu la triangulon KLM.

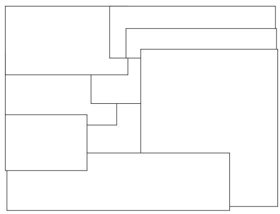
7. серия

Тема: Рисуване и залепване

Оследен срок: 17 април 2006

проблема 1 (3 точки)

По време на една среща участниците се забавлявали като лепили правоъгълни марки върху една маса, докато я покрили изцяло и тя изглеждала както на картинката. Вашата задача е да определите в каква последователност са залепвани тези марки.



проблема 2 (3 точки)

На хартия е начертан правилен шестоъгълник с дължина на страната 2. Разрежете го на няколко части и съставете от тях 4 правилни шестоъгълници с дължина на страната 1.

проблема 3 (3 точки)

Решете дали е възможно да се покрие цялата повърхност на квадрат с дължина на страната 2006 с триъгълници със страни 3, 4, 5 така, че триъгълниците да не излизат извън квадрата и нито един от тях да не бъде покрит с друг.

проблема 4 (5 точки)

Имаме триъгълник ABC, $|\sphericalangle ACB| = 40°$. Вътре в триъгълника е избрана точка D така, че $|\sphericalangle ADB| = 140°$. Точка D' е проекция на точката D в осната симетричност според оста AB;

Точка D'' е проекция на точката D в централната симетричност според средата на отсечката AB. Докажете че $|\sphericalangle ACD'| = |\sphericalangle D''CB|$.

проблема 5 (5 точки)

Решете дали е възможно да се разрежат два еднакви куба на части без остатък така, че с използуването на всичките части да се построят два правилни четиристени и един правилен осмостен

проблема 6 (5 точки)

Постройте триъгълник ABC, знаейки дължината на страните $a = |BC|$, $b = |AC|$ и дължината на отсечката CD, където точката D е точка на пресичане на описаната окръжност и оста на ъгъл ACB. не забравяйте да дискутирате върху броя на решенията.

проблема 7 (5 точки)

Нека $ABCD$ да е стандартно означен трапец. значи AB а CD са паралелни Важи, че $|AB| > |CD| = 1$, $AC \perp BC$, $\operatorname{tg} |\sphericalangle ACD| = \frac{4}{3}(|AB| - 1)$ и $|\sphericalangle ADC| > 90°$. Ъгълът ADC е даден. Постройте този трапец.

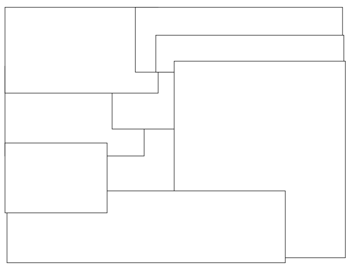
проблема 8 (5 точки)

В триъгълника KLM страните KL, LM, MK са разделени с точки P, Q, R в този ред и в съотношение 2:1 т.е. $P \in KL, Q \in LM, R \in MK$ а $\frac{KP}{PL} = \frac{LQ}{QM} = \frac{MR}{RK} = 2$. Постройте KLM, ако е даден триъгълника PQR.

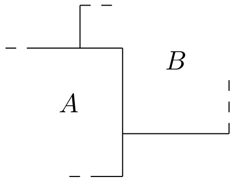
Řešení 7. série

1. úloha **(40, 39, 2,93, 3,0)**

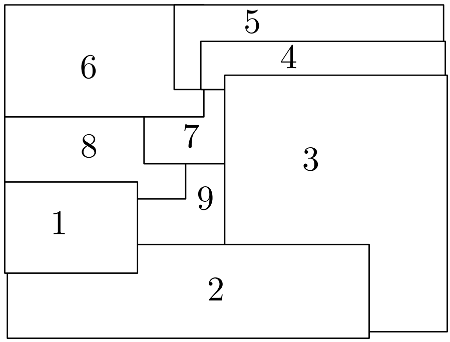
Řešitelé si na jednom srazu hráli s obdélníkovými známkami. Užili si spoustu legrace, jak je lepili na stůl. Stůl polepili úplně celý a vypadal pak jako na obrázku. Na vás je zjistit pořadí, ve kterém šly známky po sobě.



Na obrázku je znázorněna klíčová pozice při řešení. Pomocí „přelepu“, kterým zakrývá například známka A známku B, lze jednoznačně určit, která ze dvou takto položených známek byla první.



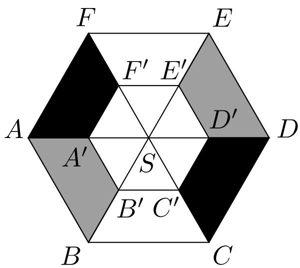
Sledováním posloupnosti „přelepů“ pak snadno zjistíme, že pořadí vlepování známek je jako na obrázku.



2. úloha **(27, 18, 2,85, 4,0)**

Na papíře je nakreslený pravidelný šestiúhelník o straně délky 2. Rozstříhejte ho na několik částí a složte z nich čtyři pravidelné šestiúhelníky o straně délky 1.

Uvedeme jedno možné řešení z mnoha. Označme si vrcholy šestiúhelníka $ABCDEF$. Spojením všech dvojic protilehlých vrcholů úsečkami AD, BE a CF snadno šestiúhelník rozdělíme na šest rovnostranných trojúhelníků o straně délky 2, u nichž není problém sestrojit střední příčky $A'B'$, $B'C'$, $C'D'$, $D'E'$, $E'F'$, $F'A'$ jako na obrázku.



Dostáváme rozdělení šestiúhelníka $ABCDEF$ na šest lichoběžníků a šest malých rovnostranných trojúhelníků o straně délky jedna. Nyní vezměme nůžky a odstřihněme všechny lichoběžníky (tj. stříháme podél úseček AA', BB', CC', DD', EE', FF' a dále podél hranice šestiúhelníka $A'B'C'D'E'F'$). Z každé dvojice lichoběžníků složíme slepením nejdelších stran jeden pravidelný šestiúhelník (ověř, že je pravidelný a má stranu délky jedna!), čímž spolu s šestiúhelníkem

$A'B'C'D'E'F'$ dostáváme celkem čtyři pravidelné šestiúhelníky o délce strany jedna a jsme hotovi.

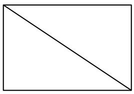
3. úloha (42, 42, 3,00, 3,0)

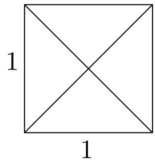
Rozhodněte, jestli lze trojúhelníky se stranami 3, 4 a 5 polepit celý čtverec o straně délky 2006 tak, aby trojúhelníky nepřečnívaly přes okraj čtverce a žádné dva se nepřekrývaly.

Trojúhelník se stranami $a = 3$, $b = 4$ a $c = 5$ splňuje rovnost $a^2 + b^2 = c^2$ a tedy je pravoúhlý (Pythagorova věta platí jako ekvivalence). Proto můžeme snadno spočítat jeho obsah $S_1 = \frac{1}{2}ab = 6$.

Čtverec o straně 2006 má ale obsah $S_2 = 2006^2$. Pokud by trojúhelníky bylo možné čtverec pokrýt existovalo by přirozené n, že $n \cdot S_1 = S_2$, tedy $S_1 = 6$ by dělilo $S_2 = 2006^2$. To ale neplatí: Prvočíslo tři dělí S_1, ale nedělí 2006, takže nemůže dělit ani 2006^2. Proto nemůže být 2006^2 dělitelné šesti a pokrytí nelze realizovat.

Poznámky k došlým řešením: Téměř všechna řešení byla správně. Hodně řešitelů bohužel používalo bez důkazu tvrzení „Každé pokrytí musí být složeno z obdélníků, které vzniknou složením dvou trojúhelníků jako na obrázku vlevo.“





To obecně není pravda (zkus tak pokrýt například čtverec 1×1 pomocí trojúhelníků o stranách $\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\frac{1}{\sqrt{2}}$ a 1 jako na obrázku vpravo) a je třeba dokázat, že to platí pro hodnoty ze zadání (asi nejjednodušší je rozebrat situaci v rozích obdélníka a pak pokračovat indukcí, ale je to dost technické), což nikdo neudělal. Proto jsem za neoprávněné (a zbytečné) používání tohoto tvrzení strhával bod.

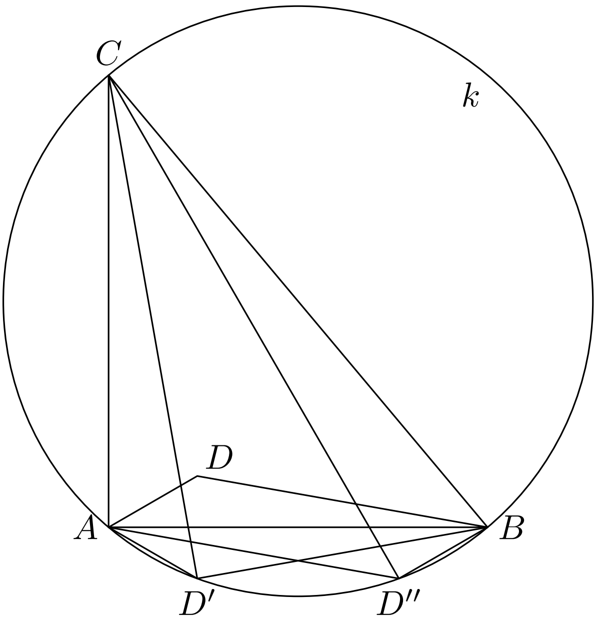
4. úloha (36, 32, 4,50, 5,0)

Mějme trojúhelník ABC takový, že $|\sphericalangle ACB| = 40°$. Uvnitř trojúhelníku je zvolen bod D tak, aby $|\sphericalangle ADB| = 140°$. Bod D' je obraz bodu D v osové souměrnosti podle osy AB; bod D'' je obraz bodu D ve středové souměrnosti podle středu úsečky AB. Dokažte, že $|\sphericalangle ACD'| = |\sphericalangle D''CB|$.

Dokreslíme kružnici opsanou trojúhelníku ABC a označíme ji k. Vzhledem k tomu, že platí $|\sphericalangle ADB| = 140°$, je i $|\sphericalangle AD'B| = |\sphericalangle AD''B| = 140°$. Uvědomíme si, že body D' a D'' leží na kružnici k. Totiž, protože D je vnitřní bod ABC, jsou body D' a D'' vně trojúhelníku ABC a ještě navíc v polorovině neobsahující bod C určené přímkou AB. Potom tedy vnitřní úhel u vrcholu D' (respektive D'') ve čtyřúhelníku $AD'BC$ (respektive čtyřúhelníku $AD''BC$) je vskutku 140° (a nikoliv $220° = 360° - 140°$ jako u vrcholu D ve čtyřúhelníku $ADBC$).

Odtud plyne, že $AD'BC$ a $AD''BC$ jsou tětivové čtyřúhelníky, totiž součty úhlů u protilehlých vrcholů C a D' (respektive C a D'') jsou $40° + 140° = 180°$. Tedy body D' a D'' leží na kružnici k.

Nyní už si stačí uvědomit, že z definice bodů D' a D'' plyne $|AD'| = |AD| = |BD''|$. Tedy podle věty o obvodových úhlech jsou nad AD' a BD'' stejné obvodové úhly, tudíž $|\sphericalangle ACD'| = |\sphericalangle D''CB|$.

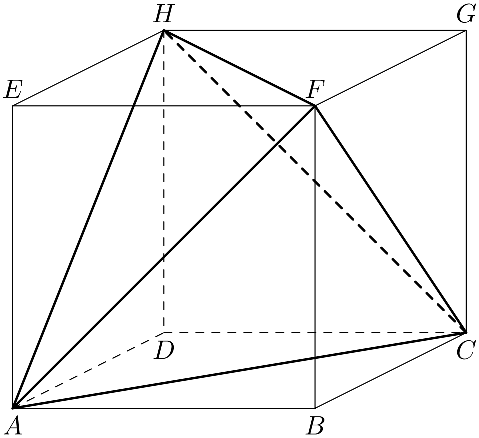


5. úloha **(24, 18, 3,71, 5,0)**

Rozhodněte, jestli je možné rozřezat dvě stejné krychle na konečný počet částí tak, aby se (použitím všech těchto částí) daly složit dva pravidelné čtyřstěny a jeden pravidelný osmistěn.

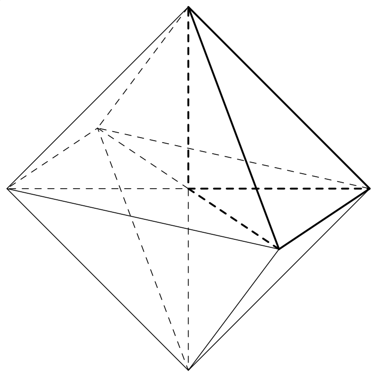
Odpověď zní ano.

Obě krychle budeme řezat stejným způsobem, tudíž řezání budeme demonstrovat jen na jedné z nich. Označme si $K = ABCDEFGH$ řezanou krychli (sleduj obrázek). Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že K má hranu délky jedna.



V krychli K postupně veďme řezy rovinami ACF, ACH, AFH a CFH. Tyto řezy rozdělí krychli na pět částí, totiž na pravidelný čtyřstěn $ACFH$ (všechny jeho hrany jsou úhlopříčky stěn krychle, tudíž mají délku $\sqrt{2}$) a čtyři navzájem shodné čtyřstěny $BAFC$, $EAFH$, $GCFH$ a $DACH$. Vzhledem k tomu, že máme na začátku dvě shodné krychle, dostáváme dva shodné pravidelné čtyřstěny (což chceme) a zbývá nám z $2 \cdot 4 = 8$ čtyřstěnů shodných s $BACF$ poskládat pravidelný osmistěn.

To už je snadné, stačí k sobě tyto čtyřstěny přilepit stěnami tvořenými shodnými rovnoramennými pravoúhlými trojúhelníky (sleduj obrázek – jeden z osmi čtyřstěnů, ze kterých osmistěn skládáme, je vyznačen tučně).

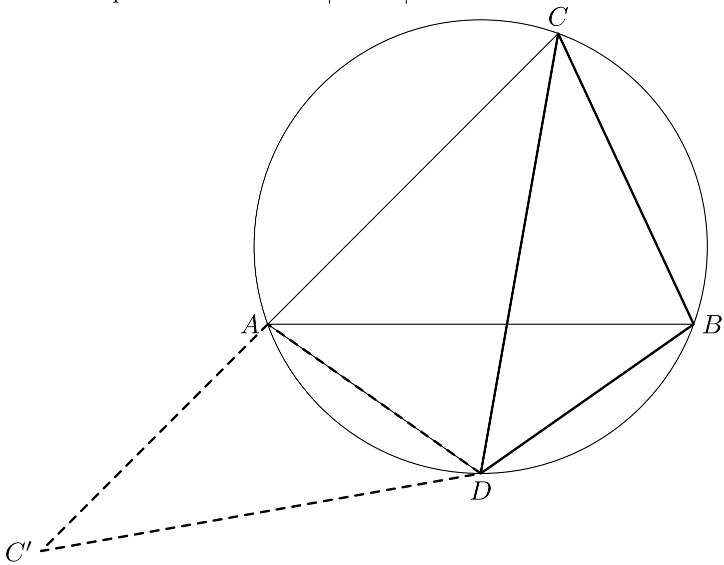


6. úloha **(26, 24, 4, 46, 5, 0)**

Sestrojte trojúhelník ABC, znáte-li velikost stran $a = |BC|$, $b = |AC|$ a délku úsečky CD, kde bod D je průsečík kružnice opsané a osy úhlu ACB (nezapomeňte na diskusi počtu řešení).

První řešení

Prvně si podle věty o obvodových úhlech uvědomme, že $|AD| = |BD|$ (totiž i AD i BD mají obvodový úhel $\frac{1}{2}|\sphericalangle ACB|$ vzhledem ke kružnici opsané trojúhelníku ABC). Dále, vzhledem k tomu, že $ADBC$ je tětivový čtyřúhelník, platí $|\sphericalangle CAD| + |\sphericalangle CBD| = 180°$. Nyní trojúhelník BDC vystřihneme z papíru a znovu přilepíme tak, abychom zachovali polohu bodu D a bod B přešel do bodu A (to se podaří, jelikož $|AD| = |BD|$). Označme C' bod, do kterého přechází C. Pro formalisty: otáčíme C podél bodu D o úhel $|\sphericalangle BDA|$.



Vzhledem k podmínce $|\sphericalangle CAD| + |\sphericalangle CBD| = 180°$ dostáváme, že úhel CAC' je přímý. Navíc $|C'A| = |CB| = a$, odkud $|CC'| = a + b$ a také $|C'D| = |CD|$. Tedy v trojúhelníku CDC' známe délky všech jeho stran, čili ho můžeme zkonstruovat. Máme-li CDC', potom už je velmi snadné sestrojit body A a B, například tak, že A je bod úsečky CC' ve vzdálenosti b od bodu C a bod B je bod (neležící na přímce CC'), který svírá s úsečkou CD úhel $|\sphericalangle DCC'|$ ve vzdálenosti a od bodu C.

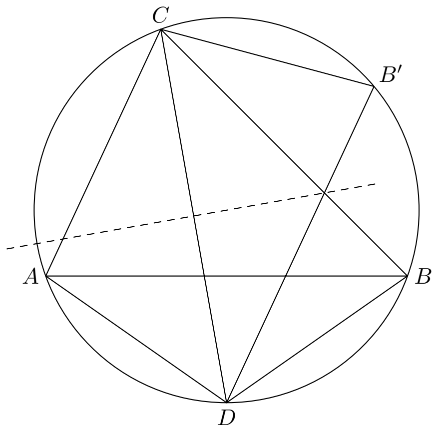
Přesný zápis konstrukce si z předchozího postupu už doplň sám (sama).

Diskuze: pokud se podaří sestrojit trojúhelník CDC' potom už je konstrukce jednoznačná a vychází jedno řešení (rozmysli si, že řešení, které vyjde, už splňuje všechny požadované podmínky). Rovnoramenný trojúhelník CDC' se stranami $a + b$, $|CD|$ a $|CD|$ se podaří sestrojit, právě když $2|CD| > a + b$, rozmysli si z trojúhelníkové nerovnosti.

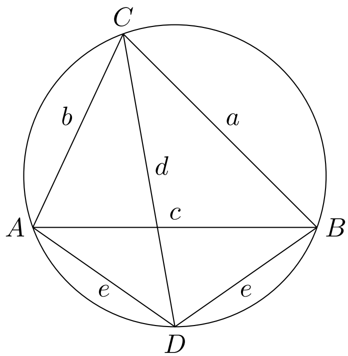
Druhé řešení (podle Hany Bendové)

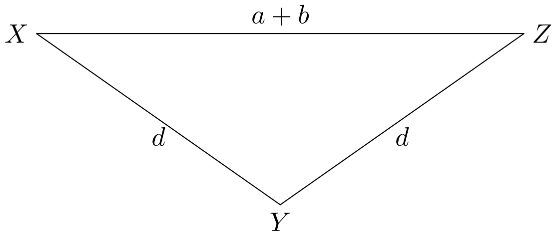
Zobrazme bod B v osové souměrnosti podle osy úsečky CD na bod B', vzhledem k tomu, že tato osa souměrnosti prochází středem kružnice opsané trojúhelníku ABC (body C i D na ní totiž leží), nutně i bod B' leží na kružnici opsané ABC. Dále $|\sphericalangle ACD| = |\sphericalangle BCD| = |\sphericalangle B'DC|$, tudíž čtyřúhelník $ACB'D$ je lichoběžník (nebo obdélník). Nakonec ještě $|B'D| = |BC| = a$. Tedy v tomto lichoběžníku známe $|AC|$, $|B'D|$ a $|CD|$, to už stačí k tomu, aby šel jednoduše zkonstruovat (rozmysli si). Známe-li body A, C, D, pak už zkonstruujeme bod B podobně jako v prvním řešení.

Diskuzi opakovat nebudeme, bylo by potřeba rozebrat, pro které hodnoty a a b a $|CD|$ je lichoběžník $AB'CD$ konstruovatelný, opět by se došlo k výsledku $2|CD| > a + b$.



Třetí řešení (podle Zbyňka Konečného)
Stejně jako v prvním řešení si uvědomíme, že $|AD| = |BD|$. Označíme $c = |AB|$, $d = |CD|$ a $e = |AD| = |BD$. Z Ptolemaiovy věty plyne, že $ae + be = cd$. Poznamenejme, že Ptolemaiova věta (speciální případ) říká, že pro tětivový čtyřúhelník $KLMN$ platí $|KL||MN| + |LM||KN| = |KM||LN|$.





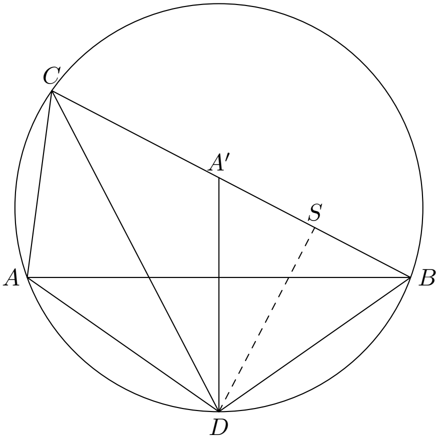
Odtud dostáváme $\frac{e}{c} = \frac{d}{a+b}$. Sestrojíme-li tedy rovnoramenný trojúhelník XYZ se stranami d, d a $a + b$, bude podobný trojúhelníku ADB (věta sss). Odtud speciálně umíme sestrojit velikost úhlu ADB, a tedy i úhlu ACB, jelikož $|\sphericalangle ACB| = 180° - |\sphericalangle ADB|$ (čtyřúhelník $ADBC$ je tětivový). A když známe úhel ACB společně s velikostmi a a b, je už velmi snadné trojúhelník sestrojit.

Diskuzi nechť si tentokráte už provede každý sám.

Čtvrté řešení (podle více řešitelů)
Předpokládejme, že $a > b$ (pro $a = b$ lze úlohu jednoduše přímočaře vyřešit). Na úsečce BC nanesme bod A' tak, že $|CA'| = b$. Bod A' lze tedy získat z A osovou souměrností podle osy úhlu ACB, tj přímky CD. Použijeme opět z prvního řešení, že $|AD| = |BD|$ a $|A'D| = |AD|$ z osové souměrnosti podle $|CD|$. Tedy trojúhelník $A'DB$ je rovnoramenný. Označme S střed úsečky $A'B$. Potom je DS kolmá na BS tedy i na CS. Dále velikost $|CS|$ lze snadno spočítat jako

$b+\frac{1}{2}(a-b)=\frac{1}{2}(a+b)$, tuto vzdálenost je snadné zkonstruovat. Tedy snadno sestrojíme pravoúhlý trojúhelník CDS (známe délku přepony CD a odvěsny CS). Na polopřímce CS vyznačíme bod B ve vzdálenosti a od C. Známe-li body B, C a D, potom už je snadné sestrojit A.

Ani tentokráte už není na diskuzi nic nového (oproti prvnímu řešení), tudíž se jí zabývat nebudeme.



Poznámky k došlým řešením: Objevilo se mnoho různých přístupů (některé z nich si můžeš přečíst v komentářích za původním vzorovým řešením). Potěšen hezkými řešeními jsem ochotně rozdával kladné imaginární body. Naopak jsem nekompromisně strhával jeden bod za chybějící nebo špatnou diskuzi. A také jsem strhával jeden bod za dělení nulou bez jakéhokoliv komentáře u řešení, která úlohu spočítala (obvykle bylo potřeba ještě rozebrat možnost $a=b$).

Poznámka ke konstrukci: Řekněme, že máte zadáno a, b a $d=|CD|$, a spočítáte, že potřebujete sestrojit úsečku u délky $\sqrt{d^2-ab}$. Potom nestačí říci, že u sestrojíme tak, že změříme $\sqrt{d^2-ab}$ na pravítku (kdo na pravítku umí třeba měřit $\sqrt{2}$?). Je potřeba ukázat nějakou konstrukci, tj. někde v rovině máte narýsovány úsečky délek a, b a d a vaším úkolem je narýsovat úsečku délky $\sqrt{d^2-ab}$. Obvykle se tento postup dělá s využitím Pythagorovy a Eukleidovy věty. Ještě poznamenám, že kdyby ve výrazu pro délku u byla třetí odmocnina místo druhé, tak potom (na základě nějakých složitých vět) ani obecně žádná taková konstrukce neexistuje (ač danou délku lze spočítat).

A ještě poznamenám k diskuzi, že ne vždy stačí najít jednu podmínku a prohlásit ji za postačující – to se stalo některým řešitelům s podmínkou $d^2>ab$. Občas, ze složitější konstrukce, vyplyne podmínek více a je potřeba brát ohled na všechny, a tedy i ověřit, že když už jsou dané podmínky splněny, potom už se podaří daný geometrický objekt zkonstruovat – to je také součást diskuze (pro některé konstrukce zřejmá, pro některé však nikoliv)!

7. úloha **(38, 37, 2,84, 3,0)**

Nechť $ABCD$ je standardně značený lichoběžník (tedy AB a CD jsou rovnoběžné). Platí $|AB|>|CD|=1$, $AC\perp BC$, $\operatorname{tg}|\sphericalangle ACD|=\frac{4}{3}(|AB|-1)$ a $|\sphericalangle ADC|>90^\circ$. Úhel ADC je daný. Sestrojte tento lichoběžník!

Řešení podle Hany Bendové

Začni si kreslit obrázek – napřed přikreslíme několik bodů, a pak už úlohu snadno vyřešíme. Bod E najdeme na polopřímce CD tak, aby $|CE| = |AB|$ (a tedy $|DE| = |AB| - 1$ a EA je rovnoběžná s BC). X bude průsečík AC a kolmice na CD vedené bodem D. A konečně F značí průsečík DX a AE.

Nyní si všimněme, že úhel CAE je pravý a trojúhelníky DEF a DXC jsou podobné podle věty uu. Podle zadání máme $\frac{4}{3}(|AB| - 1) = \operatorname{tg} |\sphericalangle ACD| = \frac{|DX|}{|CD|} = |DX|$, také ale $|DE| = |AB| - 1$, takže $\frac{4}{3} = \frac{|DX|}{|DE|} = \frac{|XC|}{|EF|} = \frac{|CD|}{|FD|}$ (všechny rovnosti kromě první přímo vyplývají z podobností vhodných trojúhelníků). Přitom $|CD| = 1$, víme tedy, že $|FD| = 3/4$.

Teď už lichoběžník snadno sestrojíme: vyjdeme z úsečky CD a polopřímky $p = DA$ (tu známe díky znalosti úhlu CDA; bod A ale samozřejmě ještě neznáme). Bod F je teď spočtenou vzdáleností a tím, že leží v téže polorovině určené CD jako p, jednoznačně určen a můžeme jej rychle narýsovat. Bod A pak je průsečík p a Thaletovy kružnice nad CF, E je průsečíkem CD a AF a konečně B je obrazem bodu E ve středové souměrnosti podle středu AC.

Na závěr nesmíme zapomenout na diskusi počtu řešení. Projdeme-li si znovu celou konstrukci, zjistíme, že jediný problém může být s bodem A. Musí totiž vyjít v téže polorovině ohraničené CD jako bod F. A to, jak nám prozradí jednoduchý výpočet, nastane, právě když $|\sphericalangle ADC| < 90^\circ + \operatorname{arctg} 3/4$.

8. úloha **(17, 13, 3,24, 4,0)**

V trojúhelníku KLM jsou strany KL, LM, MK rozděleny postupně body P, Q, R v poměru 2:1 (tedy $P \in KL, Q \in LM, R \in MK$ a $\frac{KP}{PL} = \frac{LQ}{QM} = \frac{MR}{RK} = 2$). Sestrojte KLM, je-li dán trojúhelník PQR.

Tato úloha se ukázala býti mnohem snazší, než autor zamýšlel, a to hlavně kvůli speciální volbě dělení stran trojúhelníku KLM trojúhelníkem RST. Proto si tu ukážeme tři řešení a tři možnosti, jak k této úloze přistupovat, abychom se naučili i důmyslnější postupy, které by mohly pomoci při opravdu těžkých úlohách.

První řešení

Analytickým vyjádřením těžiště v trojúhelníku KLM a v trojúhelníku PQR dokážeme, že trojúhelníkům splývá těžiště.

Skutečně: $T_{KLM} = \frac{K+L+M}{3}$ a $T_{PQR} = \frac{P+Q+R}{3} = \frac{\frac{K+2L}{3} + \frac{L+2M}{3} + \frac{M+2K}{3}}{3} = \frac{K+L+M}{3}$.

Teď si zbývá uvědomit, že vzdálenost těžiště trojúhelníku KLM od strany KL je třetina výšky z bodu M na stranu KL stejně jako vzdálenost bodu R od strany KL. Proto jsou přímky KL a RT rovnoběžné a stejný fakt dostaneme analogicky pro dvojice LM, PT a ML, QT. S těmito fakty už můžeme začít konstruovat.

Konstrukce

Sestrojíme těžiště trojúhelníku PQR a dále body P, Q, R vedeme rovnoběžky p, q, r po řadě s přímkami RT, PT a QT. Je potom $K \in p \cap q$, $L \in q \cap r$ a $M \in r \cap p$. Tato konstrukce má vždy jedno řešení a snadno zpětně ověříme, že toto řešení vyhovuje.

Druhé řešení

Ve stejnolehlosti se středem v P a koeficientem 2 zobrazme bod R do bodu R'. Ve stejnolehlosti se středem v P a koeficientem $\frac{3}{2}$ zobrazme bod Q do bodu Q'. Vzdálenost bodů R' a Q' od přímky KL je stejná a je rovna výšce z bodu M na stranu KL v trojúhelníku KLM. $R'Q'$ a KL jsou tedy rovnoběžné a KL tedy leží na rovnoběžce s $R'Q'$ procházející bodem P. Analogicky sestrojíme ostatní nosné přímky zbylých dvou stran trojúhelníku KLM. Zbytek je stejný jako v prvním řešení.

Toto řešení má navíc tu výhodu, že body K, L a M nemusí dělit strany v tak „pěkném" poměru jako je 1 : 2, ale ve zcela libovolném. Stačí pak tomuto poměru přizpůsobit koeficienty ve stejnolehlostech.

Třetí řešení

Toto bude jen náznak, přes který lze při řešení podobné úlohy jít.

Představme si, že zobrazujeme ve stejnolehlosti se středem v P a koeficientem $\frac{1}{2}$ (značené $H(P, \frac{1}{2})$) bod K do bodu L. Stejně tak zobrazujeme v $H(Q, \frac{1}{2})$ L do M a v $H(R, \frac{1}{2})$ M do K. Pokud tedy provedeme tyto tři stejnolehlosti po sobě, tak se nám bod K vrátí na původní místo. To znamená, že ať už je trojúhelník PQR jakýkoli, tak po se po složení zobrazení $H(P, \frac{1}{2}) \circ H(Q, \frac{1}{2}) \circ H(R, \frac{1}{2})$ bod K zobrazí vždy do sebe. Je tedy pevným bodem tohoto zobrazení. Zbývá pro rozmyšlení prozradit, že složením dvou stejnolehlostí je stejnolehlost se koeficientem rovným součinu koeficientů dílčích stejnolehlostí. Zobrazení $H(P, \frac{1}{2}) \circ H(Q, \frac{1}{2}) \circ H(R, \frac{1}{2})$ je tedy stejnolehlostí a jediným pevným bodem stejnolehlosti je její střed. A střed této stejnolehlosti lze bez větší námahy (s mírnými znalostmi `;)`) sestrojit.

Toto řešení sice nevypadá vůbec elegantně, ale na rozdíl od předchozího řešení ho lze použít i na jiné mnohoúhelníky než je trojúhelník. Návodná úloha: V rovině je zadáno pět bodů S_1, S_2, S_3, S_4 a S_5, o kterých víme, že jsou to po řadě středy stran neznámého pětiúhelníku. Úkolem je tento pětiúhelník rekonstruovat. [Nápověda: Složením dvou středových souměrností je posunutí. Složením posunutí a středové souměrnosti je opět středová souměrnost.]