8. série

Téma: Finální myš(maš)

Datum odeslání: 15. května 2006

1. úloha

Kriket si na začátku soustředění vytvořil zajímavou nástěnku. Na cedulkách byla jména všech n účastníků a mezi jmény těch, kteří se znali ještě před příjezdem na soustředění, byl napnut provázek. Tato pečlivá příprava velmi fascinovala Tritase, který se ovšem rozhodl zamotat Kriketovi hlavu. Popřeházel cedulky tak, že mezi těmi, které byly dřív spojeny provázkem, najednou žádná spojnice neexistovala. Dokonce se mu podařilo docílit i toho, že mezi všemi cedulkami dříve provázkem nespojenými nyní provázek vedl. S provázky ovšem nijak nehýbal, měnil jen cedulky se jmény.

(a) Dokažte, že pro $n = 4k+2$, kde $k = 0, 1, 2, \ldots$ se Tritasovi popřemisťování cedulek nemohlo povést. (2 body)

(b) Pro která n se popřehazování cedulek může podařit? (3 body)

2. úloha

(a) Všechna sudá kombinační čísla[1] obarvíme červeně; všechna lichá čísla obarvíme modře. Dokažte, že pro každé $n \geq 3$ a $0 \leq k \leq 3$ mají čísla $\binom{n}{k}$ a $\binom{n+4}{k}$ stejnou barvu. (2 body)

(b) Buď p libovolné prvočíslo. Najděte všechna přirozená čísla n taková, že p dělí $\binom{n}{k}$ pro každé $k \in 1, 2, \ldots, n-1$. (3 body)

3. úloha

Čtyřúhelník nazveme dvojstředový, právě když existuje kružnice jemu vepsaná i opsaná.

(a) Rozhodněte, jestli čtverec je jediný dvojstředový čtyřúhelník s kolmými úhlopříčkami. (2 body)

(b) V rovině je dán trojúhelník ABC. Na kružnici opsané trojúhelníku ABC nalezněme body D, E tak, že $3|\sphericalangle ACD| = 3|\sphericalangle DCE| = 3|\sphericalangle ECB| = |\sphericalangle ACB|$. Označme $FGHIJ$ pětiúhelník určený úhlopříčkami pětiúhelníku $ACBED$ (bod F je průsečík úhlopříček AE a BD, bod G je průsečík úhlopříček BD a CE, H je průsečík CE a AB, I je průsečík AB a CD a J průsečík CD a AE). Označme ještě K průsečík úseček GI a JH. Spočítejte velikosti vnitřních úhlů trojúhelníku ABC, víte-li, že čtyřúhelník $FGKJ$ je dvojstředový. (3 body)

4. úloha

Hezkou funkcionální rovnicí rozumíme funkcionální rovnici s proměnnými $x, y, z, t, \ldots$ a neznámou funkcí $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takovou, že:

(i) Proměnné a výrazy, které dostaneme pomocí funkce f, můžeme navzájem sčítat, odčítat a násobit; také můžeme přičítat, odčítat a násobit reálnými čísly; můžeme také jakýkoli výraz umocnit na přirozené číslo. Žádné jiné operace se v rovnici vyskytnout nesmí.

(ii) Proměnné se v rovnici vyskytují pouze uvnitř funkce f.

(iii) Funkce f se nevyskytuje uvnitř sebe.

[1] Kombinační číslo $\binom{n}{k}$ je definované jako $\frac{n!}{(n-k)!k!}$.

Například tedy[2]:

- V hezké rovnici se nesmí vyskytnout výrazy x^y, $\sin x$, $\sqrt{x}$, $\frac{x+3yz}{2z}$ – všechny odporují prvnímu bodu.
- Rovnice $f(x+y) - f(z) = x^2 - f(yz)$ není hezká – proměnná x z prvního členu na pravé straně se nevyskytuje uvnitř funkce f; z podobného důvodu není hezká ani rovnice $f(y)(2z - f(y-z)) = f(z)$.
- V hezké rovnici se také (kvůli bodu iii) nesmí vyskytnout výrazy $f(x+f(y))$, $f(f(x+3z)-1)$ a $f((f(x)-y)^2)$
- Na druhou stranu třeba rovnice $f(3xy-2)(2+5f(z^2)) + (f(x))^2 = f(x^4 - yz) + 187$ hezká je.

(a) Zvolte si libovolná **nenulová** $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Najděte hezkou funkcionální rovnici takovou, že jediná lineární funkce (tedy funkce tvaru $f(x) = ax + b$, kde $a, b \in \mathbb{R}$), která ji řeší, je funkce $f(x) = \alpha x + \beta$.

Například kdybychom zapomněli na podmínku o nenulovosti a zvolili si $\alpha = 0, \beta = 211$, hledanou hezkou rovnicí by byla třeba rovnice $f(x) = 211$. (2 BODY)

(b) Najděte hezkou funkcionální rovnici, jejímž řešením bude $f(x) = \sin x$, ale kterou nebude řešit žádný polynom[3]. (3 BODY)

5. ÚLOHA

(a) Když si Saša chce dát pauzu od přípravy čínského vydání komentářů, vezme si krychlové stavebnicové kostičky a začne z nich stavět (čínskou) zeď. Správná zeď vypadá tak, že Saša nejprve postaví několik kostiček vedle sebe. Potom na každou z už postavených kostiček Saša může a nemusí postavit ještě určitý počet dalších kostiček. Určete, kolik různých zdí (Sašovi se nechce zdi otáčet, takže za různé považuje i zrcadlově symetrické dvojice) obsahujících právě 9 kostiček může Saša postavit. (2 BODY)

(b) Občas se Sašových kostiček zmocní Martin, zvolí si přirozené číslo n a začne stavět věže. Klade si následující podmínky:

(i) Ve spodní vrstvě je právě n kostiček (tj. počet věží je n).
(ii) Právě jedna věž má výšku $n+1$, ostatní jsou nižší.
(iii) Kdykoliv jsou v_1, v_2, v_3 výšky tří vedle sebe stojících věží (v_2 je výška prostřední z nich), potom nejvýše jedno z čísel v_1, v_3 je větší než v_2.

Určete pro dané n, kolik různých věží může Martin postavit (ani Martinovi se nechce věže otáčet). (3 BODY)

6. ÚLOHA

(a) Najděte všechna celočíselná řešení rovnice $(x+y+z)^3 = x^3 + y^3 + z^3$. (2 BODY)

(b) Najděte všechna celočíselná řešení rovnice $(x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2$. (3 BODY)

7. ÚLOHA

Každý bod roviny obarvíme jednou ze dvou barev: červeně, nebo modře.

---

[2] Obecně je rovnice hezká právě když obě její strany vypadají jako $P(f(V_1(x, y, \dots)), \dots \dots, f(V_k(x, y, \dots)))$, kde $P, V_1, \dots, V_k$ jsou mnohočleny (obecně několika proměnných).

[3] Polynom (jedné proměnné) je libovolná funkce tvaru $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, kde $a_i \in \mathbb{R}$ pro každé i.

(a) Dokažte, že v rovině existuje čtverec, který má sudý počet vrcholů obarvených červeně. (2 BODY)

(b) Mějme pevně dána čísla $a, b, c > 0$ splňující trojúhelníkovou nerovnost. Předpokládejme, že jsme v rovině našli rovnostranný trojúhelník o straně délky a takový, že jeho všechny tři vrcholy mají stejnou barvu. Dokažte, že v rovině existuje trojúhelník o stranách délek a, b, c takový, že jeho všechny tři vrcholy mají stejnou barvu. (3 BODY)

Řešení 8. série

1. úloha **(30, 27, 2,63, 3,0)**

Kriket si na začátku soustředění vytvořil zajímavou nástěnku. Na cedulkách byla jména všech n účastníků a mezi jmény těch, kteří se znali ještě před příjezdem na soustředění, byl napnut provázek. Tato pečlivá příprava velmi fascinovala Tritase, který se ovšem rozhodl zamotat Kriketovi hlavu. Popřeházel cedulky tak, že mezi těmi, které byly dřív spojeny provázkem, najednou žádná spojnice neexistovala. Dokonce se mu podařilo docílit i toho, že mezi všemi cedulkami dříve provázkem nespojenými nyní provázek vedl. S provázky ovšem nijak nehýbal, měnil jen cedulky se jmény.

(a) Dokažte, že pro $n = 4k+2$, kde $k = 0, 1, 2, \dots$ se Tritasovi popřemisťování cedulek nemohlo povést.

(b) Pro která n se popřehazování cedulek může podařit?

(a) Počet dvojic účastníků je:

$$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} = \frac{(4k+2)(4k+1)}{2} = (2k+1)(4k+1),$$

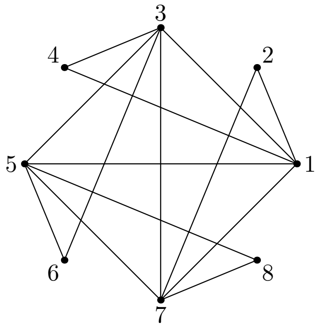
tedy liché číslo. Pro spor předpokládejme, že se Tritasovi přemístění cedulek povedlo. To znamená, že nějakých u dvojic účastníků se před příjezdem na soustředění znalo (Kriket použil u provázků k jejich spojení). Jenže Tritas použil u provázků právě pro dvojice těch, kteří se neznali. Dohromady by tedy na soustředění bylo $2u$ dvojic účastníků, což je spor s tím, že počet dvojic je liché číslo.

(b) Podobně jako v části (a), pro n tvaru $4k + 3$ je počet dvojic účastníků lichý, tedy se přemisťování nemůže podařit.

Na druhou stranu ukážeme, že pro n tvaru $4k$ nebo $4k+1$ se přemístění cedulek může podařit, pokud se budou znát vhodné dvojice účastníků. Nejdříve mějme n tvaru $4k$ pro k přirozené. Očíslujme si účastníky čísly 1, 2, ..., $4k$. Zvolme si, že dvojice účastníků s čísly a a b, $a < b$ se budou znát, právě když nastane jedna z následujících možností:

(i) $b - a \leq 2k$ a a je liché nebo
(ii) $b - a \geq 2k$ a b je liché.

Všimni si, že v případě $b - a = 2k$ nezáleží na tom, kterou z podmínek volíme.



Na obrázku je znázorněna situace pro $k = 2$, tedy $n = 8$.

Tritas může popřeházet cedulky tak, že cedulku se jménem účastníka s číslem c umístí tam, kde byla cedulka s účastníkem s číslem $f(c) = c + 1$, pokud $c < 4k$, nebo s číslem $f(4k) = 1$ pokud $c = 4k$. Teď už jen zbývá ověřit, že jsou splněny podmínky zadání.

Chceme tedy dokázat, že účastnící s čísly a, b, $a < b$ se před soustředěním znali, právě když se účastnící s čísly $a + 1$ a $f(b)$ před soustředěním neznali.

Pokud $b < 4k$, potom $f(b) = b + 1 > a + 1$. Potom i platí, že $b - a = (b + 1) - (a + 1)$. Zbytek plyne snadno z toho, že a je liché, právě když $a + 1$ není liché (případ (i)), resp. b je liché, právě když $b + 1$ není liché (případ (ii)).

Pokud $b = 4k$, potom $f(b) = 1 < a + 1$. Tedy $a + 1$ a $f(b)$ se znají, právě když:

(i) $a = (a + 1) - f(b) \leq 2k$ a $1 = f(b)$ je liché nebo
(ii) $a = (a + 1) - f(b) \geq 2k$ a $a + 1$ je liché číslo.

Je-li $a \geq 2k$, potom $b - a = 4k - a \leq 2k$ a a a b se znají, právě když je a liché, což nastává, právě když $a + 1$ není liché, tj. podle (ii), $a + 1$ a $f(b)$ se neznají.

Naopak, je-li $a \leq 2k$, potom $b - a \geq 2k$ a a a b se znají, právě když je $4k$ liché, což nastane právě když není 1 liché číslo, což je podle (i) ekvivalentní s tím, že a a $f(b)$ se neznají.

Nyní ještě zbývá vyřešit situaci pro $4k+1$ účastníků. Oproti situaci pro $4k$ účastníků, přidáme ještě účastníka s číslem $4k + 1$, který se bude znát právě s účastníky s lichými čísly. Snadno si můžeš ověřit, že i v tomto případě jsou podmínka zadání splněny (když Tritas účastníka s číslem $4k + 1$ přemisťovat nebude a ostatní posune jako v předchozím případě).

2. úloha **(28, 21, 2,43, 2,0)**

(a) Všechna sudá kombinační čísla[4] obarvíme červeně; všechna lichá čísla obarvíme modře. Dokažte, že pro každé $n \geq 3$ a $0 \leq k \leq 3$ mají čísla $\binom{n}{k}$ a $\binom{n+4}{k}$ stejnou barvu.

(b) Buď p libovolné prvočíslo. Najděte všechna přirozená čísla n taková, že p dělí $\binom{n}{k}$ pro každé $k \in 1, 2, \ldots, n - 1$.

Řešení podle Zbyňka Konečného

(a) Postupně rozebereme možné hodnoty k a u každé zjistíme, jakou mají čísla barvu:

(i) $k = 0$: Obě kombinační čísla jsou rovna 1, a tedy jsou obě modrá.

[4]Kombinační číslo $\binom{n}{k}$ je definované jako $\frac{n!}{(n-k)!k!}$.

(ii) $k = 1$: První z čísel je n, druhé $n+4$, mají tedy stejnou paritu (to je jen způsob, jak vznešeně říct, že jsou buď obě sudá nebo obě lichá), a tedy i stejnou barvu.

(iii) $k = 2$: První z čísel je $\frac{n(n-1)}{2}$, druhé $\frac{(n+4)(n+3)}{2}$. $n \equiv n+4 \pmod 4$ a $n-1 \equiv n+3 \pmod 4$, takže také $n(n-1) \equiv (n+4)(n+3) \pmod 4$, a proto platí požadovaný vztah $\frac{n(n-1)}{2} \equiv \frac{(n+4)(n+3)}{2} \pmod 2$.

(iv) $k = 3$: Kombinační čísla jsou rovna $\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$ a $\frac{(n+4)(n+3)(n+2)}{6}$. To, že dávají týž zbytek po dělení 2, se spočítá podobně jako v předchozím příkladě.

(b) Mějme libovolné nenulové celé číslo x. Největší číslo $r \in \mathbb{N}_0$ takové, že $p^r | x$, značme $v_p(x)$ (jde o takzvanou p-valuaci čísla x). Povšimni si toho, že platí následující vztahy (zkus je dokázat, není to těžké):

Pokud $a|b$, pak $v_p(b/a) = v_p(b) - v_p(a)$; pro libovolná c, d platí $v_p(cd) = v_p(c) + v_p(d)$.

Pokud $0 < x + p^a < p^{a+1}$, platí $v_p(x + p^a) = v_p(x)$.

Pokud $v_p(x) < r$, platí $v_p(p^r - x) = v_p(x)$.

A teď už vzhůru do řešení příkladu: Předpokládejme, že pro nějaké celé a je $p^a < n < p^{a+1}$. Pak

$$v_p\left(\binom{n}{p^a}\right) = v_p(n!) - v_p((p^a)!) - v_p((n-p^a)!) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} v_p(i) - \sum_{i=1}^{p^a} v_p(i) - \sum_{i=1}^{n-p^a} v_p(i) = \sum_{i=1}^{n} v_p(i) - \sum_{i=1}^{p^a} v_p(i) - \sum_{i=1}^{n-p^a} v_p(p^a + i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} v_p(i) - \sum_{i=1}^{p^a} v_p(i) - \sum_{i=p^a+1}^{n} v_p(i) = 0,$$

což znamená, že p nedělí $\binom{n}{p^a}$.

Jediná možnost tedy je, že $n = p^r$ pro nějaké celé r. Podobným výpočtem jako před chvílí spočteme, že pak pro libovolné k je

$$v_p\left(\binom{n}{k}\right) = r - v_p(k),$$

což je (vzhledem k tomu, že $k < n = p^r$) kladné číslo, a tedy p dělí $\binom{n}{k}$.

Řešením jsou tedy právě ta n, která jsou mocninou p.

3. úloha **(30, 22, 2,23, 2,0)**

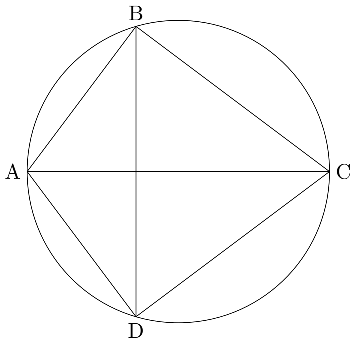
Čtyřúhelník nazveme dvojstředový, právě když existuje kružnice jemu vepsaná i opsaná.

(a) Rozhodněte, jestli čtverec je jediný dvojstředový čtyřúhelník s kolmými úhlopříčkami.

(b) V rovině je dán trojúhelník ABC. Na kružnici opsané trojúhelníku ABC nalezněme body D, E tak, že $3|\sphericalangle ACD| = 3|\sphericalangle DCE| = 3|\sphericalangle ECB| = |\sphericalangle ACB|$. Označme $FGHIJ$ pětiúhelník určený úhlopříčkami pětiúhelníku $ACBED$ (bod F je průsečík úhlopříček AE a BD, bod G je průsečík úhlopříček BD a CE, H je průsečík CE a AB, I je průsečík AB a CD a J průsečík CD a AE). Označme ještě K průsečík úseček GI a JH. Spočítejte velikosti vnitřních úhlů trojúhelníku ABC, víte-li, že čtyřúhelník $FGKJ$ je dvojstředový.

(a) Odpověď zní ne. Najdeme dvojstředový čtyřúhelník s kolmými úhlopříčkami, různý od čtverce. Konstrukce je poměrně jednoduchá. Nejprve si nějak zvolme úhlopříčku AC. Označme

k Thaletovu kružnici nad úsečkou AC. Zvolme bod B ležící na k tak, aby $|AB| \neq |BC|$. Bod D nechť je osově souměrný s bodem B podle AC, tedy i bod D leží na k.



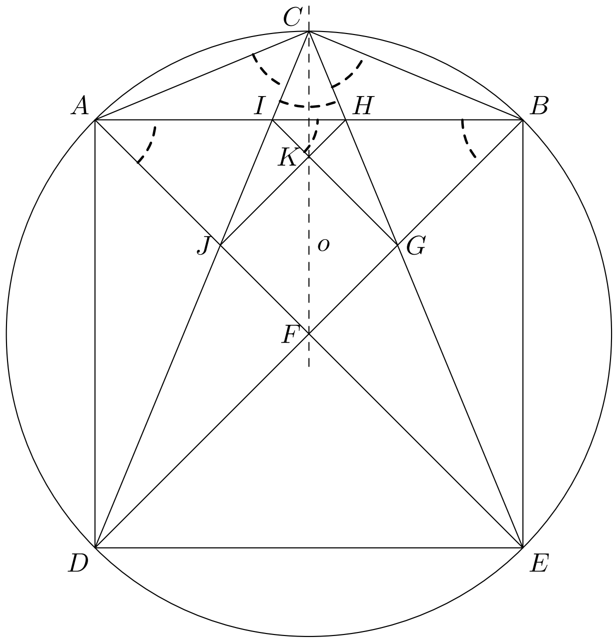
Čtyřúhelník $ABCD$ není čtverec, protože $|AB| \neq |BC|$. Má kolmé úhlopříčky, protože B a D jsou osově souměrné podle AC. Má kružnici opsanou, všechny jeho vrcholy totiž leží na k. Navíc má i kružnici vepsanou, totiž známá charakterizace tvrdí, že čtyřúhelník $ABCD$ má kružnici vepsanou, právě když $|AB| + |CD| = |BC| + |DA|$. Tato rovnost je ale zřejmě splněna, jelikož $|AB| = |AD|$ a $|BC| = |DC|$.

(b) Nejprve dokážeme, že čtyřúhelník $FGKJ$ je rovnoběžník. Označme $\vartheta = |\sphericalangle ACD| = |\sphericalangle DCE| = |\sphericalangle ECB|$. Podle věty o obvodových úhlech (nad tětivou BE) je $|\sphericalangle EAB| = \vartheta$, podobně $|\sphericalangle DBA| = \vartheta$. Odtud plyne, že čtyřúhelník $IGBC$ je tětivový (totiž $|\sphericalangle ICG| = \vartheta = |\sphericalangle IBG|$; sleduj obrázek). Odtud plyne (podle obvodových úhlů nad BG v $ICBG$), že $|\sphericalangle BIG| = \vartheta$. Tedy přímky GI a EA jsou rovnoběžné (obě svírají s AB úhel ϑ). Speciálně jsou tedy strany GK a FJ čtyřúhelníku rovnoběžné. Analogickým způsobem se zdůvodní, že FG a JK jsou rovnoběžné. Tedy $FGKJ$ je rovnoběžník.

Z předpokladů zadání je $FGKJ$ dvojstředový. Dokážeme, že už se jedná nutně o čtverec. Totiž, jelikož má $FGKJ$ kružnici opsanou, tak musí být součet protilehlých úhlů roven $180°$. V rovnoběžníku jsou protilehlé úhly shodné, tudíž rovny $90°$. Odtud je $FGKJ$ pravoúhelník[5]. Jenže jediný pravoúhelník, pro nějž existuje kružnice vepsaná, je čtverec, tedy $FGKJ$ je čtverec.

Trojúhelník ABF je rovnoramenný ($\vartheta = |\sphericalangle FAB| = |\sphericalangle FBA|$), na druhou stranu má úhel u vrcholu F pravý, jelikož $FGKJ$ je čtverec. Odtud máme, že $\vartheta = 45°$, a tedy $|\sphericalangle ACB| = 3\vartheta = 135°$.

[5] Pravoúhelník je společné označení pro obdélník a čtverec.



Všechny vyznačené čárkované úhly mají velikost ϑ.

Abychom zjistili i zbývající vnitřní úhly ABC, stačí dokázat, že ABC je rovnoramenný. Připomeňme si, že trojúhelník ABF, je pravoúhlý rovnoramenný s pravým úhlem u vrcholu F. Nechť o je osa symetrie ABF (prochází bodem F a středem AB – je osou úsečky AB). Symetrie podle o převádí bod G na J a naopak, jelikož $FGKJ$ je čtverec. Tedy bod K také leží na této ose, odtud plyne, že symetrie převádí H na I a naopak. Speciálně tedy daná symetrie převádí přímku GH na JI. Bod C je průsečíkem těchto dvou přímek, tudíž C leží na o. Nicméně o, jak jsme ji definovali, je osou úsečky AB, tedy $|AC| = |BC|$. Odtud je ABC rovnoramenný.

Jelikož už víme, že $|\sphericalangle ACB| = 135°$, dostáváme tak, že $|\sphericalangle CAB| = |\sphericalangle ABC| = 22,5°$.

4. úloha **(16, 5, 1,38, 1,0)**

Hezkou funkcionální rovnicí rozumíme funkcionální rovnici s proměnnými $x, y, z, t, \ldots$ a neznámou funkcí $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takovou, že:

(i) Proměnné a výrazy, které dostaneme pomocí funkce f, můžeme navzájem sčítat, odčítat a násobit; také můžeme přičítat, odčítat a násobit reálnými čísly; můžeme také jakýkoli výraz umocnit na přirozené číslo. Žádné jiné operace se v rovnici vyskytnout nesmí.

(ii) Proměnné se v rovnici vyskytují pouze uvnitř funkce f.

(iii) Funkce f se nevyskytuje uvnitř sebe.

Například tedy[6]:

[6] Obecně je rovnice hezká právě když obě její strany vypadají jako $P(f(V_1(x, y, \ldots)), \ldots$
$\ldots, f(V_k(x, y, \ldots)))$, kde $P, V_1, \ldots, V_k$ jsou mnohočleny (obecně několika proměnných).

- V hezké rovnici se nesmí vyskytnout výrazy x^y, $\sin x$, $\sqrt{x}$, $\frac{x+3yz}{2z}$ – všechny odporují prvnímu bodu.
- Rovnice $f(x+y) - f(z) = x^2 - f(yz)$ není hezká – proměnná x z prvního členu na pravé straně se nevyskytuje uvnitř funkce f; z podobného důvodu není hezká ani rovnice $f(y)(2z - f(y-z)) = f(z)$.
- V hezké rovnici se také (kvůli bodu iii) nesmí vyskytnout výrazy $f(x+f(y))$, $f(f(x+3z)-1)$ a $f((f(x)-y)^2)$
- Na druhou stranu třeba rovnice $f(3xy-2)(2+5f(z^2)) + (f(x))^2 = f(x^4 - yz) + 187$ hezká je.

(a) Zvolte si libovolná **nenulová** $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Najděte hezkou funkcionální rovnici takovou, že jediná lineární funkce (tedy funkce tvaru $f(x) = ax + b$, kde $a, b \in \mathbb{R}$), která ji řeší, je funkce $f(x) = \alpha x + \beta$.

Například kdybychom zapomněli na podmínku o nenulovosti a zvolili si $\alpha = 0, \beta = 211$, hledanou hezkou rovnicí by byla třeba rovnice $f(x) = 211$.

(b) Najděte hezkou funkcionální rovnici, jejímž řešením bude $f(x) = \sin x$, ale kterou nebude řešit žádný polynom[7].

(a) Chvilku budeme zkoušet různé možnosti, až se dostaneme třeba k funkci $f(x) = 2x-4$, která řeší rovnici $(f(x+1))^2 + 4f(x) + 4 = 2f(x^2)$. Dokažme, že žádná jiná funkce tvaru $f(x) = ax+b$ ji neřeší. Dosazením obecné funkce tohoto tvaru dostaneme $(a(x+1)+b)^2 + 4(ax+b) + 4 = 2(ax^2+b)$, což upravíme do tvaru

$$x^2(a^2 - 2a) + 2x(a^2 + ab + 2a) + ((a+b)^2 + 2b + 4) = 0.$$

Tato rovnost má být splněna pro každé x, musí tedy být $a^2 - 2a = 0$, $a^2 + ab + 2a = 0$ a $(a+b)^2 + 2b + 4 = 0$.

Máme dvě možné hodnoty a:

(i) $a = 0$: Pak třetí rovnice říká, že $b^2 + 2b + 4 = 0$, což neplatí pro žádné reálné b.
(ii) $a = 2$: Podle druhé rovnice pak $b = -4$, což vyhovuje i třetí rovnici.

Funkce $f(x) = 2x - 4$ je tedy jedinou funkcí daného tvaru, která řeší nalezenou rovnici. Navíc je vidět, že naše rovnice (ač tak moc nevypadá (:) je hezká.

(b) Na začátek bude dobré si uvědomit, jak „spojit" dvě rovnice do jedné. Mějme rovnice $A = B$ a $P = Q$, kde A, B, P, Q jsou nějaké výrazy. Uvažujme rovnici $(A-B)^2 + (P-Q)^2 = 0$. Má-li tato rovnice nějaké řešení, musí platit $A - B = 0$ a $P - Q = 0$, jsou tedy splněny obě původní rovnice. Obdobně bychom mohli spojit víc než jen dvě rovnice, stačí nám tedy najít soustavu rovnic s požadovanými řešeními, jednu rovnici z ní pak snadno vyrobíme.

Jaké vlastnosti má sinus a nemá většina polynomů? Inu, sinus je například periodická funkce. Zvolme tedy za první rovnici $f(x) = f(x + 2\pi)$. Pokud ses lekl (lekla) toho, že se tam najednou objevilo jakési π, nenech se zastrašit – když se pracuje s rovnicemi obsahujícími goniometrické funkce (tedy třeba sinus, kosinus, tangens, ...), obvykle se velikosti úhlů vyjadřují v radiánech místo ve stupních. Nu, a π odpovídá úhlu $180°$. Klidně si tedy všude můžeš místo π představit $180°$. Ale zpět k naší rovnici. Ta říká, že funkce, která ji řeší, musí mít periodu 2π. Žádný nekonstantní polynom ale není periodický (rozmysli si; bude se Ti hodit, že každý nenulový

[7] Polynom (jedné proměnné) je libovolná funkce tvaru $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, kde $a_i \in \mathbb{R}$ pro každé i.

polynom má jen konečně mnoho kořenů)! Řeší-li tedy nějaký polynom tuto rovnici, je nutně tvaru $P(x) = c$ pro nějaké reálné číslo c.

Teď už stačí jen přidat dvě rovnice $f(0) = 0$ a $f(\pi/2) = 1$, které sinus splňuje, ale konstantní funkce určitě ne.

Z těchto tří rovnic pak sestavíme řešení úlohy, hezkou rovnici

$$(f(x) - f(x + 2\pi))^2 + (f(0) - 0)^2 + (f(\pi/2) - 1)^2 = 0.$$

5. úloha **(26, 24, 2,23, 2,0)**

(a) Když si Saša chce dát pauzu od přípravy čínského vydání komentářů, vezme si krychlové stavebnicové kostičky a začne z nich stavět (čínskou) zeď. Správná zeď vypadá tak, že Saša nejprve postaví několik kostiček vedle sebe. Potom na každou z už postavených kostiček Saša může a nemusí postavit ještě určitý počet dalších kostiček. Určete, kolik různých zdí (Sašovi se nechce zdi otáčet, takže za různé považuje i zrcadlově symetrické dvojice) obsahujících právě 9 kostiček může Saša postavit.

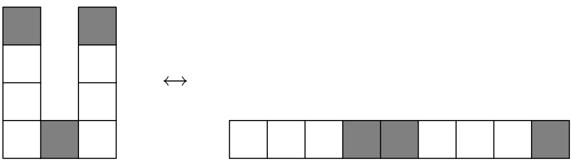
(b) Občas se Sašových kostiček zmocní Martin, zvolí si přirozené číslo n a začne stavět věže. Klade si následující podmínky:

(i) Ve spodní vrstvě je právě n kostiček (tj. počet věží je n).
(ii) Právě jedna věž má výšku $n + 1$, ostatní jsou nižší.
(iii) Kdykoliv jsou v_1, v_2, v_3 výšky tří vedle sebe stojících věží (v_2 je výška prostřední z nich), potom nejvýše jedno z čísel v_1, v_3 je větší než v_2.

Určete pro dané n, kolik různých věží může Martin postavit (ani Martinovi se nechce věže otáčet).

(a) **První řešení**

Představme si, že Saša staví zdi z červených kostiček, a kdykoliv nějakou zeď dostaví, obarví vrchní kostičky zeleně. Potom tyto kostičky přestaví do posloupnosti tak, že nejprve bude odspoda stavět kostičky nejlevějšího, potom druhého nejlevějšího, atd. až nakonec nejpravějšího sloupce. Dostane tak nějakou posloupnost devíti kostiček, z nichž některé jsou zelené a některé červené. Poslední kostička musí být zelená. Naopak, dostane-li Saša zadanou posloupnost devíti červených či zelených kostiček, z nichž poslední kostička je zelená, potom z ní umí poskládat zeď (za každou zelenou kostičkou staví nový sloupec).



Zelené kostičky jsou plné, červené prázdné.

Tedy počet Sašových věží je stejný jako počet posloupností s devíti (červenými či zelenými) kostičkami takových, že poslední kostička je zelená. Pro každou z prvních osmi kostiček má tedy Saša dvě možnosti obarvení. Počet všech možností je tedy $2^8 = 256$.

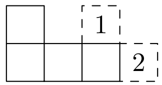
Druhé řešení

Matematickou indukcí budeme dokazovat obecnější tvrzení, že totiž počet zdí, které je možné sestavit pomocí n kostiček, je roven 2^{n-1}. Řešení úlohy dostaneme tak, že zvolíme $n = 9$, tedy $2^8 = 256$ zdí.

První indukční krok pro $n = 1$ je triviální.

V druhém indukčním kroku předpokládejme, že s $n - 1$ kostičkami umí Saša postavit přesně 2^{n-2} zdí. Dokážeme, že s n kostičkami může Saša postavit přesně 2^{n-1} zdí.

Předpokládejme, že Saša má postavenu nějakou zeď s $n - 1$ kostičkami. Ke každé takové zdi bude Saša přidávat jednu kostičku tak, aby získal zeď s n kostičkami. Vybere si vždy jednu ze dvou možností, buď kostičku přidá na vrch nejpravějšího sloupce, nebo kostičku postaví napravo vedle nejpravějšího sloupce (vytvoří tím nový sloupec o jedné kostičce).

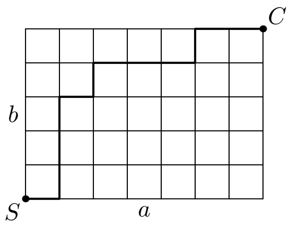


Nyní už je snadné si uvědomit, že každou zeď s n kostičkami lze takto jednoznačným způsobem získat z zdi s $n - 1$ kostičkami (stačí se podívat na nejpravější sloupec a odebrat z něj vrchní kostičku – v případě, že je jednokostičkový – odebíráme tak celý sloupec). Odtud dostáváme, že počet sloupců na n kostičkách je roven dvojnásobku počtu sloupců na $n - 1$ kostičkách, což přesně potřebujeme pro druhý indukční krok.

(b) Nejprve se omluvíme za drobnou nepřesnost v zadání: aby úloha dávala smysl, mají se počítat samozřejmě počty věžových konfigurací a ne pouze počty věží samotných.

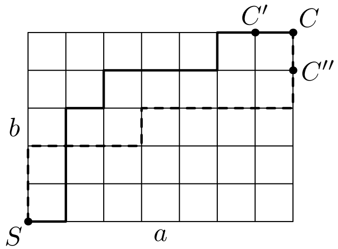
Než začneme úlohu řešit, povíme si něco o počtu cest v mřížkách. Tyto poznatky posléze využijeme pro řešení úlohy.

Představme si, že máme mřížku o rozměrech $a \times b$ (je sestavena z $a + 1$ svislých a $b + 1$ vodorovných úseček – podívej se na obrázek). Označme S (start) levý dolní bod mřížky a C (cíl) pravý horní bod mřížky. Počítejme počet cest, které vedou mřížkou pouze nahoru a doprava z bodu S do bodu C.



Potom platí (♡), že počet takových cest je $\binom{a+b}{a} = \binom{a+b}{b}$.

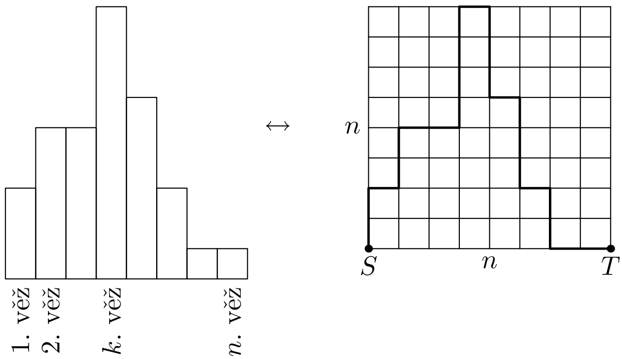
Důkaz se velmi snadno provede indukcí (podle součtu $a + b$); pokud je ti důkaz jasný, vynech následující dva odstavce. V prvním indukčním kroku si uvědomíme, že je-li $a = 0$ nebo $b = 0$, potom máme pouze jednu možnou cestu, což je $\binom{a+b}{0}$. V druhém indukčním kroku předpokládáme, že $a \geq 1$, $b \geq 1$. Označme C' bod vedle C nalevo od C a C'' bod vedle C pod C. Cesty z S do C můžeme rozdělit na ty, které procházejí bodem C' a na ty, které procházejí bodem C''.



Z indukčního předpokladu je počet cest procházejících C' roven $\binom{a+b-1}{a-1}$ a počet cest procházejících C'' je $\binom{a+b-1}{a}$. Dohromady to je $\binom{a+b}{a}$ (spočítej si), což jsme chtěli dokázat.

Nyní začneme řešit zadanou úlohu. Myšlenkou bude, že počet zdí interpretujeme jako počet cest ve vhodné mřížce, čímž úlohu vyřešíme.

Pro každou věžovou konfiguraci si označíme jako významnou k-tou věž tu, která má výšku $n+1$. Dále převedeme konfiguraci na cestu v mřížce $n \times n$ z levého dolního vrcholu S do pravého dolního vrcholu T tak, jak je naznačeno na obrázku (zapomeneme spodní vrstvu a cestu tvoří „obrys“ konfigurace).

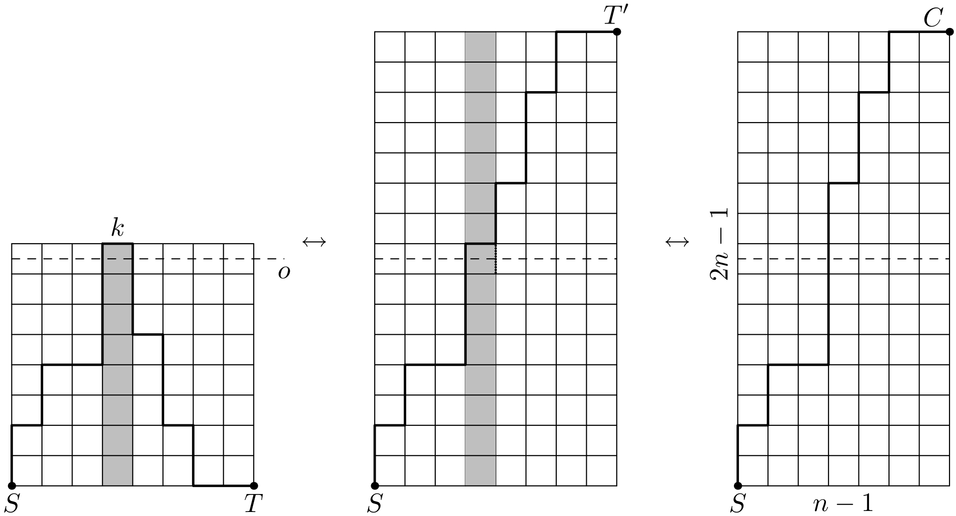


Podle podmínky (ii) cesta z S do T má právě jeden (k-tý) úsek na vrchní hraně mřížky. Podle podmínky (iii) do k-tého úseku vede pouze zleva doprava nebo zdola nahoru, a od k-tého úseku vede pouze zleva doprava nebo seshora dolů (rozmysli si).

Naopak, máme-li cestu z S do T, která splňuje výše uvedené podmínky, lze ji snadno převést na konfiguraci věží. K vyřešení úlohy stačí tedy spočítat počet zmiňovaných cest.

A nyní přidáme ještě jednu fintu. Označme o přímku procházející středy vrchních čtverců mřížky.

Nejprve převrátíme úsek cesty za k-tou věží podle osy o. Dostaneme tak nějakou cestu z bodu S do pravého horního vrcholu T' mřížky $n \times (2n-1)$ (při převracení podle o vznikne v cestě navíc slepý svislý úsek délky 1, toho si nebudeme všímat). Cesta z S do T' má ještě jednu speciální vlastnost, a sice že má právě jeden vodorovný úsek ve výšce n (a to ve sloupci odpovídajícímu k-té věži).



Nakonec ještě sloupec odpovídající k-té věži umažeme, dostaneme tak cestu z vrcholu S do pravého horního rohu C mřížky $(n-1)\times(2n-1)$.

Důležité u tohoto postupu je to, že ho lze provést i zpětně. Máme-li cestu z S do C která vede pouze zleva doprava a zdola nahoru, lze ji převést na cestu z S do T (a posléze na věžovou konfiguraci). Nejprve potřebujeme doplnit jeden sloupec (abychom získali cestu z S do T'). Který sloupec máme doplnit, poznáme podle toho, kde cesta poprvé dosáhne vodorovnou úsečku ve výšce n. A když už známe k-tý sloupec, víme, kterou část cesty máme obracet podle o (rozmysli si všechny detaily).

Dostáváme tedy, že počet věžových konfigurací je roven počtu cest z S do C v mřížce $(n-1)\times(2n-1)$. Tento počet jsme si spočítali na začátku. Tedy hledaný počet věžových konfigurací je:

$$\binom{(n-1)+(2n-1)}{n-1}=\binom{3n-2}{n-1}.$$

6. úloha **(23, 19, 2,00, 2,0)**

(a) Najděte všechna celočíselná řešení rovnice $(x+y+z)^3=x^3+y^3+z^3$.

(b) Najděte všechna celočíselná řešení rovnice $(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2$.

(a) Roznásobením levé strany a jednoduchou úpravou rovnici převedeme do tvaru

$$x^2y+x^2z+y^2z+yz^2+xy^2+xz^2+2xyz=0,$$

což dále upravíme na

$$0=x^2(y+z)+yz(y+z)+x(y+z)^2=(y+z)(x^2+yz+xy+xz)=(y+z)(x+y)(x+z).$$

Aspoň jedna ze závorek je tedy nulová, nechť třeba $y+z=0$, tedy $z=-y$.

Dosazením do zadání zjistíme, že libovolná trojice tvaru $(x, y, -y)$ je řešením; obdobně i trojice $(x, -x, z)$ a $(x, y, -x)$ jsou řešeními.

(b) Úpravou rovnici převedeme do tvaru $xy + yz + zx = 0$, neboli též $z(x + y) = -xy$. Je-li $x + y = 0$, je také $xy = 0$, a tedy musí být $x = y = 0$. Dál předpokládejme, že $x + y \neq 0$.

Pak $z = \frac{xy}{x+y}$, a tedy $x+y|xy$. Označme d největší společný dělitel x a y, ať je $x = dm$, $y = dn$. Pak m a n jsou nesoudělná, takže i čísla $m + n$ a mn jsou nesoudělná. Protože $m + n|dmn$, musí platit $m + n|d$, a tedy existuje k takové, že $d = k(m + n)$. Pak $x = km(m + n)$, $y = kn(m + n)$, $z = kmn$ je zjevně řešením dané rovnice.

Všechna řešení tedy vypadají následovně: $(x, 0, 0)$ pro libovolné x a dále pak všechny trojice tvaru $(km(m + n), kn(m + n), kmn)$, kde $k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ a m, n jsou nesoudělná celá čísla, z nichž je aspoň jedno nenulové.

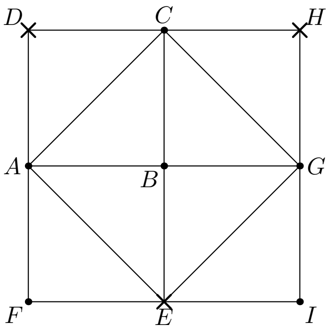
7. úloha **(24, 21, 1,92, 2,0)**

Každý bod roviny obarvíme jednou ze dvou barev: červeně, nebo modře.

(a) Dokažte, že v rovině existuje čtverec, který má sudý počet vrcholů obarvených červeně.

(b) Mějme pevně dána čísla $a, b, c > 0$ splňující trojúhelníkovou nerovnost. Předpokládejme, že jsme v rovině našli rovnostranný trojúhelník o straně délky a takový, že jeho všechny tři vrcholy mají stejnou barvu. Dokažte, že v rovině existuje trojúhelník o stranách délek a, b, c takový, že jeho všechny tři vrcholy mají stejnou barvu.

(a) Pro spor předpokládejme, že každý čtverec má lichý počet červených vrcholů, tj. každý čtverec má 3 vrcholy jedné barvy a 1 vrchol druhé barvy.



Na obrázku jsou značeny modré body tečkou a červené křížkem.

Zvolme si v rovině libovolný čtverec $ABCD$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že vrcholy A, B a C jsou modré a vrchol D červený. Ke čtverci $ABCD$ (podle obrázku) ještě připíšeme čtverce $ABEF$ a $BGHC$. Bod I zvolíme tak, aby $BGIE$ byl čtverec. $ACGE$ je čtverec, jehož vrcholy A a C jsou modré. Protože má mít lichý počet červených vrcholů, musí být jeden z vrcholů E, G červený a jeden modrý. Ze symetrie podle přímky BD můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že G je modrý a E červený.

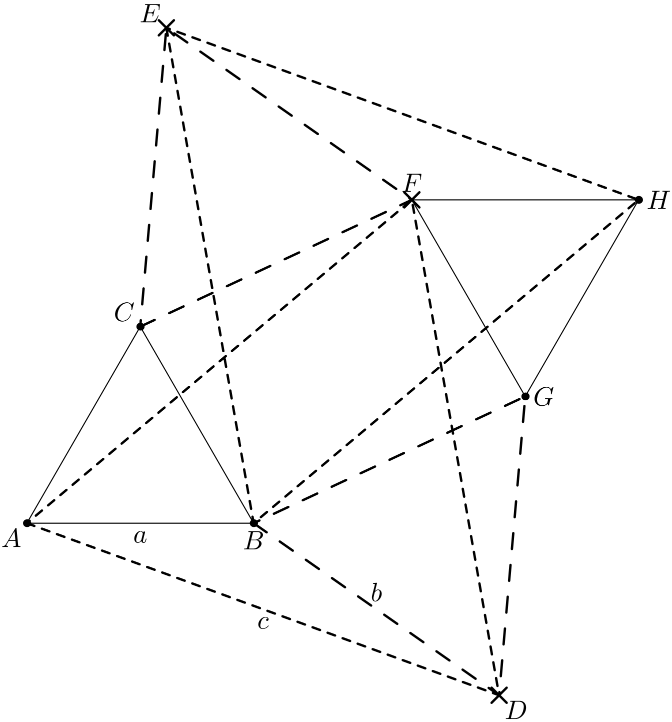
Ve čtverci $BGHC$ musí být bod H červený, jelikož zbylé tři body jsou modré. Podobně F je modrý podle čtverce $ABEF$ a I je modrý podle čtverce $BGIE$. Jenže potom jsou ve čtverci $FIHD$ dva body modré a dva body červené, spor!

(b) Zvolíme podobný přístup k řešení jako u části (a) – totiž budeme předpokládat, že všechny trojúhelníky se stranami a, b a c jsou různobarevné a odvodíme spor, čímž úlohu vyřešíme.

Označme si ABC stejnobarevný rovnostranný trojúhelník s délkou strany a ze zadání. Bez újmy na obecnosti budeme předpokládat, že jsou jeho vrcholy modré.

Nyní začneme dokreslovat, sleduj obrázek. Dokresleme bod D tak, aby $|BD| = b$ a $|AD| = c$. To se nám podaří, neboť a, b, c splňují trojúhelníkovou nerovnost. Otočme bod D podle bodu A v kladném směru o úhel 60° na bod F (tedy trojúhelník ADF je rovnostranný s délkou hrany c a navíc $|CF| = |BD| = b$, totiž bod B se při tomto otočení otáčí na bod C). Otočme bod F podle bodu C v kladném směru o úhel 60° na bod E. Podobně jako v předchozím případě je CFE rovnostranný s délkou hrany b a $|EB| = |AF| = c$. A budeme otáčet dále, bod H nechť vznikne otočením B podle E, opět o 60° v kladném směru – trojúhelník BEH je rovnostranný s délkou strany c a $|FH| = |BC| = a$. Bod G nechť vznikne otočením F podle H i nyní o 60° v kladném směru – tentokráte odvodíme, že FGH je rovnostranný se stranou délky a a $|BG| = |EF| = b$. Nakonec budeme chtít odvodit, že i trojúhelník BDG je rovnostranný (zatím známe dvě strany $|BD| = |BG| = b$). Uvědomíme si celý proces otáčení postupně. Když začneme od úsečky BD, tak ji postupně otáčíme o 60° v kladném směru na CF, potom CE, EF a BG. Dohromady tedy otáčíme o $5 \cdot 60^\circ = 300^\circ$ v kladném směru, neboli o 60° ve směru záporném. Tedy BD a BG svírají úhel 60°, odkud je trojúhelník BDG rovnostranný.

Na obrázku se nyní vyskytuje 6 významných trojúhelníků se stranami a, b a c, a to trojúhelníky ABD, BCE, ACF, DFG, EFH a BGH. O bodech A, B a C víme, že jsou modré. Mají-li být trojúhelníky ABD, BCE a ACF různobarevné, potom body D, E a F musejí být červené. Dále, mají-li být DFG a EFH různobarevné, potom G a H jsou modré. Tím, ale dostáváme spor, s předpokladem že BGH (mající strany délek a, b a c) je různobarevný, protože body B, G i H jsou modré.



Úsečky stejné délky jsou značeny stejným typem čáry.
Opět jsou modré body značeny tečkou a červené křížkem.