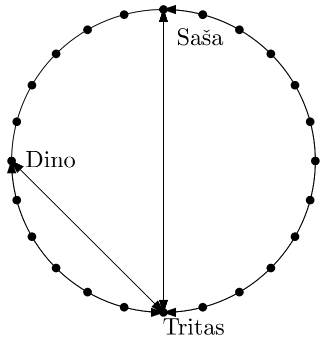
Seriál – Metrické prostory I

Letošní seriál se Tě pokusí lehce seznámit s metrickými prostory. Základní myšlenkou bude, že zobecníme vzdálenost (v rovině, prostoru, apod.) na takzvanou metriku a podíváme se na nějaké její zajímavé vlastnosti.

Pro začátek si uvedeme pár příkladů, čím můžou být různé druhy vzdáleností (metrik) zajímavé.

Motivace první

Dvacet čtyři organizátorů Prasátka sedí kolem kruhového stolu o poloměru 4. Dino a Tritas mají mezi sebou 5 jiných organizátorů, mají tedy mezi sebou vzdálenost $4\sqrt{2}$. Saša sedí naproti Tritasovi, má od něj tedy vzdálenost 8. Kdyby nás ale napadlo vzdálenost měřit po obvodu stolu, zjistíme, že Tritas a Dino mají *vzdálenost* 6 dílků[1], zatímco Tritas a Saša mají *vzdálenost* 12 dílků. Všimni si, že tyto dva druhy vzdáleností jsou v určitém smyslu nesrovnatelné, totiž není pravda, že by byla jedna pouze násobkem druhé.



První druh vzdálenosti je běžně používaná eukleidovská vzdálenost a má mnoho aplikací. Nicméně i druhá *vzdálenost* najde své opodstatnění, představ si úlohu, která bude začínat tak, že $4k+1$ organizátorů sedí okolo kulatého stolu a z libovolných dvou ve *vzdálenosti* $k+2$ alespoň jeden popíjí džus. Teď si představ, že místo *vzdálenosti* $k+2$ by se měla používat eukleidovská vzdálenost. Jednalo by se jistě o ošklivý výraz se siny a kosiny a pointa úlohy by se ztratila v práci s takovým výrazem.

Motivace druhá

Druhá motivace bude spojena přímo s reálným životem. Představte si, že potřebujete cestovat vlakem mezi nějakými dvěma českými městy. Potom jako délku jízdy vlakem nelze jednoduše měřit vzdušnou vzdálenost mezi těmito městy, ale je potřeba počítat s tím, že vlak jezdí jenom po kolejích, a tudíž bude ujetá vzdálenost delší. I v tomto případě je vzdálenost ujetá vlakem v jistém smyslu nesrovnatelná se vzdušnou. Totiž mezi Prahou a Pardubicemi je železnice relativně přímá, a tak se vzdušná vzdálenost od vzdálenosti po kolejích téměř neliší. Mezi Prahou a Brnem už tak přímá cesta není (jezdí se přes Českou Třebovou) – cesta po železnici je o kus delší než vzdušná vzdálenost.

---

[1] V tomto konkrétním případě má jeden dílek velikost $\frac{2\cdot\pi\cdot 4}{12} = \frac{\pi}{3}$.

Eukleidovská vzdálenost

Nyní se budeme podrobněji zabývat eukleidovskou vzdáleností, kterou jistě znáš z geometrie. Pokud jsi ve vyšším ročníku gymnázia, pravděpodobně se v této části mnoho nového nedozvíš – je koncipovaná především pro mladší.

Zkusme se zamyslet nad následující velmi jednoduchou úlohou z geometrie:

Příklad. V pravoúhlém trojúhelníku ABC s pravým úhlem u vrcholu A víme, že $|AB| = 3$, $|AC| = 4$. Určete vzdálenost bodů B a C.

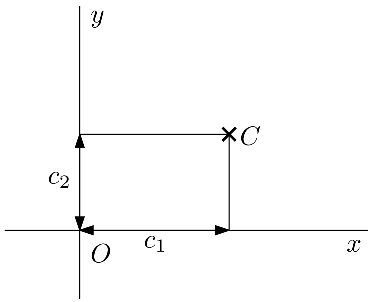
Řešení je nasnadě, z Pythagorovy věty plyne, že

$$|BC| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5.$$

Nyní se ale zamysleme nad úlohou z jiného pohledu. Co je ve skutečnosti vzdálenost bodů B a C? Dalo by se říci, že je to něco, co naměříme pravítkem, když si narýsujeme obrázek podle zadání. Máme však tak dobré pravítko, aby umělo rozlišit 5 a $5,0000000758$?

Abychom věděli, co přesně vzdálenost je, potřebujeme si ji nějakým způsobem zavést. Zavedeme si eukleidovskou vzdálenost pomocí kartézského souřadnicového systému. Pro začátek si v rovině zvolíme dvě navzájem kolmé přímky x a y. Průsečík přímek x a y nazveme[2] O a budeme mu říkat počátek. Přímkám x a y budeme říkat souřadnicové osy, budeme se na ně v podstatě dívat jako na množiny reálných čísel takové, že nulu mají v bodě O. Neformálně řečeno, přímka x bude vodorovná, bude mít kladná čísla napravo od bodu O a záporná nalevo. Jsou-li například body A, B na přímce X takové, že $|AO| = |BO| = 7$ a A je napravo, B nalevo, potom bod A odpovídá číslu 7 a bod B číslu -7. Podobně je y svislá přímka, která má kladná čísla nad bodem O a záporná pod ním.

Máme-li nyní nějaký bod C v rovině, uděláme kolmý průmět C na přímku x a dostaneme číslo c_1, podobně uděláme kolmý průmět na y a dostaneme c_2, potom dvojici (c_1, c_2) nazveme souřadnicemi bodu C. Podívej se na obrázek. Všimni si, že dva různé body mají různé souřadnice!



Takto se lze na množinu bodů v rovině dívat jako na množinu dvojic reálných čísel reprezentujících souřadnice příslušného bodu. Často tedy budeme značit rovinu jako $\mathbb{R}^2$.

Nyní se zamyslíme nad tím, co pro nás bude eukleidovská (obvyklá) vzdálenost. Máme-li dva body $A = (a_1, a_2)$ a $B = (b_1, b_2)$, ptejme se, jakou bychom očekávali vzdálenost bodů A a B. Nakresleme si ještě pomocný bod $C = (b_1, a_2)$. Potom „většinou“ je ABC pravoúhlý trojúhelník s pravým úhlem při C (rozmysli si speciální případy) a podle Pythagorovy věty je:

$$|AB|^2 = |AC|^2 + |BC|^2 = |a_1 - b_1|^2 + |a_2 - b_2|^2 = (a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2.$$

[2] Podle anglického slova origin.

Po odmocnění:

$$|AB| = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}.$$

Tento vzoreček vyjde stejně i v dříve zmiňovaných speciálních případech.

Pro účely budoucího textu si zavedeme značení eukleidovské vzdálenosti. Máme-li dva body (x_1, x_2), $(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$, označíme

$$\rho_e((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}.$$

Od vzdálenosti k metrice

Nyní se pokusíme zobecnit pojem vzdálenosti, tak aby stále vyhovoval příkladům, které jsme si uvedli na začátku. Všimněme si několika zajímavých vlastností eukleidovské vzdálenosti.

(i) Vzdálenost dvou bodů x a y je vždy nezáporná. Přitom vzdálenost x a y je nulová, právě když $x = y$.

(ii) Vzdálenost je symetrická, nezáleží na tom, zda jdeme od bodu x k bodu y, nebo jdeme od bodu y k bodu x.

(iii) „Přímá cesta je nejkratší“, tj. vzdálenost mezi bodem x a y je určitě menší rovna součtu vzdáleností od x do nějakého bodu z a od z do y.

Druhé vlastnosti se obvykle říká symetrie, třetí trojúhelníková nerovnost.

Nyní v podstatě ještě jednou opíšeme předchozí řádky tím, že se konečně dozvíme, co je to metrika a metricky prostor. Naše definice bude o něco formálnější, než způsob, jakým jsme popsali vlastnosti eukleidovské vzdálenosti. Proto měj při čtení definice na zřeteli již dříve zmíněné vlastnosti.

Značka $X \times X$ znamená kartézský součin X se sebou samou – množinu všech dvojic (x_1, x_2), kde $x_1, x_2 \in X$.

Definice. Nechť X je neprázdná množina. Metrikou ρ na množině X budeme rozumět funkci $\rho : X \times X \to \mathbb{R}$ splňující:

(i) $\forall x, y \in X : \rho(x, y) \geq 0$ a navíc $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.

(ii) $\forall x, y \in X : \rho(x, y) = \rho(y, x)$.

(iii) $\forall x, y, z \in X : \rho(x, y) + \rho(y, z) \geq \rho(x, z)$.

Je-li ρ metrika na X, potom dvojici (X, ρ) nazveme metrický prostor.

Množina X je tedy množina, na které měříme (zobecněnou) vzdálenost a $\rho(x, y)$ je (zobecněná) vzdálenost bodů x a y. Nadále se budeme bavit už jen o metrice.

Příklady metrických prostorů

Uvedeme si zde jenom pár příkladů metrických prostorů, podrobněji se jim budeme věnovat v dalším dílu seriálu.

Eukleidovské prostory

Základní příklad už jsme měli. Totiž $(\mathbb{R}^2, \rho_e)$ je metrický prostor, nicméně dokázat trojúhelníkovou nerovnost není tak snadné, jak by se na první pohled mohlo zdát.

Tento příklad se dá ještě zobecnit na příklad $(\mathbb{R}^n, \rho_e)$, kde $\mathbb{R}^n$ je množina n-tic reálných čísel a

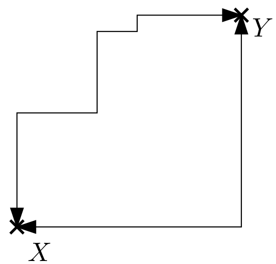
$$\rho_e((x_1, x_2, \ldots, x_n), (y_1, y_2, \ldots, y_n)) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}.$$

Prostoru $\mathbb{R}^n, \rho_e$ se obvykle říká n-rozměrný eukleidovský prostor.

Newyorská metrika

Základní myšlenka newyorské metriky je, že v New Yorku jsou (převážně) jen dva směry ulic. Proto, když se chceme dostat z bodu x do bodu y, nemůžeme jít po přímé cestě, ale můžeme jít pouze ve vodorovném či svislém směru. Matematicky tuto metriku definujeme na $\mathbb{R}^n$ jako $\rho_1 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ s předpisem:

$$\rho_1((x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots y_n)) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + \dots + |x_n - y_n|.$$



Podprostory

Nyní si ještě řekneme způsob, jak z jednoho metrického prostoru dostaneme mnoho jiných. Myšlenka je velmi jednoduchá: nějaké body zapomeneme a máme stále metrický prostor. Přesněji, máme-li metrický prostor (X, ρ) a Y podmnožinu X. Označme σ restrikci[3] ρ na $Y \times Y$, potom (Y, σ) je metrický prostor, který budeme nazývat podprostorem prostoru X. Jelikož se funkce σ na svém definičním oboru shoduje s ρ, budeme často trochu nepřesně psát jen (Y, ρ) namísto (Y, σ).

Nyní si můžeme uvést nějaké příklady, které získáme pomocí podprostorů. Například jako podprostory $(\mathbb{R}^2, \rho_e)$ dostáváme prostory $(\mathbb{Q}^2, \rho_e)$ a dvoubodový prostor, jehož dva body mají vzdálenost 1.

Úsečky

Jako motivaci k třetímu příkladu si povíme ještě něco o úsečkách. Ukážeme si totiž, že ne vše v metrických prostorech funguje tak, jak bychom očekávali. Například bychom mohli očekávat nějaké nejkratší spojnice dvou bodů, které bychom nazývali úsečky. Precizněji by pro nás úsečka v metrickém prostoru (X, ρ) spojující body $x, y \in X$ mohla být množina bodů z takových, že $\rho(x, z) + \rho(z, y) = \rho(x, y)$ (ani trochu si nezajdeme tím, že půjdeme přes bod z). Střed úsečky by potom byl bod, ze kterého je to stejně daleko do x jako do y, tj. bod splňující $\rho(x, s) = \rho(y, s) = \frac{\rho(x,y)}{2}$.

Vzpomeňme si nyní na newyorskou metriku v rovině, tj. v $\mathbb{R}^2$. Máme-li body $x = (0, 0)$ a $y = (1, 1)$, potom definici středu úsečky xy splňují všechny body $(t, 1 - t)$ pro $t \in \langle 0, 1\rangle$ (spočítej si vzdálenosti). Obvykle bychom neočekávali, že úsečka může mít nekonečně mnoho středů. Podobně je vaším úkolem ve třetí úloze najít úsečku, která vůbec střed nemá.

V příštím díle seriálu si uvedeme více příkladů metrických prostorů a nějaké jejich další vlastnosti.

[3]Pokud ti není jasné, co je restrikce, věz, že jenom definiční obor $X \times X$ funkce ρ zužujeme na $Y \times Y$.

Seriál – Metrické prostory II

V dalším dílu seriálu si povíme něco o tzv. maximové a pařížské (pošťácké) metrice. Dále si řekneme něco o kulatých, ale i hranatých koulích. Nakonec se budeme věnovat otevřeným a uzavřeným množinám.

Maximová metrika

Uveďme si další příklad metrického prostoru. Je jím opět $\mathbb{R}^n$, ale tentokrát s takzvanou maximovou[4] metrikou ρ_∞.

$$\rho_\infty((x_1, x_2, \ldots, x_n), (y_1, y_2, \ldots y_n)) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|, \ldots, |x_n - y_n|\}$$

Zkusíme jednou pořádně ověřit, že se jedná o metrický prostor.

První podmínka je splněna, jelikož maximum z nezáporných čísel je vždy nezáporné číslo. Navíc je toto číslo nulové, právě když jsou všechna čísla, ze kterých děláme maximum, nulová. To nastane, právě když body $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ a $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ splývají.

Druhá podmínka je zřejmá.

V třetí podmínce (trojúhelníkové nerovnosti) potřebujeme pro body $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ a $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$ ověřit, že platí $\rho_\infty(x, y) + \rho_\infty(y, z) \geq \rho_\infty(x, z)$. Nechť $\rho_\infty(x, y) = |x_i - y_i|$ pro vhodné $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $\rho_\infty(y, z) = |y_j - z_j|$ pro vhodné $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ a $\rho_\infty(x, z) = |x_k - z_k|$ pro vhodné $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Potom platí

$$\rho_\infty(x, y) + \rho_\infty(y, z) = |x_i - y_i| + |y_j - y_j| \geq |x_k - y_k| + |y_k - z_k| \geq |x_k - y_k|.$$

V první nerovnosti jsme využili toho, že $|x_i - y_i|$ je maximum množiny $\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|, \ldots$ $\ldots, |x_n - y_n|\}$, tedy $|x_i - y_i| \geq |x_k - y_k|$ a podobně s druhým analogickým výrazem. V druhé nerovnosti jsme využili toho, že $(\mathbb{R}, \rho_e)$ je metrický prostor[5], kde připomínáme, že ρ_e je eukleidovská metrika (pořádně si rozmysli).

Pařížská (pošťácká) metrika

K naší další metrice si opět najdeme motivaci ze života. Potřebujete-li se dostat z jednoho francouzského města do druhého (vlakem), dost často se vám stane, že prvně musíte dojet do Paříže a až z Paříže se můžete vydat do cílové destinace. A to je přesně motivace k naši další metrice. Bude se opět jednat o metriku na $\mathbb{R}^n$ a označíme ji ρ_p. V této metrice bude mít počátek specifickou roli. Pro x, $y \in \mathbb{R}^n$ definujeme:

$$\rho_p(x, y) = \rho_e(x, y),$$

pokud x a y leží s počátkem na téže přímce a

$$\rho_p(x, y) = \rho_e(x, O) + \rho_e(O, y),$$

jinak. Zde bod O značí počátek, tj. bod $(0, 0, \ldots 0)$.

Vaším úkolem bude dokázat, že se jedná o metriku.

---

[4]Nelekni se indexu ∞, jeho původ je v takzvaných p-metrikách. My se tohoto indexu budeme držet jenom kvůli tomu, že se jedná o standardní značení.

[5]Tím se odkazujeme na tvrzení, které jsme v minulém dílu seriálu nedokázali – nicméně v jednodimenzionálním případě je poměrně jednoduché.

Koule v metrických prostorech

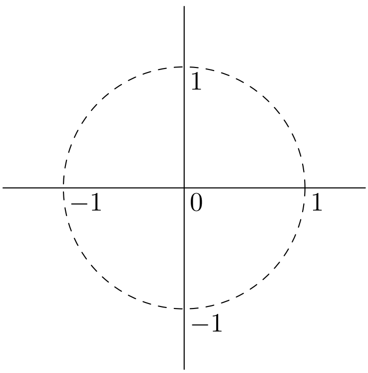
V této kapitole si zobecníme pojem koule (kruhu) v metrických prostorech a zjistíme, že můžeme dostat všelijaké zajímavé útvary.

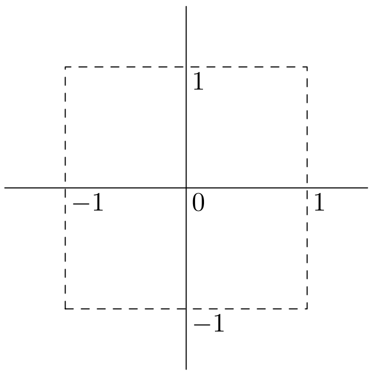
V eukleidovském prostoru se kruh (koule) se středem S a poloměrem r obvykle definuje jako množina všech bodů, které mají od bodu S vzdálenost nejvýše (méně než) r. Proč tuto definici nepoužít pro metrické prostory?

Definice. Nechť (X, ρ) je metrický prostor. Koulí se středem x a poloměrem r budeme rozumět množinu[6] $B_\rho(x, r) = \{y \in X | \rho(x, y) < r\}$.

Všimni si, že v definici koule chceme jenom body ve vzdálenosti menší než r, tato definice je vhodnější pro pozdější aplikace. Index v definici koule, bude-li metrika ρ jasná, budeme často vynechávat.

Nyní přijdou na řadu obrázky koulí v různých metrikách. Na obrázku najdeš koule se středem v počátku a poloměrem 1 v $\mathbb{R}^2$ vlevo v eukleidovské metrice a vpravo v maximové metrice (přesněji řečeno – pro přehlednost obrázků – jejich hranice). V 5. úloze bude tvým úkolem nakreslit kouli v newyorské a pařížské metrice.





Otevřené a uzavřené množiny

V této části si povíme něco o významných podmnožinách metrických prostorů, které se nazývají otevřené, a později o množinách, které se nazývají uzavřené. Tyto množiny mají klíčový význam v matematické disciplíně, která se nazývá topologie. My se nedostaneme k samé podstatě těchto množin (jedná se o příliš vysokoškolské téma), nicméně si v tomto díle povíme o jejich základních vlastnostech a v příštím díle si o nich povíme i něco užitečného.

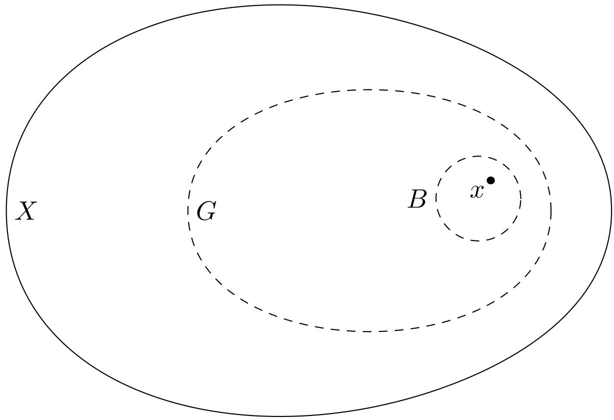
Definice. Nechť (X, ρ) je metrický prostor. Množinu[7] $G \subseteq X$ nazveme otevřenou, právě když ke každému bodu $x \in G$ existuje nějaká koule B v prostoru X obsahující bod x, která je celá obsažena v G.

Na obrázku je nakreslen metrický prostor X, v něm otevřená množina G. Dále je tam vybrán bod x, ke kterému je nalezena koule B obsahující x obsažena celá v G.

---

[6] Písmeno B pochází z anglického *ball*.

[7] Písmenko G pochází z německého slova *geöffnet*.



Poznámka. Všimni si, že koule jsou podle předchozí definice otevřené množiny. Dále si všimni, že z toho plyne, že se pojem otevřené množiny nezmění, když budeme požadovat, aby koule v definici měla střed v bodě x. Dále si všimni, že prázdná množina a celý prostor jsou vždy otevřené množiny.

Dále si zadefinujeme uzavřené množiny. Existuje mnoho způsobů, jak oba druhy množin definovat. Některé z nich vyžadují určité hlubší znalosti, proto pro definici uzavřených množin zvolíme jednoduše formulovatelnou definici ukazující vztah otevřených a uzavřených množin.

Definice. Nechť (X, ρ) je metrický prostor. Množinu[8] F nazveme uzavřenou, právě když je množina $X \setminus F$ otevřená.

Poznámka. K tomu, abychom přiblížili uzavřené množiny, si zmiňme, že uzavřené množiny jsou takové které obsahují svojí hranici (definici hranice nebudeme nyní formulovat přesně – tato poznámka slouží pouze k utvoření představy).

Nyní si ještě uvedeme pár příkladů uzavřených množin. Rozmysli si, že prázdná množina a celý prostor jsou uzavřené množiny. Dále každá jednobodová podmnožina X je uzavřená (důkaz je analogický k následujícímu důkazu hovořícímu o uzavřených koulích). Dále takzvané uzavřené koule jsou uzavřené množiny.

Definice. Nechť (X, ρ) je metrický prostor. Uzavřenou koulí se středem x a poloměrem r budeme rozumět množinu $B^u_\rho(x, r) = \{y \in X | \rho(x, y) \leq r\}$.

Oproti definici koule se změnila nerovnost z ostré na neostrou. Nyní si pro názornost pořádně dokážeme, že uzavřená koule je uzavřená množina.

Tvrzení. Uzavřená koule je uzavřená množina.

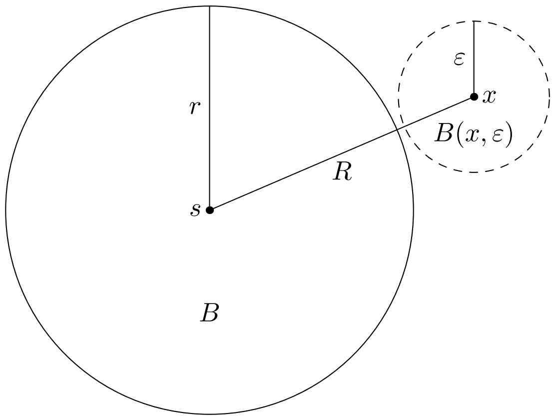
Důkaz. Nechť $B = B^u_\rho(s, r) = \{y \in X | \rho(s, y) \leq r\}$ je uzavřená koule v prostoru (X, ρ). K tomu, abychom dokázali, že se jedná o uzavřenou množinu potřebujeme dokázat, že

$$G = X \setminus B = \{y \in X | \rho(s, y) > r\}$$

je otevřená. Nechť $x \in G$, potřebujeme dokázat, že existuje v prostoru X koule obsahující bod x taková, že je celá obsažena v G. Jelikož $x \in G$, máme $\rho(s, x) = R > r$. Zvolme $\varepsilon < R - r$. Potom koule $B(x, \varepsilon)$ má požadovanou vlastnost: Pro spor předpokládejme, že existuje $z \in B(x, \varepsilon)$ takové,

[8] Tentokráte z francouzského slovíčka *fermé*.

že $z \notin G$, tedy $z \in B^u(s,r)$. Jelikož $z \in B(x,\varepsilon)$, máme $\rho(z,x) < \varepsilon < R-r$. Jelikož $z \in B^u(s,r)$, máme $\rho(z,s) \leq r$. To je ale spor s trojúhelníkovou nerovností, protože $\rho(s,x) = R = (R-r)+r$.



To je k tomuto dílu seriálu vše. V příštím díle se dozvíš něco o omezených a totálně omezených množinách. Dále ještě něco o uzavřených a otevřených množinách. A pro pokročilejší čtenáře se najde i něco o spojitých funkcích a kompaktnosti.

Seriál – Metrické prostory III

Třetí díl seriálu začneme povídáním o omezených množinách. Posléze si povíme něco o limitě a spojitých funkcích. K závěru si zmíníme (bez důkazu) větu o kompaktnosti a budeme se věnovat geometrickým aplikacím této věty. Totálně omezené množiny, slibované v minulém dílu, vynecháme, neboť i tak bude v tomto díle řada nových pojmů.

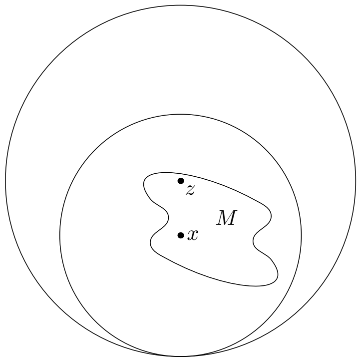
Části textu psané menším písmem nejsou bezpodmínečně nutné k pochopení seriálu a můžeš je při prvním čtení bezpečně přeskočit.

Omezené množiny

Cílem definice omezených množin je získat množiny, které jsou v určitém smyslu malé. S definicí omezených množin (v $\mathbb{R}$) jsi se už pravděpodobně setkal(a).

Definice. Nechť (X,ρ) je metrický prostor. Množinu $M \subseteq X$ nazveme omezenou, právě když existuje koule B obsahující množinu M, tj. $M \subseteq B$.

Drobně modifikovaný pohled na omezenou množinu M je, že existuje bod x (střed koule), od kterého mají všechny body množiny M vzdálenost méně než r (poloměr koule). Všimni si například, že definice omezenosti M nezávisí na volbě bodu x, totiž zvolíme-li si jiný bod z, potom celá množina M se vejde do koule o středu z a poloměru $r+\rho(x,z)$ (použij trojúhelníkovou nerovnost).



Vlastnosti otevřených a uzavřených množin

Nyní si ještě zmíníme některé důležité vlastnosti otevřených a uzavřených množin[9]. Množině[10] Γ z části (ii) následujícího tvrzení se obvykle říká indexová množina (slouží jen k indexování množin) a může být libovolně velká. V části (iii) je naopak důležité, že máme pouze konečné průniky.

Tvrzení. (o otevřených množinách) Nechť (X, ρ) je metrický prostor. Potom platí:

(i) X a $\emptyset$ jsou otevřené.

(ii) Jsou-li G_γ otevřené pro indexy $\gamma \in \Gamma$, potom i $\bigcup\limits_{\gamma\in\Gamma} G_\gamma$ je otevřená.

(iii) Jsou-li $G_1, G_2, \dots, G_k; k \in \mathbb{N}$ otevřené, potom i $G_1 \cap G_2 \cap \dots \cap G_k$ je otevřená množina.

Důkaz. Část (i) je zřejmá z definice otevřené množiny.

Pro část (ii) označme $G = \bigcup\limits_{\gamma\in\Gamma} G_\gamma$. Podle definice otevřené množiny chceme, aby pro každé $x \in G$ existovala koule v G obsahující x. Jelikož $x \in G$, musí existovat $\gamma \in \Gamma$, že $x \in G_\gamma$. Potom ale (z otevřenosti G_γ) existuje koule obsahující x, která je dokonce částí G_γ, tedy určitě částí G.

Pro třetí část si analogicky označme $H = G_1 \cap G_2 \cap \dots \cap G_k$. Opět chceme, aby pro každé $x \in H$ existovala koule uvnitř H obsahující x. Jelikož $x \in H$, platí $x \in G_j$, že pro každé $j \in \{1, 2, \dots, k\}$. Tedy existují koule se středy x a poloměry $r_j > 0$ obsažené v G_j (používáme otevřenost G_j. Zvolme[11] $r = \min\limits_{1\le j\le k} r_j$, potom koule $B(x, r)$ je obsažena v každé z množin G_j, tedy je obsažena v H, což jsme chtěli dokázat.

Tvrzení nám tedy říká, že z otevřených množin můžeme dělat libovolně velká sjednocení a konečné průniky a pořád zůstaneme v otevřených množinách. Vzhledem k tomu, že uzavřené množiny jsou doplňky otevřených, dostáváme velmi podobné tvrzení pro uzavřené množiny. Důkaz vynecháme, je však jednoduchý s využitím tzv. de Morganových vzorců:

$$\bigcap_{\gamma\in\Gamma} (X \setminus G_\gamma) = \left(X \setminus \bigcup_{\gamma\in\Gamma} G_\gamma \right)$$

---

[9] Připomínáme, že otevřená je taková množina, kam patří každý bod i se svým okolím. Uzavřené jsou pak právě všechny doplňky otevřených.

[10] Γ je veliká „gama“ z řecké abecedy.

[11] Při volbě r tedy používáme toho, že máme pouze konečný průnik!

a

$$\bigcup_{\gamma\in\Gamma}(X\setminus G_\gamma)=\left(X\setminus\bigcap_{\gamma\in\Gamma}G_\gamma\right).$$

Tvrzení. (o uzavřených množinách) Nechť (X,ρ) je metrický prostor. Potom platí:

(i) $\emptyset$ a X jsou uzavřené.
(ii) Jsou-li F_γ uzavřené pro $\gamma\in\Gamma$, potom i $\bigcap_{\gamma\in\Gamma} F_\gamma$ je uzavřená.
(iii) Jsou-li $F_1, F_2, \dots, F_k; k\in\mathbb{N}$ uzavřené, potom i $F_1\cup F_2\cup\dots\cup F_k$ je uzavřená množina.

Vaším úkolem v sedmé úloze bude dokázat, že je důležité, že sjednocení v bodu (ii) jsou pouze konečná.

Limita posloupnosti

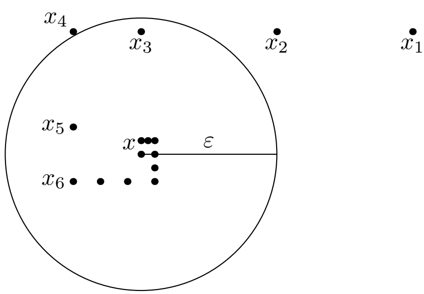
Nyní přejdeme k nejnáročnější části seriálu a to k povídání o limitách a posléze o spojitých funkcích. Ač je tato část obtížná, nemůžeme ji vynechat, protože je klíčová k tvrzením o kompaktnosti.

Následující definice limity vypadá trochu odstrašivě. Nenech se jí zaleknout, důležitější je, abys z obrázku za definicí pochopil (pochopila), co je zhruba cílem.

Definice. Nechť (X,ρ) je metrický prostor a $(x_i)_{i=1}^{\infty}$ je posloupnost přirozených čísel. Limitou této posloupnosti je (každý) bod x, který splňuje:

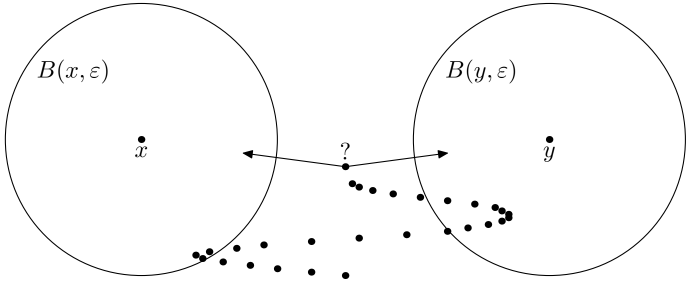
$$(\forall\varepsilon>0)(\exists n\in\mathbb{N})(\forall m\geq n):\rho(x,x_i)<\varepsilon$$

A teď trochu lidsky: Idea je, že bod x je limitou, pokud se k němu posloupnost blíží (libovolně blízko). Definici lze tedy převyprávět tak, že pro každé libovolně malé kladné ε existuje dostatečně veliké n, že všechny členy posloupnosti s indexem alespoň n už jsou k bodu x velmi blízko (blíže než ε).



Posloupnost na obrázku se blíží k bodu x (má za limitu bod x). Kdykoliv je zvoleno nějaké ε, je k němu potřeba najít n (na obrázku například $n=5$), že už všechny členy s indexem větším rovno n (pěti) jsou v kouli $B(x,\varepsilon)$.

Poznámky k definici. Důležité! Pokud limita posloupnosti existuje, je určena jednoznačně (tj. jedna posloupnost nemůže mít dvě různé limity). Kdyby totiž jedna posloupnost měla dvě různé limity x a y, potom pro $\varepsilon<\frac{1}{2}\rho(x,y)$ koule $B(x,\varepsilon)$ a $B(y,\varepsilon)$ mají prázdný průnik, tedy od určitého indexu nemohou být všechny členy posloupnosti v obou koulích.



Limita posloupnosti nemusí vždy existovat. Jako metrický prostor stačí vzít $\mathbb{R}$ a jako posloupnost stačí vzít posloupnost střídajících se plus a minus jedniček. Vzhledem k tomu, že limita nemusí existovat vždy, zavedeme následující definici.

Definice. Řekneme, že posloupnost $(x_i)_{i=1}^{\infty}$ konverguje, má-li limitu. Označíme-li limitu x, budeme občas také říkat, že konverguje k x a budeme značit $(x_i) \to x$.

Pomocí limit můžeme přeformulovat definici uzavřené množiny, výhodou je, že se nebudeme muset odkazovat na doplněk množiny, a tím dostaneme lepší představu o pojmu uzavřené množiny.

Tvrzení. Nechť (X, ρ) je metrický prostor. Množina $M \subseteq X$ je uzavřená, právě když pro každou posloupnost $(m_i)_{i=1}^{\infty}$ bodů z M platí: pokud $(m_i) \to x$, potom už nutně $x \in M$.

Důkaz zde nebudeme uvádět; není těžký, vyžaduje jenom pochopení definic. Je trochu technický.

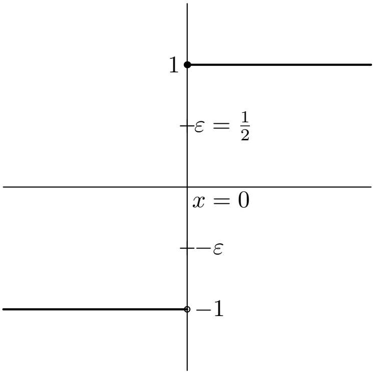
Příklad. Mějme metrické prostory $\mathbb{R}$ a $(0, 2)$ s eukleidovskou metrikou. Ptejme se, jestli je v těchto dvou prostorech množina $M = (0, 1\rangle$ uzavřená. Posloupnost $(\frac{1}{i})_{i=1}^{\infty}$ bodů z M v $\mathbb{R}$ konverguje k bodu 0 neležícím v M, tudíž M není uzavřená v $\mathbb{R}$. Na druhou stranu tato posloupnost v $(0, 2)$ vůbec nekonverguje (tudíž o uzavřenosti M nic neříká). Ve skutečnosti je M dokonce uzavřená, protože její doplněk je koule se středem v bodě $1,5$ a poloměrem $0,5$ tedy otevřená množina.

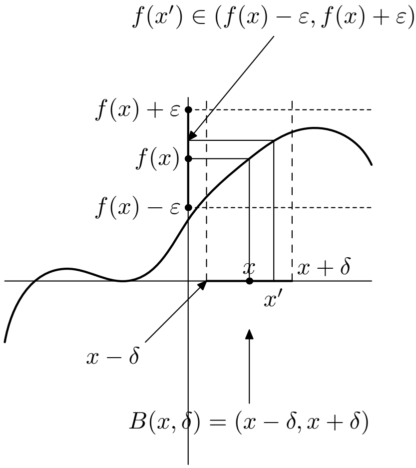
Spojité funkce

Nyní přejdeme k další důležité definici, a sice definici spojité funkce. Než začneme s povídáním o spojitých funkcích, uvedeme si pro představu nějaké příklady.

Příklad. Funkce $cx, x^2, x^n, 2^x, \sin x, \cos x$ jsou spojité funkce z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$. Dost často se o spojitých funkcích z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$ říká, že jsou to právě ty funkce, jejichž graf lze nakreslit jedním tahem.

Nyní budeme chtít spojitost definovat, a to rovnou pro metrické prostory. Budeme mít dva metrické prostory (X, ρ) a (Y, σ) a budeme mít funkci $f : X \to Y$. Nechme se motivovat předchozím příkladem. Skutečnost, že graf funkce z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$ umíme nakreslit jedním tahem, znamená, že když se budeme pohybovat po x-ové složce, tak se příliš nemění y-ová složka. To bude naše hlavní intuitivní představa pro spojitost. Po funkci f budeme chtít, aby byla spojitá, což pro nás zhruba bude znamenat, že kdykoliv máme nějaké $x \in X$ a $f(x) \in Y$ a x' je dostatečně blízko k bodu x, potom už nutně musí platit, že i $f(x')$ je blízko k bodu $f(x)$.





Definice. Nechť (X, ρ), (Y, σ) jsou dva metrické prostory a $f : X \to Y$ funkce. Funkci f nazveme spojitou, právě když splňuje:

$$(\forall x \in X)(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x' \in X) : \rho(x, x') < \delta \Rightarrow \sigma(f(x), f(x')) < \varepsilon.$$

Například funkce na levém obrázku je nespojitá, neboť pro $x = 0$, $\varepsilon = \frac{1}{2}$ nesplňuje definici spojitosti (Máme $f(0) = 1$, ale když se nule blížíme zleva, máme $f(x) = -1$). Naopak funkce vpravo splňuje definici spojité funkce z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$.

Slovní interpretace je tedy následující: Kdykoliv někdo zadá $x \in X$ a $\varepsilon > 0$ (libovolně malé), tak k těmto dvěma hodnotám lze najít dostatečně malé $\delta > 0$ takové, že pro všechny body x' v kouli se středem x a poloměrem δ platí, že $f(x')$ je v kouli se středem $f(x)$ a poloměrem ε, tedy hodně blízko k $f(x)$.

Příklad. Funkce $\operatorname{tg} x$ je spojitá například na intervalu $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

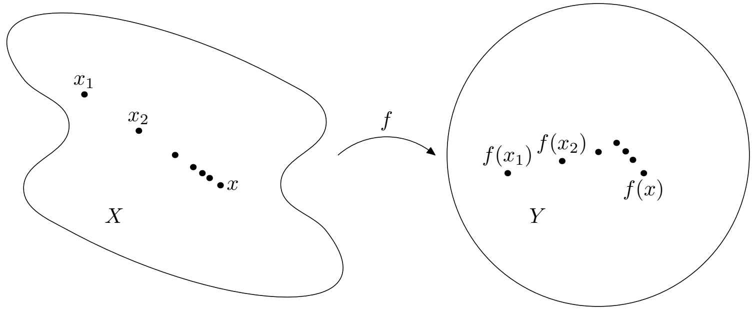
Příklad. Nechť (X, ρ) je metrický prostor. Funkce $\mathrm{id}_X : X \to X$ definovaná jako $\mathrm{id}_X(x) = x$ je spojitá. Vaším úkolem bude dokázat, že tomu tak skutečně je.

Příklad. Nechť (X, ρ) je metrický prostor a $s \in X$. Funkce $\mathrm{dist}_s : X \to \mathbb{R}$ definovaná jako $\mathrm{dist}_s(x) = \rho(s, x)$ je spojitá. U této funkce si i podle definice spojitosti pořádně dokážeme, že je spojitá.

Důkaz. Podle definice spojitosti tedy máme dokázat, že pro libovolné $x \in X$ a $\varepsilon > 0$ nalezneme $\delta > 0$, že kdykoliv $x' \in X$, $\rho(x, x') < \delta$, potom už $|\operatorname{dist}_s(x) - \operatorname{dist}_s(x')| < \varepsilon$, neboli $|\rho(s, x) - \rho(s, x')| < \varepsilon$. Zvolme $\delta = \varepsilon$ (δ si totiž můžeme zvolit). Máme tedy předpoklad, že $\rho(x, x') < \varepsilon$. Podle trojúhelníkové nerovnosti je $\rho(x, x') + \rho(x', s) \geq \rho(x, s)$, neboli $\varepsilon > \rho(x, x') \geq \rho(x, s) - \rho(x', s)$. Prohodíme-li v tomto argumentu x a x' dostaneme, že platí i $\varepsilon > \rho(x', s) - \rho(x, s)$. Dohromady tedy máme nerovnost (rozmysli si) $\varepsilon > |\rho(s, x) - \rho(s, x')|$, což jsme chtěli dokázat.

Pro lepší pochopení, co je to spojitá funkce si uvedeme (bez důkazu) tvrzení, které říká, jak lze spojité funkce charakterizovat jiným způsobem. Před tímto tvrzením si však ještě uvedeme jednu definici, kterou už možná znáš, jedná se o vzor množiny.

Definice. Nechť X a Y jsou množiny, $f : X \to Y$ funkce a $N \subseteq Y$. Vzor množiny N při funkci f budeme značit $f^{-1}(N)$ a jedná se o množinu $\{x \in X | f(x) \in N\}$. Řečeno slovy, jedná se o množinu těch bodů x z X, že $f(x)$ náleží množině N.



Tvrzení. Nechť (X, ρ), (Y, σ) jsou metrické prostory a $f : X \to Y$ funkce. Potom následující tvrzení jsou ekvivalentní.

(i) Funkce f je spojitá.
(ii) Kdykoliv $(x_i) \to x$, potom $(f(x_i)) \to f(x)$ (viz obrázek).
(iii) Kdykoliv je $G \subseteq Y$ otevřená v Y, potom $f^{-1}(G)$ je otevřená v X.
(iv) Kdykoliv je $F \subseteq Y$ uzavřená v Y, potom $f^{-1}(F)$ je uzavřená v X.

Druhá podmínka tedy říká že funkce f zachovává limity. Třetí a čtvrtá podmínka se často hodí pro zjišťování, zda je funkce spojitá, stačí totiž ověřit, zda vzor otevřené množiny je otevřená, což je často snadnější než ověřovat definici spojitosti.

Nyní jsme si zadefinovali spojitou funkci. Abychom získali ještě lepší náhled, uvedeme si nějaké příklady spojitých funkcí. $\mathbb{R}$ je v následujících příkladech vždy s eukleidovskou metrikou, tj. $\rho_e(x, y) = |x - y|$.

Kompaktnost

Nyní už přejdeme ke slibované kompaktnosti. Zadefinujeme si otevřené pokrytí a pomocí něho kompaktní prostor. Potom si bez důkazu uvedeme větu o kompaktnosti (resp. její důležitou část). Posléze si uvedeme příklady kompaktních prostorů. Nakonec se budeme věnovat geometrickým aplikacím věty o kompaktnosti.

Definice. Nechť (X, ρ) je metrický prostor. Otevřeným pokrytím prostoru X budeme rozumět soubor $\{G_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ otevřených množin v X takových, že sjednocení těchto množin je celé X. Γ je tzv. indexová množina, může být i nekonečná (dokonce i nespočetná pro znalce tohoto termínu).

Příklad. Nechť (X, ρ) je metrický prostor. Zvolme $r > 0$ a $\Gamma = X$. Dále pro $x \in X$ zvolme $G_x = B_\rho(x, r)$. Potom $\{G_x\}_{x \in X}$ je otevřené pokrytí prostoru X.

Definice. Nechť (X, ρ) je metrický prostor. Tento prostor nazveme kompaktním, právě když z každého otevřeného pokrytí X lze vybrat konečné podpokrytí. Tj. pro každé otevřené pokrytí $\{G_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ existuje $A \subseteq \Gamma$ konečná taková že $\{G_a\}_{a \in A}$ je stále ještě pokrytí X (samozřejmě otevřené).

Příklad. Mějme $\mathbb{R}$ jako obvykle s eukleidovskou metrikou. Intervaly $(z - 1, z + 1)$ pro $z \in \mathbb{Z}$ tvoří otevřené pokrytí $\mathbb{R}$, nicméně z nich nelze vybrat konečné podpokrytí, neboť kdybychom vynechali nějaký interval $(z - 1, z + 1)$, potom už žádný jiný nepokrývá číslo $z \in \mathbb{R}$. Odtud můžeme usoudit, že $\mathbb{R}$ není kompaktní prostor.

Podobně jako se bavíme o kompaktních prostorech, můžeme se bavit o kompaktních podmnožinách daného prostoru (X, ρ). Množinu $M \subseteq X$ nazveme (očekávatelně) kompaktní, právě když je[12] (M, ρ) kompaktní metrický prostor.

[12] Pro formalisty by metrika ρ v následující závorce měla být zúžena jen na $M \times M$

Nyní si bez důkazu uvedeme dvě věty. První dává návod, jak některé kompaktní množiny poznat. Druhá říká, k čemu jsou kompaktní množiny dobré.

Věta. (Heine, Borel, Lebesgue) Mějme $\mathbb{R}^n$ s eukleidovskou metrikou. Množina $M \subset \mathbb{R}^n$ je kompaktní, právě když je uzavřená a omezená.

Vědět, že kompaktní je v $\mathbb{R}^n$ totéž, co uzavřená a omezená, je pro praktické použití kompaktnosti obvykle užitečnější než obecná definice kompaktnosti. Proto (obzvláště pokud jsi vynechal(a) část psanou malým písmem) můžeš Heine-Borel-Lebesgueovu větu brát jako definici kompaktní množiny v $\mathbb{R}^n$.

Věta. (o kompaktnosti) Metrický prostor (X, ρ) je kompaktní, právě když každá spojitá funkce $f : X \to \mathbb{R}$ nabývá svého maxima, tj. existuje $x \in X$ takové, že $f(x) \geq f(x')$ pro libovolné $x' \in X$.

Příklad. Mějme interval $(0, 1)$ s eukleidovskou metrikou. Funkce $id_{(0,1)}$ je spojitá nicméně nenabývá svého maxima, neboť hodnotami z intervalu $(0, 1)$ se lze libovolně blízko přiblížit k hodnotě 1, na druhou stranu hodnota 1 v tomto intervalu neleží. Odtud, podle věty o kompaktnosti, můžeme usoudit, že interval $(0, 1)$ není kompaktní. Stejný výsledek samozřejmě dostaneme i podle Heine-Borel-Lebesgueovy věty, neboť $(0, 1)$ je podmnožina $\mathbb{R}$, nikoliv však uzavřená.

Příklad. Interval $\langle 0, 1\rangle$ je uzavřená omezená podmnožina $\mathbb{R}$, tedy kompaktní. Můžeme tedy z věty o kompaktnosti usoudit, že každá spojitá funkce z $\langle 0, 1\rangle$ do $\mathbb{R}$ nabývá svého maxima. Toto tvrzení je jedno z nejdůležitějších tvrzení používaných v matematické analýze.

Geometrické aplikace

V této části si uvedeme některé geometrické aplikace věty o kompaktnosti. Začneme hned s příkladem.

Příklad. Mějme dánu kružnici k. Mezi všemi trojúhelníky, které mají vrcholy na kružnici k hledejme trojúhelník s maximálním obsahem. Předpokládejme, že takový trojúhelník ABC není pravidelný. Potom má určitě nějaké dvě strany, bez újmy na obecnosti AC a BC, které nejsou stejně dlouhé. Umístíme-li nyní bod C' ve stejné polorovině jako C podle AB na kružnici k tak, aby $|AC'| = |BC'|$, zvětší se výška (rozmysli si) a tím pádem obsah trojúhelníku ABC' je větší než obsah ABC. Odtud vidíme, že jedině rovnostranný trojúhelník, jehož kružnice opsaná je k, může mít maximální obsah. Řešením úlohy je tedy právě rovnostranný trojúhelník.

Nyní nastává přirozená otázka, kde jsme použili slibovanou kompaktnost? Bylo předchozí řešení vůbec v pořádku? Odpověď zní, že nebylo v pořádku. Než si ukážeme, kde je chyba (velmi závažná) a jak ji opravit, uveďme si ještě jeden příklad.

Příklad. Aby nedošlo k nejednoznačnosti, bude nám množina přirozených čísel začínat jedničkou. Dokážeme, že 1 je největší přirozené číslo. Totiž, kdykoliv jakékoli přirozené číslo (krom 1) umocníme na druhou, tak se zvětší. Tedy žádné jiné přirozené číslo než 1 nemůže být největší. Tedy 1 je největší přirozené číslo.

Byl tento důkaz v pořádku? Určitě ne! V důkazu jsme totiž předpokládali, že největší přirozené číslo existuje, a to vůbec není pravda. Stejný nedostatek máme ale také i v důkazu předchozího příkladu. Mlčky jsme tam totiž předpokládali, že trojúhelník maximálního obsahu existuje. Teď nám zbývá toto tvrzení vskutku dokázat.

Tvrzení. Trojúhelník maximálního obsahu z předminulého příkladu existuje.

Důkaz. Mějme metrický prostor $\mathbb{R}^6$ s eukleidovskou metrikou. Předpokládejme, že máme trojúhelník ABC se souřadnicemi vrcholů $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$, $C = (c_1, c_2)$, takovému trojúhelníku přiřaďme bod $(a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2) \in \mathbb{R}^6$, a naopak k bodu přiřaďme trojúhelník. Nechť K je množina všech bodů $(a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2) \in \mathbb{R}^6$ takových, že $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$, $C = (c_1, c_2)$ leží na kružnici k. Dokážeme, že K je kompaktní množina a funkce S :

$K \to \mathbb{R}$ přiřazující obsah trojúhelníku ABC je spojitá. Potom podle věty o kompaktnosti nabývá svého maxima. Podle Heine-Borel-Lebesgueovy věty stačí dokázat, že K je omezená a uzavřená.

Omezenost je zřejmá, body A, B, C totiž leží na kružnici (omezené množině), tedy všechny souřadnice a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 jsou v absolutní hodnotě omezeny nějakou konstantou M, odkud plyne, že body K mají od počátku vzdálenost nejvýše $\sqrt{M^2 + M^2 + M^2 + M^2 + M^2 + M^2} = \sqrt{6}M$, tedy K je omezená.

Uzavřenost K je o kousek těžší, nikoliv však významně. Rozmysli si, že kružnice k je uzavřená množina. Odtud plyne (přidá se jen více souřadnic), že množina

$$K_a = \{(a_1, a_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \in \mathbb{R}^6 | (a_1, a_2) \in k\}$$

je uzavřená v $\mathbb{R}^6$. Podobně

$$K_b = \{(x_1, x_2, b_3, b_4, x_5, x_6) \in \mathbb{R}^6 | (b_1, b_2) \in k\},$$

$$K_c = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, c_5, c_6) \in \mathbb{R}^6 | (c_1, c_2) \in k\}$$

jsou uzavřené. Nakonec $K = K_a \cap K_b \cap K_c$, tedy je také uzavřená (podle druhé části tvrzení o uzavřených množinách).

Zbývá se vypořádat se spojitostí obsahu. Tu tady nebudeme přímo dokazovat, protože formální důkaz by v tomto případě byl buď zbytečně technický, nebo by používal tvrzení, která jsme si neodvodili. Pouze si řekneme návod, jak spojitost ukázat. První možnost je si explicitně vyjádřit funkci přiřazující šestici $(a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2)$ bodů v $\mathbb{R}^6$ přesně obsah trojúhelníku ABC. Toto vyjádření je například možné udělat pomocí Heronova vzorce, či jakýmkoliv jiným analytickým způsobem spočítat. U takové funkce by pak bylo zřejmé, že je spojitá z přesného vyjádření, nicméně to vyžaduje nějaké znalosti o počítání se spojitými funkcemi. Druhá možnost je uvědomit si a spočítat, že když se hodnoty a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 změní o malé ε potom se obsah příslušného trojúhelníku může změnit pouze o málo ($(o + \pi)\varepsilon$, kde o označuje obvod), odkud už je spojitost vidět, nicméně by to vyžadovalo technické počítání.

Další geometrická aplikace věty o kompaktnosti na Tebe čeká při řešení deváté úlohy.