1. série

Téma: Pohádky

Datum odeslání: 9. října 2006

1. úloha (3 body)

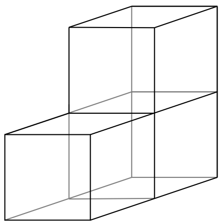
Princezna si dělá pořádek ve svých truhličkách. Vysype na stůl do dvou hromádek drahokamy – na první jich je 17, na druhé 10. Pokaždé, když nabere z jedné hromádky do ruky kameny (vždy vezme přesně tři) a chce je dát na druhou, přiletí drak a dva kameny spolkne. Princezna pak smutně položí zbylý kámen na druhou hromádku. Může princezna vytvořit dvě hromádky po osmi kamenech?

2. úloha (3 body)

V královské hodovní síni mají stůl pokrytý ubrusem s vyšívanou čtvercovou sítí 12×12. Na některých čtvercích stojí překážky. Nejmladší princ má dřevěného vojáčka, kterého rád staví doprostřed některého z rohových políček. Vojáček postupuje dopředu, dokud nedojde k políčku, na němž je překážka. Před ním se zastaví, otočí se o 90 stupňů doprava a jde dál (může-li; nemůže-li, znovu se otočí, …). Takto chodí, ale po chvíli obvykle ze stolu spadne. Poraďte princi, jak překážky rozmístit, aby vojáček mohl po stole chodit a nikdy nespadl.

3. úloha (3 body)

V Kocourkově chtějí postavit dům tvaru krychle bez vnitřních místností. Ve stavebninách jsou však k dostání pouze vykousnuté cihly o objemu tři (jako na obrázku). Je možné těmito cihlami vyplnit dům o rozměrech $3 \times 3 \times 3$?



4. úloha (5 bodů)

Lord chodívá už léta každý den na lov kachen. Prvního června se vrátil z lovu a pyšně povídá své kuchařce: „Dnes jsem ulovil víc kachen než před dvěma dny, i když méně než před týdnem.“ Totéž řekl po návratu i druhého června, i třetího, … Kolik nejvíce dní po sobě tak mohl mluvit? Lord má svou čest a nikdy by nelhal.

5. úloha (5 bodů)

Očarovaný jeden metr dlouhý vlas princezny Zlatovlásky se volně vznáší ve vzduchu uprostřed Černého sálu. Drobným nedopatřením se na vlas dostali mravenci. Ti po něm lezou jedním ze dvou možných směrů rychlostí jeden centimetr za vteřinu. Když se dva potkají, srazí se, každý se otočí a jde zpátky (opačným směrem než předtím). Když mravenec dojde na konec vlasu, spadne. Jak nejdéle může trvat, než všichni popadají?

6. ÚLOHA (5 BODŮ)

V podzámčí žije hospodář, který vlastní krávu, tři dřevěné kolíky, malý kovový kroužek a dlouhatánské lano. Lano může rozstříhat na libovolně mnoho kusů, které může přivazovat krávě na krk, ke kolíkům a ke kroužku. Neumí svazovat kusy lana jen tak k sobě, ale může lano provlékat kroužkem[1] (kolikrát chce). Kráva pochází z cirkusu a umí přeskočit či podlézt každý provaz, takže ji omezují pouze lana, co má na krku. Poraďte hospodáři, jak krávu uvázat, aby vypásla přesně půlkruh o poloměru 20 metrů (ven z půlkruhu se nesmí dostat).

7. ÚLOHA (5 BODŮ)

V lese nejtemnějším z nejtemnějších rostou tenké stromy, z nichž každý je nižší než 1003 metry. Žádné dva stromy od sebe nejsou dál, než kolik činí rozdíl jejich výšek. Dokažte, že celý temný les je možné obehnat zdí dlouhou 2007 metrů.

8. ÚLOHA (5 BODŮ)

Kouzelníkův učeň má za úkol rozmístit věže na trojrozměrnou šachovnici $n \times n \times n$ tak, aby každé volné políčko nějaká věž ohrožovala. Věž ohrožuje všechna políčka ve svém řádku a sloupci na témže patře šachovnice a všechna políčka přímo pod sebou i nad sebou (tj. všechna políčka ve stejném vertikálním sloupci). Poraďte mu, jak to (pro dané n) udělat, aby při tom použil co nejméně věží.

Řešení 1. série

1. úloha

Princezna si dělá pořádek ve svých truhličkách. Vysype na stůl do dvou hromádek drahokamy – na první jich je 17, na druhé 10. Pokaždé, když nabere z jedné hromádky do ruky kameny (vždy vezme přesně tři) a chce je dát na druhou, přiletí drak a dva kameny spolkne. Princezna pak smutně položí zbylý kámen na druhou hromádku. Může princezna vytvořit dvě hromádky po osmi kamenech?

Mohli bychom vyzkoušet všechny možné způsoby přesouvání kamenů, ale naštěstí existuje kratší řešení: Označme si h_1 a h_2 počet kamenů na první a druhé hromádce v nějaké chvíli. Na začátku je tedy $h_1 = 17$ a $h_2 = 10$. Podívejme se, jak se změní součet $h_1 + h_2$ poté, co princezna jednou přesune kameny. Bez újmy na obecnosti (druhý případ je skoro stejný) ať přesouvá z první hromádky na druhou. Když nabere tři kameny, zmenší se h_1 o tři. Drak pak dva kameny spolkne, takže h_2 se zvýší přesně o jedna. Dostáváme, že součet $h_1 + h_2$ se změnil o $-3 + 1 = -2$, tedy klesl o dva. Jinak se součet měnit nemůže.

Na začátku je součet lichý $17 + 10 = 27$. Kdyby princezna ony hromádky vytvořit mohla, musela by umět z 27 dostat pomocí odčítání 2 číslo $8 + 8 = 16$, které je sudé. Ale to nejde – zbytek $h_1 + h_2$ po dělení dvěma (učeně se mu říká „parita“) zůstává celou dobu stejný. Proto vytvořit dvě stejné hromádky není možné.

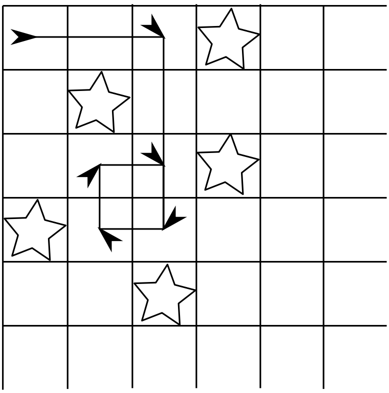
2. úloha

V královské hodovní síni mají stůl pokrytý ubrusem s vyšívanou čtvercovou sítí 12×12. Na některých čtvercích stojí překážky. Nejmladší princ má dřevěného vojáčka, kterého rád staví

[1] Lano provlečené kroužkem se od lana přivázaného ke kroužku liší tím, že po provlečeném laně kroužek volně klouže.

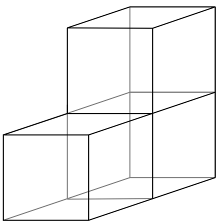
doprostřed některého z rohových políček. Vojáček postupuje dopředu, dokud nedojde k políčku, na němž je překážka. Před ním se zastaví, otočí se o 90 stupňů doprava a jde dál (může-li; nemůže-li, znovu se otočí, ...). Takto chodí, ale po chvíli obvykle ze stolu spadne. Poraďte princi, jak překážky rozmístit, aby vojáček mohl po stole chodit a nikdy nespadl.

Poradíme princi, aby překážky uspořádal jako na obrázku na další straně (jak je vidět, nemusí princ ani používat celý stůl). Potom bude možné vojáčka snadno přimět, aby chodil donekonečna: Stačí ho na začátku natočit jako na obrázku. Orientace vojáčka je vyznačena šipkami.

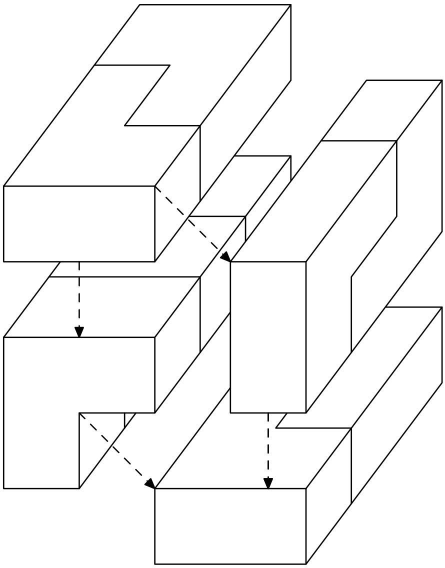


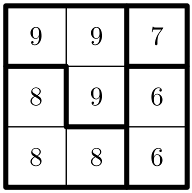
3. úloha

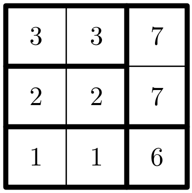
V Kocourkově chtějí postavit dům tvaru krychle bez vnitřních místností. Ve stavebninách jsou však k dostání pouze vykousnuté cihly o objemu tři (jako na obrázku). Je možné těmito cihlami vyplnit dům o rozměrech $3 \times 3 \times 3$?

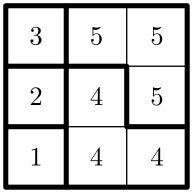


Odpověď zní ano, ukážeme si jednu z možností, jak cihly použít. Oba obrázky znázorňují stejnou situaci; vyber si ten, který se ti zdá přehlednější.





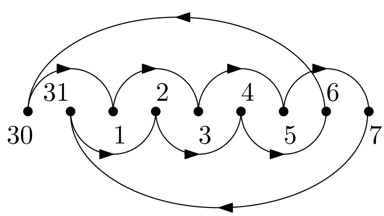




4. úloha

Lord chodívá už léta každý den na lov kachen. Prvního června se vrátil z lovu a pyšně povídá své kuchařce: „Dnes jsem ulovil víc kachen než před dvěma dny, i když méně než před týdnem.“ Totéž řekl po návratu i druhého června, i třetího, … Kolik nejvíce dní po sobě tak mohl mluvit? Lord má svou čest a nikdy by nelhal.

Abychom dokázali, že lordův výrok nemůže být pravdivý po sedm dní, znázorněme si všechny dny, které budeme brát v úvahu, body popsanými daným datem a spojme je šipkami, přičemž šipka vždy míří ode dne, kdy ulovil méně kachen, ke dni, kdy ulovil kachen více. Dostaneme tak následující diagram:



Řetězec šipek je uzavřený. Protože každá šipka vyjadřuje nerovnost, znamená to, že předpoklad, že by lord opakoval svůj výrok sedm dní, byl nepravdivý (pro žádná a, b, c přirozená nemůže platit $a < b < c < a$).

Uvažujme nyní pouze šest dní. Není těžké najít příklad, který vyhovuje požadovaným podmínkám.

Výrok je pravdivý po šest dní – 1. až 6. června.

Označme x_n počet kachen, které lord ulovil n-tého dne, počínaje 30. květnem.

...	30	31	1	2	3	4	5	6	7	...
...	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	...

Z lordových (pravdivých) výroků víme, že $x_1 > x_3 > x_5 > x_7$ a $x_2 > x_4 > x_6 > x_8$.

Dále z výroku ze 6. června víme, že $x_1 > x_8$. Dohromady dostaneme sérii nerovností:

$$x_2 > x_4 > x_6 > x_8 > x_1 > x_3 > x_5 > x_7.$$

Řekneme-li, že lord ulovil 31. května jednu kachnu ($x_2 = 1$), a nahradíme-li znaménka „>“ výrazem „+1 =“, dostaneme soubor hodnot:

...	30	31	1	2	3	4	5	6	...
...	5	1	6	2	7	3	8	4	...

Potom stačí říci, že každý den v týdnu před 30. květnem ulovil více než devět kachen (aby platila druhá část každého výroku), a naše řešení pro šest dní funguje.

Největší počet po sobě následujících dní, během nichž mohly být lordovy výroky pravdivé, je tedy šest. Pro sedm dní to naopak už nikdy možné není.

5. úloha

Očarovaný jeden metr dlouhý vlas princezny Zlatovlásky se volně vznáší ve vzduchu uprostřed Černého sálu. Drobným nedopatřením se na vlas dostali mravenci. Ti po něm lezou jedním ze dvou možných směrů rychlostí jeden centimetr za vteřinu. Když se dva potkají, srazí se, každý se otočí a jde zpátky (opačným směrem než předtím). Když mravenec dojde na konec vlasu, spadne. Jak nejdéle může trvat, než všichni popadají?

Úloha je trochu triková. Mravence budeme považovat za nerozlišitelné – to nebude mít vliv na to, za jak dlouho popadají. Když se dva mravenci od sebe odrážejí, představíme si místo toho, že jenom projdou skrz sebe (vůbec se neodrazí) – to můžeme, když máme mravence nerozlišitelné. Potom se všichni mravenci pohybují po vlasu rovně, odkud plyne, že každý mravenec může na vlasu zůstat nejdéle 100 vteřin (než dojde z jednoho kraje na druhý).

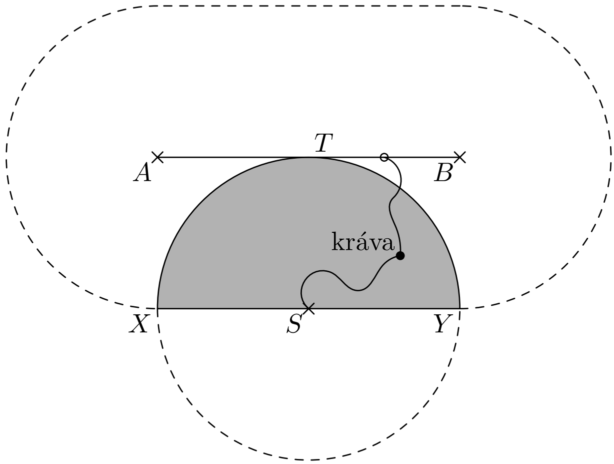
Tohoto času lze dosáhnout právě v případě, že nějaký mravenec bude začínat na jednom konci vlasu a mířit ke druhému konci.

6. úloha

V podzámčí žije hospodář, který vlastní krávu, tři dřevěné kolíky, malý kovový kroužek a dlouhatánské lano. Lano může rozstříhat na libovolně mnoho kusů, které může přivazovat krávě na krk, ke kolíkům a ke kroužku. Neumí svazovat kusy lana jen tak k sobě, ale může lano provlékat kroužkem[2] (kolikrát chce). Kráva pochází z cirkusu a umí přeskočit či podlézt každý provaz, takže ji omezují pouze lana, co má na krku. Poraďte hospodáři, jak krávu uvázat, aby vypásla přesně půlkruh o poloměru 20 metrů (ven z půlkruhu se nesmí dostat).

[2] Lano provlečené kroužkem se od lana přivázaného ke kroužku liší tím, že po provlečeném laně kroužek volně klouže.

Uvědomme si, že když krávu uvážeme k více provazům, výsledná oblast, kam se dostane bude průnikem všech oblastí, kam by se dostala jen s jedním uvázaným provazem. Bude nám tedy stačit pokud najdeme několik (třeba dvě) oblastí, jejichž průnikem je právě daný půlkruh.



Mějme tedy daný půlkruh se středem S, hraničním průměrem XY a označme T střed hraničního oblouku XY (viz obrázek). Jeden způsob uvázání se nabízí hned: zabodnout kolík do bodu S k němu přivázat lano délky poloměru daného půlkruhu (tedy 20 m) a na druhý konec přivázat krávu. Tím krávu omezíme na kruh se středem S a poloměrem 20 m. Nyní ještě musíme najít oblast, na kterou umíme krávu omezit a ve které leží daný půlkruh, ale neleží druhá polovina kruhu. K tomu budeme potřebovat dvě lana: jedno délky 40 m (průměr kruhu) a druhé délky 20 m. Sestrojíme body A, B tak, aby $XSTA$ a $SYBT$ byly čtverce (budou tedy mít stranu 20 m). Do bodů A a B zabodneme kolíky, mezi které natáhneme lano (délky 40 m) a na něj navlečeme kroužek. K tomu uvážeme lano délky 20 m (druhý konec opět krávě ke krku). Tímto úvazem omezíme krávu na oblast, jejíž každý bod je vzdálen od úsečky AB nejvýše 20 m. Snadno nahlédneme, že průnikem našich dvou oblastí je daný půlkruh.

7. úloha

V lese nejtemnějším z nejtemnějších rostou tenké stromy, z nichž každý je nižší než 1003 metry. Žádné dva stromy od sebe nejsou dál, než kolik činí rozdíl jejich výšek. Dokažte, že celý temný les je možné obehnat zdí dlouhou 2007 metrů.

Představme si, že stromy budeme spojovat čárami tak, že začneme u nejnižšího, z něj povedeme čáru do druhého nejnižšího, z něj do dalšího, atd., až skončíme u nejvyššího stromu (uvědom si, že žádné dva stromy nemůžou mít stejnou výšku). Délka úseku mezi každými dvěma po sobě jdoucími stromy je nejvýše rovna rozdílu jejich výšek, postupným sčítáním tedy dostaneme, že délka celé lomené čáry je menší nebo rovna než rozdíl výšek nejvyššího a nejnižšího stromu, což je podle zadání méně než 1003.

Postavíme-li nyní zeď těsně podél lomené čáry, bude nám stačit, když bude víc než dvakrát delší než tato čára (jednou na cestu od nejnižšího stromu k nejvyššímu a podruhé na cestu zpátky). A protože je $2007 > 2 \cdot 1003$, zeď délky 2007 stačí. (Ještě je dobré si uvědomit, že případné křížení lomené čáry vůbec ničemu nevadí.)

8. úloha

Kouzelníkův učeň má za úkol rozmístit věže na trojrozměrnou šachovnici $n \times n \times n$ tak, aby každé volné políčko nějaká věž ohrožovala. Věž ohrožuje všechna políčka ve svém řádku a sloupci na témže patře šachovnice a všechna políčka přímo pod sebou i nad sebou (tj. všechna políčka ve stejném vertikálním sloupci). Poraďte mu, jak to (pro dané n) udělat, aby při tom použil co nejméně věží.

Dokážeme, že nejmenší potřebný počet věží je $\frac{n^2}{2}$ pro sudé n a $\frac{n^2+1}{2}$ pro liché n.

Nejdřív si uvědomme, že tolik věží stačí. K tomu se nám bude hodit znázorňovat věže v krychli pomocí tabulky $n \times n$, která bude odpovídat jedné (dolní) vrstvě krychle. Každé políčko této tabulky bude buďto prázdné, což znamená, že nad tímto políčkem není žádná věž, nebo bude obsahovat některá z čísel $1, 2, \ldots, n$, která vyjadřují, v kterých vrstvách jsou nad tímto políčkem věže. Pro malá n jdou věže rozmístit takto:

1

-	2
1	-

-	3	2
-	2	3
1	-	-

-	-	4	3
-	-	3	4
2	1	-	-
1	2	-	-

-	-	5	3	4
-	-	4	5	3
-	-	3	4	5
2	1	-	-	-
1	2	-	-	-

Rozmysli si, že ohrožená jsou skutečně všechna políčka a že podobně jdou věže rozmístit pro jakékoli n.

A teď vzhůru na důkaz, že méně věží nestačí. Předpokládejme, že je v krychli rozmístěno V věží, které ohrožují všechna políčka. Vyberme vrstvu A, která obsahuje nejméně věží, tento počet značme a. Bez újmy na obecnosti (BÚNO) předpokládejme, že je rovnoběžná s rovinou xy.

Označme a_1 počet řádků, které těchto a věží ohrožuje ve směru osy x, a a_2 počet řádků, které tyto věže ohrožují ve směru osy y. BÚNO ještě předpokládejme, že $a_1 \geq a_2$; zřejmě platí $a \geq a_1$ a $a \geq a_2$. Ve vrstvě A tyto věže neohrožují $(n - a_1)(n - a_2)$ krychliček, které musí být ohroženy nějakou věží ve směru osy z. Uvažujme všech n vrstev rovnoběžných s rovinou xz. V $n - a_1$ z nich, které neobsahují žádnou věž z A, musí být dohromady aspoň $(n - a_1)(n - a_2)$ věží; v každé ze zbývajících a_1 vrstev je aspoň a věží (vrstvu A jsme totiž vybrali tak, aby obsahovala nejméně věží ze všech vrstev), celkem tedy máme

$$V \geq (n - a_1)(n - a_2) + aa_1 \geq (n - a_1)^2 + a_1^2 = \frac{n^2}{2} + \frac{(2a_1 - n)^2}{2}.$$

Pravá strana je aspoň $\frac{n^2}{2}$ pro sudé n a $\frac{n^2+1}{2}$ pro liché n, což jsme chtěli dokázat.