Stereometrie

Aby se Ti série se stereometrií lépe řešila a nemusel(a) jsi váhat, co je jasné a co už ne, tak Ti k ní přinášíme povídání.

Základními útvary v prostoru jsou bod, přímka, rovina, kružnice a kulová plocha.

Vzdálenost libovolných dvou útvarů v prostoru je definována jako nejkratší vzdálenost dvou bodů na těchto útvarech. Nejkratší úsečka mezi dvěma mimoběžnými přímkami je ta, která je na obě přímky kolmá (aspoň jedna taková vždy existuje).

Dvě přímky mohou být shodné, rovnoběžné, různoběžné a mimoběžné. Dvě roviny mohou být shodné, rovnoběžné a různoběžné.

Dvě přímky jsou rovnoběžné, pokud jimi lze proložit rovina a nemají žádný společný bod. Všechny body přímky mají stejnou vzdálenost od druhé rovnoběžné přímky. Přímka je rovnoběžná s rovinou, je v této rovině aspoň jedna s ní rovnoběžná přímka. Pokud nejsou přímka a rovina rovnoběžné, pak mají společný bod. Dvě přímky a, b jsou na sebe kolmé, právě když lze bodem z přímky a vést přímku b' kolmou na a (kolmou ve smyslu „svírající s a pravý úhel“) a rovnoběžnou s b. Přímka je kolmá na rovinu, právě když je kolmá na aspoň dvě různoběžné přímky ležící v této rovině. Pokud je přímka kolmá na rovinu, tak je kolmá na všechny přímky ležící v této rovině. Dvě roviny jsou na sebe kolmé, právě když existuje v aspoň jedné z nich přímka kolmá na druhou.

Průnikem dvou různoběžných rovin je přímka. Průnikem roviny a kulové plochy je kružnice nebo bod v případě, že se kulová plocha roviny dotýká, případně prázdná množina. Průnikem dvou kulových ploch je kružnice, bod nebo prázdná množina.

Významné množiny bodů v prostoru.

Množinou bodů, které mají stejnou vzdálenost od dvou daných různých bodů, je osová rovina kolmá na spojnici těchto bodů a procházející jejím středem. Množina bodů, které mají stejnou vzdálenost od dvou různoběžných přímek je osová rovina půlící úhel těchto přímek a kolmá na rovinu určenou přímkami. Množina bodů, které mají stejnou vzdálenost od dvou rovin, je taktéž osová rovina.

Množina bodů, ze kterých vidíme úsečku pod úhlem $90°$, je tzv. Thaletova kulová plocha, která je obdobou Thaletovy kružnice v rovině.

Tolik povídání ke stereometrii. Nechť je Ti ku pomoci.

3. série

Téma:	Stereometrie
Datum odeslání:	11. prosince 2006

1. úloha (3 body)

Kouli o objemu 1 je vepsaná krychle (ta se dotýká povrchu koule v osmi bodech). Této krychli je vepsána koule (dotýkající se povrchu krychle v šesti bodech). Určete objem takto vzniklé (menší) koule.

2. úloha (3 body)

Krychle je rozřezána rovinou na nějaká dvě tělesa. Určete maximální možný součet počtů stěn těchto dvou těles.

3. ÚLOHA (3 BODY)

Nalezněte všechny čtyřstěny takové, že když jejich stěnám vepíšeme kružnice, tak se každé dvě takové kružnice dotýkají.

4. ÚLOHA (5 BODŮ)

Je dán čtyřstěn $ABCD$. Bod X se pohybuje po přímce AB. Označme P patu kolmice z bodu D na přímku CX. Určete množinu bodů P, které takto získáme.

5. ÚLOHA (5 BODŮ)

Je dán kužel s vrcholem V a bodem A na kraji podstavy. Poloměr jeho podstavy je 1 a $|VA| = 3$. Beruška leze nejkratší možnou cestou z vrcholu A po povrchu kužele opět do vrcholu A tak, že obleze celý kužel[1]. Určete, v jaké vzdálenosti od V je beruška ve chvíli, kdy je k V nejblíže.

6. ÚLOHA (5 BODŮ)

Je dán čtyřstěn $ABCD$. Označme o_B, o_C a o_D po řadě osy úhlů CAD, BAD a BAC. Nechť φ_B je rovina, jíž prochází o_B a je kolmá na rovinu $\overleftrightarrow{ACD}$, podobně φ_C je kolmá na $\overleftrightarrow{ABD}$ a prochází jí o_C a φ_D je kolmá na $\overleftrightarrow{ABC}$ a prochází jí o_D. Dokažte, že se roviny φ_B, φ_C a φ_D protínají v jedné přímce.

7. ÚLOHA (5 BODŮ)

Kolik nejvýše bodů je možno umístit na sféru[2] o poloměru 1 tak aby vzdálenost každých dvou byla větší než $\sqrt{2}$.

8. ÚLOHA (5 BODŮ)

Je dán čtyřstěn $A_1A_2A_3A_4$. Pro $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$, $i \neq j$ označme $\varphi_{i,j}$ rovinu kolmou na úsečku A_iA_j procházející bodem A_j. Označme B_1 bod, kde se protínají roviny $\varphi_{1,2}$, $\varphi_{1,3}$ a $\varphi_{1,4}$, podobně označme $B_2 = \varphi_{2,1} \cap \varphi_{2,3} \cap \varphi_{2,4}$, $B_3 = \varphi_{3,1} \cap \varphi_{3,2} \cap \varphi_{3,4}$ a $B_4 = \varphi_{4,1} \cap \varphi_{4,2} \cap \varphi_{4,3}$. Dokažte, že čtyřstěny $A_1A_2A_3A_4$ a $B_1B_2B_3B_4$ jsou shodné.

Řešení 3. série

1. úloha

Kouli o objemu 1 je vepsaná krychle (ta se dotýká povrchu koule v osmi bodech). Této krychli je vepsána koule (dotýkající se povrchu krychle v šesti bodech). Určete objem takto vzniklé (menší) koule.

Označíme si objem velké koule V_1, její poloměr R, stranu vepsaného čtverce a, objem malé koule V_2 a její poloměr r. Ze známého vzorečku dostáváme: $V_1 = \frac{4}{3}\pi R^3$ a $V_2 = \frac{4}{3}\pi r^3$. Vepíšeme-li do velké koule krychli tak, aby se dotýkala v právě 8 bodech, pak také průměr velké koule bude roven tělesové úhlopříčce krychle, tedy: $2R = \sqrt{3}a$, odkud $R = \frac{\sqrt{3}a}{2}$. Dále jelikož je do krychle vepsána koule, která se této krychle dotýká v právě 6 bodech, bude dvojnásobek poloměru malé

[1] Pro formalisty: beruška někdy protne každou ze spojnic vrcholu V s krajními body podstavy.

[2] Sféra je povrch koule.

koule roven straně čtverce, tedy bude platit: $a = 2r$, odkud $r = \frac{a}{2}$. Nyní jen dáme dohromady všechny obdržené vztahy a dostáváme:

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{r^3}{R^3} = \frac{(\frac{a}{2})^3}{(\frac{\sqrt{3}a}{2})^3} = \frac{(\frac{a}{2})^3}{(\frac{a}{2})^3(\sqrt{3})^3} = \frac{1}{3\sqrt{3}}$$

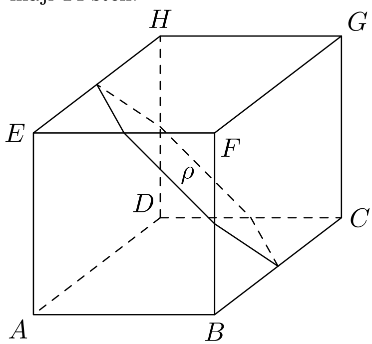
Nyní si uvědomíme, že $V_1 = 1$ a dostáváme výsledek $V_2 = \frac{1}{3\sqrt{3}}$. Objem vepsané koule je tudíž $\frac{1}{3\sqrt{3}}$.

2. úloha

Krychle je rozřezána rovinou na nějaká dvě tělesa. Určete maximální možný součet počtů stěn těchto dvou těles.

Řekněme, že krychle K je rozřezána rovinou ρ na dvě tělesa T a U. K má šest stěn, každá její stěna může být rozdělena ρ na nejvýše dvě v U a V. U a V pak ještě obsahují stěnu, která vznikne podél řezu rovinou ρ. Dohromady tedy mají U a V nejvýše 14 stěn.

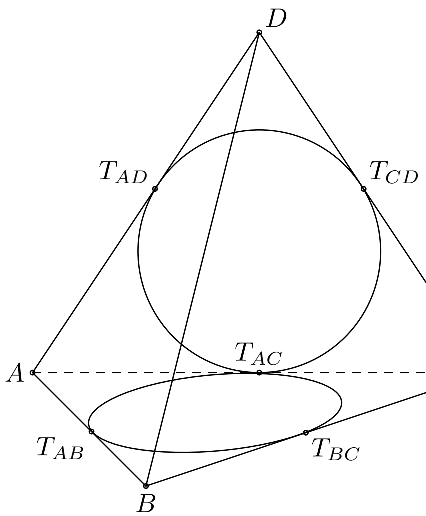
Abychom ukázali, že 14 je maximální možný součet počtů stěn U a V musíme také ukázat příklad roviny ρ, pro kterou tento součet 14 dostaneme. Označme si krychli $ABCDEFGH$ jako na obrázku a volme ρ jako osovou rovinu A a G. Potom ρ prochází středy úseček BC, CD, DH, HE, EF a FB – všimni si, že jsou to body, které mají stejnou vzdálenost od A a G (vždy $\frac{\sqrt{5}}{2}|AB|$.) Tedy ρ dělí každou stěnu krychle a dvě tělesa vzniklá rozřezáním podél ρ jsou sedmistěny. Dohromady tedy mají 14 stěn.

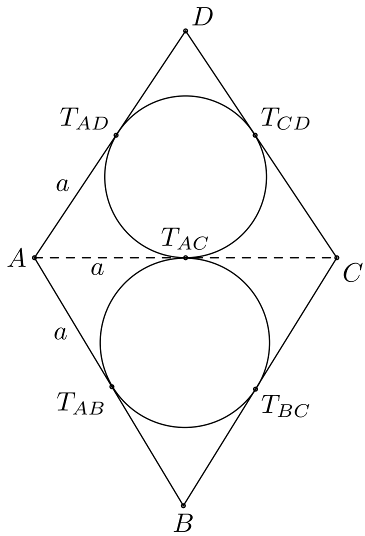


3. úloha

Nalezněte všechny čtyřstěny takové, že když jejich stěnám vepíšeme kružnice, tak se každé dvě takové kružnice dotýkají.

Body dotyku kružnic si označme podle hran, kde se kružnice dotýkají, např. na AB bude bod dotyku zvaný T_{AB}, atd. Protože je vzdálenost průsečíků tečen ke ke každé kružnici od bodů dotyku stejná, je $|AT_{AB}| = |AT_{AC}| = |AT_{AD}| = a$.





Podobně dostaneme $|BT_{BA}| = |BT_{BC}| = |BT_{BD}| = b$, $|CT_{CA}| = |CT_{CB}| = |CT_{CD}| = c$ a $|DT_{DA}| = |DT_{DB}| = |DT_{DC}| = d$. Čímž jsme našli nutnou podmínku, aby se všechny kružnice vzájemně dotýkali, a tou je, že délky hran čtyřstěnu musí jít zapsat jako $|AB| = a + b, |AC| = a + c, |AD| = a + d, |BC| = b + c, |BD| = b + d, |CD| = c + d$ pro nějaké čtyři délky a, b, c, d.

Teď na druhou stranu potřeba ukázat, že pokud jdou délky hran čtyřstěnu $|AB|, |AC|, \ldots$ $\ldots, |CD|$ zapsat jako $a + b, a + c, \ldots, c + d$, tak se musejí kružnice vepsané stěnám dotýkat. Tady nám pomůže zjištění, že strany x, y, z každého trojúhelníka XZY jdou zapsat jako součty $a' + b', b' + c', a' + c'$ jenom jedním způsobem, protože soustava rovnic

$$x = a' + b'$$
$$y = a' + c'$$
$$z = b' + c'$$

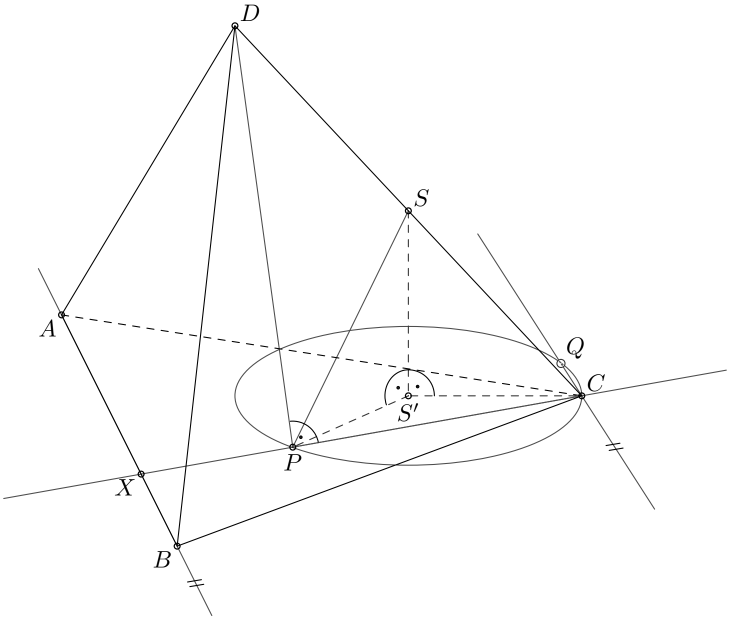
má jen jedno řešení v proměnných a', b', c'. A toto jediné řešení musí být tedy vyťato body dotyku vepsané kružnice danému trojúhelníku XYZ, které přesně tímto způsobem strany dělí. Z předchozího plyne, že pokud platí $|AB| = a + b, |AC| = a + c, |AD| = a + d, |BC| = b + c, |BD| = b + d, |CD| = c + d$ pro hrany čtyřstěnu, tak mají body dotyku T_{AB}, T_{AC}, T_{AD} stejnou vzdálenost a od vrcholu A, jsou na jednotlivých hranách společné a kružnice se tedy opět dotýkají. Totéž platí analogicky pro další tři hrany. Tím je úloha vyřešena.

Závěrem tedy je, že se kružnice vepsané stěnám po dvou vzájemně dotýkají, právě když existuje vyjádření délek hran způsobem $|AB| = a + b, |AC| = a + c, |AD| = a + d, |BC| = b + c, |BD| = b + d, |CD| = c + d$ pro nějaké čtyři délky a, b, c, d.

Za zmínku ještě stojí, že stejnou hodnotu má řešení, ve kterém se ukáže, že se všechny dvojice kružnic dotýkají, právě když platí $|AB| + |CD| = |AC| + |BD| = |AD| + |BC|$.

4. úloha

Je dán čtyřstěn $ABCD$. Bod X se pohybuje po přímce AB. Označme P patu kolmice z bodu D na přímku CX. Určete množinu bodů P, které takto získáme.



V povídání k sérii jsi se zajisté dočetl(a) o Thaletově kulové ploše, která je množinou bodů, ze které lze danou úsečku vidět pod úhlem $90°$. Všechny vyhovující body P musejí tedy nutně ležet na Thaletově kulové ploše nad úsečkou CD, která má střed S a poloměr kulové plochy je roven vzdálenosti $|SC|$. Všechny body P leží navíc v rovině ABC, protože v této rovině leží i všechny přímky XC. Pod P tedy může ležet jen na průniku Thaletovy kulové plochy a roviny ABC. Tímto průnikem je kružnice procházející bodem C a se středem v průmětu S' bodu S do roviny ABC.

Do množiny nenáleží též bod Q, který sestrojíme jako druhý průnik přímky procházející bodem C rovnoběžné s AB. Důvodem je, že žádná přímka XC nemůže být rovnoběžná s AB, protože AB a XC mají společný bod X. Pokud se rovnoběžka dotýká výsledné kružnice, je $Q = C$.

Nyní je ještě třeba ukázat, že všechny body, které nám při vylučování zbyly (tedy kružnice bez Q), nám vyjdou jako pata kolmice z D na alespoň jednu přímku XC. To je už ale snadné, protože pro libovolný bod P výsledné kružnice protíná přímka CP přímku AB v právě jednom bodě X, který můžeme zpětně použít na zvolené P. Puntík této úloze dává bod $P = C$, pro který najdeme X tak, že uděláme v C tečnu k výsledné kružnici a její průsečík s AB je X.

5. úloha

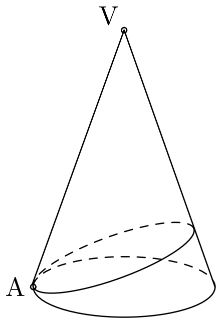
Je dán kužel s vrcholem V a bodem A na kraji podstavy. Poloměr jeho podstavy je 1 a $|VA| = 3$. Beruška leze nejkratší možnou cestou z vrcholu A po povrchu kužele opět do vrcholu A tak, že obleze celý kužel[3]. Určete, v jaké vzdálenosti od V je beruška ve chvíli, kdy je k V nejblíže.

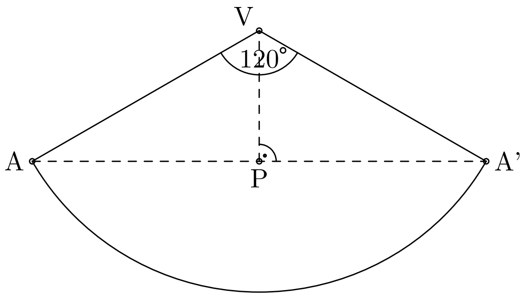
Řešení této úlohy spočívá v nápadu rozbalit si obal kuželu do roviny. Po rozbalení do roviny

[3]Pro formalisty: beruška někdy protne každou ze spojnic vrcholu V s krajními body podstavy.

je totiž délka nejkratší křivky z A do A kolem celého kuželu stejná jako před rozbalením. Tím úlohu převedeme na podstatně snazší příklad, který už řešíme výhradně v rovině. „Rozstřihněme“ tedy plášť kuželu po úsečce AV a rozbalme ho tak, jak ilustrují obrázky vlevo a vpravo na další stránce.

Nejkratší cesta z A do A' je právě úsečka AA'. Teď je třeba vypátrat tři parametry trojúhelníku $AA'V$, aby byl jasně určen. Ze zadání je $|AV| = |A'V| = 3$. Nyní určíme úhel AVA'. Délka oblouku AA' utvořeného ze spodní hrany podstavy kuželu je 2π, obvod celého kruhu K se středem ve V a poloměrem 3 by byl 6π, tedy třikrát větší, z čehož plyne, že náš plášť zaujímá přesně $\frac{1}{3}$ kruhu, a velikost úhlu AVA' je rovna $120°$. Tím jsme už jasně určili tvar trojúhelníku AVA', ve kterém je velikost výšky $|VP|$ právě hledanou nejmenší vzdáleností ze zadání. Snadno se pak nahlédne, že $|VP| = \sin \sphericalangle PAV \cdot |VA| = \frac{1}{2}|VA| = \frac{3}{2}$.





6. úloha

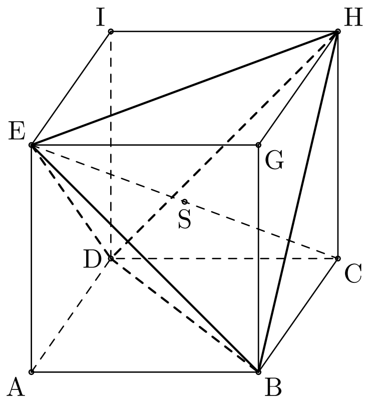
Je dán čtyřstěn $ABCD$. Označme o_B, o_C a o_D po řadě osy úhlů CAD, BAD a BAC. Nechť φ_B je rovina, jíž prochází o_B a je kolmá na rovinu $\overleftrightarrow{ACD}$, podobně φ_C je kolmá na $\overleftrightarrow{ABD}$ a prochází jí o_C a φ_D je kolmá na $\overleftrightarrow{ABC}$ a prochází jí o_D. Dokažte, že se roviny φ_B, φ_C a φ_D protínají v jedné přímce.

Nechť φ_B je množinou bodů, které mají stejnou vzdálenost od přímek AC a AD, φ_C je množinou bodů, které mají stejnou vzdálenost od přímek AB a AD a φ_D je množinou bodů, které mají stejnou vzdálenost od přímek AB a AC. φ_B a φ_C jsou různoběžné (obě obsahují bod A, ale nejsou shodné). Tedy $\varphi_B \cap \varphi_C$ je přímka. Podle výše popsaných vlastností je $\varphi_B \cap \varphi_C$ množinou bodů, které mají stejnou vzdálenost od přímek AB, AC a AD, tedy $(\varphi_B \cap \varphi_C) \subset \varphi_D$. Odtud plyne, že $\varphi_B \cap \varphi_C \cap \varphi_D = \varphi_B \cap \varphi_C$ je přímka, což jsme chtěli dokázat.

7. úloha

Kolik nejvýše bodů je možno umístit na sféru[4] o poloměru 1 tak aby vzdálenost každých dvou byla větší než $\sqrt{2}$.

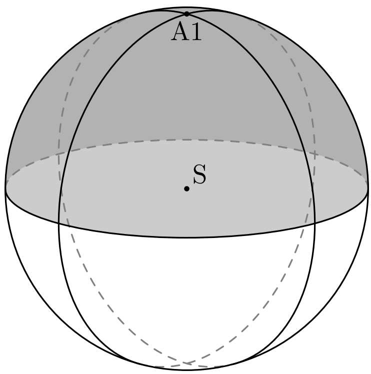
[4]Sféra je povrch koule.

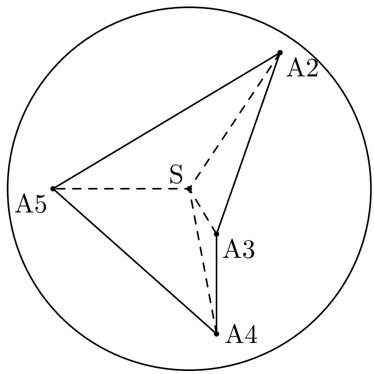


V řešení ukážeme, že čtyři body na kouli umístit zvládneme, ale pět a více už ne. Čtyři dostaneme tak, že si body na kouli umístíme například do pravidelného čtyřstěnu. Poměr délky hrany pravidelného čtyřstěnu a poloměru jeho opsané koule je $2\sqrt{\frac{2}{3}} : 1$, tedy větší než $\sqrt{2} : 1$, což nám vyhovuje. Poměr „spadlý z nebe" celkem snadno dopočítáme, pokud si uvědomíme, které vrcholy na krychli tvoří pravidelný čtyřstěn, jemuž je opsaná koule se středem ve středu krychle.

Pět bodů už na sféru neumístíme.

Pro spor předpokládejme, že umíme na povrch koule umístit aspoň pět bodů, které označme A_1, A_2, A_3, A_4, A_5. Díky podmínce za zadání, se do vzdálenosti $\sqrt{2}$ od A_1 nesmí nacházet žádný bod, což lze na jednotkové kouli reprezentovat tak, že se na povrchu polokoule s hlavním vrcholem A_1 nenachází už žádný další bod. Zbylé body A_2, A_3, A_4, A_5 se tedy musejí vejít na povrch druhé polokoule. Promítněme si A_2, A_3, A_4, A_5 na podstavu této polokoule. Označíme-li střed sféry (a zároveň polokoule) jako S a body A_2, A_3, A_4, A_5 přeznačíme tak, abychom jejich průměty prošli po směru hodinových ručiček kolem středu S, (tím nám vznikne čtyřúhelník $A'_2A'_3A'_4A'_5$ ve správném pořadí bodů) je zřejmé, že aspoň jeden z úhlů $A'_2SA'_3, A'_3SA'_4, A'_4SA'_5, A'_5SA'_2$ je menší nebo roven $90°$, protože průměty A'_2, A'_3, A'_4, A'_5 tvoří v nějakém pořadí čtyřúhelník a součet těchto úhlů je maximálně $360°$. Našli jsme dva body, které jsou k sobě blíž, než je povoleno, protože každý z nich by měl kolem sebe mít „teritorium" svojí vlastní polokoule, na které bude jediným vrcholem, a to v tomto případě splněno není.





8. úloha
Je dán čtyřstěn $A_1A_2A_3A_4$. Pro $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$, $i \neq j$ označme $\varphi_{i,j}$ rovinu kolmou na úsečku A_iA_j procházející bodem A_j. Označme B_1 bod, kde se protínají roviny $\varphi_{1,2}$, $\varphi_{1,3}$ a $\varphi_{1,4}$, podobně označme $B_2 = \varphi_{2,1} \cap \varphi_{2,3} \cap \varphi_{2,4}$, $B_3 = \varphi_{3,1} \cap \varphi_{3,2} \cap \varphi_{3,4}$ a $B_4 = \varphi_{4,1} \cap \varphi_{4,2} \cap \varphi_{4,3}$. Dokažte, že čtyřstěny $A_1A_2A_3A_4$ a $B_1B_2B_3B_4$ jsou shodné.

Označíme S střed koule vepsané čtyřstěnu $A_1A_2A_3A_4$. Pro $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ označíme C_i obraz bodu A_i ve středové souměrnosti podle bodu S. Dokážeme, že $C_i = B_i$, čímž úlohu vyřešíme – totiž $B_1B_2B_3B_4$ je pak obrazem $A_1A_2A_3A_4$ ve středové souměrnosti se středem S, tedy čtyřstěny jsou shodné.

Dokážeme například, že $B_1 = C_1$, ostatní důkazy jsou symetrické. Označme $\mathcal{O}$ sféru opsanou $A_1A_2A_3A_4$. Vzhledem k definici bodu C_1 je $\mathcal{O}$ Thaletovou sférou nad A_1C_1, tedy úhel $C_1A_jA_1$ je pravý pro $j \in \{2, 3, 4\}$. Odtud plyne, že bod C_1 leží v rovinách $\varphi_{1,2}$, $\varphi_{1,3}$ a $\varphi_{1,4}$. Podle definice bodu B_1 to však znamená, že $B_1 = C_1$.