8. série

Téma: Finální myš(maš)

Datum odeslání: 14. května 2007

1. úloha

(a) V růžovém království pěstují nový záhon růží. Záhon má tvar obdélníku 2×10, rozděleného na čtverce 1×1. Aby záhon potěšil oko krále, je potřeba, aby v každých dvou (hranou) sousedních čtvercích byl jiný druh růží. Zahradník má dohromady $n \geq 2$ druhů růží. Určete kolika způsoby může záhon osázet růžemi. (2 body)

(b) V šachovnicovém království dva princové právě bojují o trůn. Na nádvoří královského hradu je vyznačena velká šachovnice o rozměrech 8×8. Královští jezdci začínají v levém horním poli šachovnice. Princové se střídají v rozkazech pro jezdce a vždy je pošlou na nějaké další pole na šachovnici (jezdci se mohou však pohybovat jen tak, jak se pohybuje šachový kůň) Princ, který jezdce pošle na pole, na kterém už byli, není hoden velet armádě, a přichází o trůn. První rozkaz dává starší princ. Určete, který z princů má vyhrávající strategii, tj. bude-li dávat vhodné rozkazy, bude mít jistotu, že o trůn nepřijde. (3 body)

2. úloha

Je dána rovnice

$$4xy = z^2 + x + y.$$

(a) Dokažte, že v celých číslech bez nuly má tato rovnice nekonečně mnoho řešení. (2 body)

(b) Vyřešte tuto rovnici v přirozených číslech. (3 body)

3. úloha

V prostoru je dána uzavřená[1] lomená čára z n úseček. Všechny úsečky jsou stejně dlouhé a úhly u všech vrcholů (míst, kde se čára „láme“) jsou stejně velké. V závislosti na n určete, jestli už nutně všechny vrcholy čáry leží ve stejné rovině.

(a) Úlohu řešte pro $n = 4$ a $n = 6$. (2 body)

(b) Úlohu řešte pro obecné n. (3 body)

4. úloha

Fibonnaciho posloupností rozumíme poslopoupnost danou předpisem $F_1 = F_2 = 1$ a $F_{i+2} = F_{i+1} + F_i$ pro i přirozené.

(a) Dokažte, že pro každé přirozené n platí $F_1^2 + F_2^2 + \cdots + F_n^2 = F_n F_{n+1}$. (2 body)

(b) Dokažte, že je-li n přirozené, potom ho lze právě jedním způsobem zapsat jako součet

$$n = F_{i_1} + F_{i_2} + \cdots + F_{i_k}$$

kde $i_1 \geq 2$ a $i_{j+1} \geq i_j + 2$ pro každé $j \in \{1, 2, \ldots, k-1\}$. (3 body)

[1] To značí, že její konec a začátek leží v tomtéž bodě.

5. ÚLOHA

(a) Mějme n čísel $x_1, x_2, \ldots x_n$ náhodně (rovnoměrně nezávisle[2]) vybraných z intervalu $(0, 1)$. Určete pravděpodobnost, že pro každé $i \in \{3, 4, \ldots, n\}$ platí, že x_i leží uvnitř intervalu s krajními body x_{i-2} a x_{i-1}. (2 BODY)

(b) Mějme n bodů náhodně (rovnoměrně nezávisle) vybraných na kružnici. Určete pravděpodobnost, že střed kružnice leží uvnitř mnohoúhelníku tvořeného těmito body. (3 BODY)

6. ÚLOHA

(a) Buď E bod na úhlopříčce BD čtverce $ABCD$. Ukažte, že body A, E a středy opsaných kružnic trojúhelníků ABE a ADE tvoří další čtverec. (2 BODY)

(b) Buď $ABCD$ konvexní čtyřúhelník, X bod na straně AB, Y průsečík DX s AC. Ukažte, že kružnice opsané trojúhelníkům ABC, CDY a BXD mají společný bod. (3 BODY)

7. ÚLOHA

(a) Dokažte, že pro každé přirozené číslo $n > 1$ platí

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} < \frac{n-1}{n}.$$

(2 BODY)

(b) Dokažte, že pro každé přirozené číslo n platí

$$\left(1 + \frac{1}{1 \cdot 2}\right)\left(1 + \frac{1}{2 \cdot 3}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{n \cdot (n+1)}\right) < \frac{5}{2}.$$

(3 BODY)

Řešení 8. série

1. úloha

(a) V růžovém království pěstují nový záhon růží. Záhon má tvar obdélníku 2×10, rozděleného na čtverce 1×1. Aby záhon potěšil oko krále, je potřeba, aby v každých dvou (hranou) sousedních čtvercích byl jiný druh růží. Zahradník má dohromady $n \geq 2$ druhů růží. Určete kolika způsoby může záhon osázet růžemi.

(b) V šachovnicovém království dva princové právě bojují o trůn. Na nádvoří královského hradu je vyznačena velká šachovnice o rozměrech 8×8. Královští jezdci začínají v levém horním poli šachovnice. Princové se střídají v rozkazech pro jezdce a vždy je pošlou na nějaké další pole na šachovnici (jezdci se mohou však pohybovat jen tak, jak se pohybuje šachový kůň) Princ, který jezdce pošle na pole, na kterém už byli, není hoden velet armádě, a přichází o trůn. První rozkaz dává starší princ. Určete, který z princů má vyhrávající strategii, tj. bude-li dávat vhodné rozkazy, bude mít jistotu, že o trůn nepřijde.

---

[2]Neformálně řečeno: Žádný bod není pravděpodobnější než jiný a volba x_i nezávisí na volbě ostatních $x_j, j \neq i$. Více se dočteš v úvodu k páté sérii.

(a) Očíslujme si políčka jako na obrázku a začněme je osazovat podle tohoto pořadí.

1	3	5	7	9	11	13	15	17	19
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20

Pro první políčko máme n možností, pro druhé $n-1$ (nesmíme použít stejný druh růží jaký je na políčku 1). Uvažujme teď 2 případy:

(1) na políčku 3 je stejný druh růží jako na políčku 2, tedy pro políčko 4 máme $n-1$ možností

(2) na políčku 3 je jiný druh růží než na políčku 2, tedy pro políčko 3 máme $n-2$ možností, pro políčko 4 rovněž

Dvojici políček (3,4) můžeme osázet $n-1+(n-2)^2$ způsoby. U dvojic políček (5,6), (7,8), ... (19,20) je situace analogická osazování políček 3 a 4, a proto pro políčka 3–20 máme dohromady $(n-1+(n-2)^2)^9$ možností. Tudíž celý záhon můžeme osázet $n(n-1)(n-1+(n-2)^2)^9$ způsoby, což je po drobné kosmetické úpravě to samé jako $n(n-1)(n^2-3n+3)^9$.

(b) Rozdělme šachovnici na 8 obdélníků 2×4 a všimněme si, že stojí-li kůň na libovolném políčku P jednoho z obdélníků, existuje v tomto obdélníku přesně jedno pole P', na které může (jedním tahem) skočit (povšimni si, že naopak z P' skočí na pole P, neboli $P'' = P$). Z toho už poměrně snadno vyrobíme vyhrávající strategii pro prvního z princů: Vždy táhni na pole ve stejném obdélníku, ve kterém jezdec zrovna stojí (tedy z pole P na pole P').

Proč s touto strategií nemůže prohrát? Princ prohraje tehdy, když už nemá, kam táhnout. Aby tedy první princ prohrál, musela by nastat situace, kdy kůň stojí na nějakém políčku P a nemůže skočit na P', protože tam už byl. Jak se ale mohlo stát, že už byl na poli P'? Jsou dvě možnosti: Buďto na ně táhl někdy dřív druhý princ – pak by ale první hned jel na $P'' = P$, takže by na tomto políčku teď nemohl stát a přemýšlet, kam může jet! Anebo na ně táhl první princ – ten ale na P' skočí jenom z P, takže ani v tomto případě by se tu nemohl kůň ocitnout znovu.

První princ tedy nemůže prohrát, a protože někdo časem vyhraje, bude to první princ. Ať žije nový král! (:

2. úloha

Je dána rovnice

$$4xy = z^2 + x + y.$$

(a) Dokažte, že v celých číslech bez nuly má tato rovnice nekonečně mnoho řešení.

(b) Vyřešte tuto rovnici v přirozených číslech.

(a) Rovnice v přirozených číslech je zadaná samostatně jako část (b), asi to tedy nebude nic lehkého ... Což takhle tedy zkusit zvolit nějakou z neznámých zápornou? Celkem se třeba nabízí volba $y = -1$, po dosazení do zadané rovnice člověk už celkem často dopočte, že třeba $x = -(5t^2 + 2t), z = 5t + 1, t \in \mathbb{Z}$ dává nekonečně mnoho navzájem různých řešení.

(b) Dokážeme, že rovnice nemá žádné přirozené řešení. K tomu se nám bude hodit použít následujícího nepříliš obtížného pozorování:

Lemma. *Dává-li číslo $n \in \mathbb{N}$ zbytek 3 po dělení 4, je dělitelné nějakým prvočíslem, které také dává zbytek 3 po dělení 4.*

Vyzbrojeni tímto lemmatem (které si krásná čtenářka nebo udatný čtenář může dokázat bez mojí pomoci) se můžeme pustit do boje s úlohou. Rovnici nejprve upravíme do ekvivalentního tvaru $(4x-1)(4y-1) = (2z)^2 + 1^2$. Přitom x je přirozené, přirozené číslo $4x-1$ dává po dělení

4 zbytek 3, a tedy je dělitelné nějakým prvočíslem p, které také dává zbytek 3 po dělení 4. Číslo $(2z)^2 + 1$ je tedy dělitelné tímto p. Ha! Ukazuje se, že drak (vlastně zadaná úloha) je zákeřnější, než se na první pohled zdálo! Budeme na něj muset vytasit ještě jedno lemma:

Lemma. *Pokud prvočíslo p, které dává zbytek 3 po dělení 4, dělí číslo $a^2 + b^2$, pak p dělí obě čísla a, b.*

Z tohoto lemmatu už jednoduše plyne, že p dělí 1, což je zajisté spor.

Zbývá tedy dokázat toto druhé, netriviální, lemma. Určitě $p \geq 3$. Předpokládejme, že $a^2 + b^2 \equiv 0 \pmod{p}$, ale p nedělí ani a ani b. Označme $x = ab^{p-2}$. Použitím malé Fermatovy věty a vztahu $a^2 \equiv -b^2 \pmod{p}$ můžeš snadno ověřit, že $x^2 \equiv -1 \pmod{p}$. Umocněním této kongruence na $(p-1)/2$ dostaneme (opět používáme MFV, ale (v poslední úpravě) také toho, že $p \equiv 3 \pmod{4}$, tedy $(p-1)/2$ je liché):

$$1 \equiv x^{p-1} \equiv (-1)^{\frac{p-1}{2}} = -1 \pmod{p},$$

což je spor, protože by pak p dělilo dvojku.

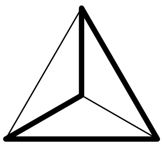
3. úloha

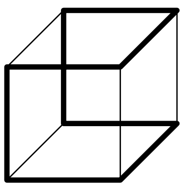
V prostoru je dána uzavřená[3] lomená čára z n úseček. Všechny úsečky jsou stejně dlouhé a úhly u všech vrcholů (míst, kde se čára „láme“) jsou stejně velké. V závislosti na n určete, jestli už nutně všechny vrcholy čáry leží ve stejné rovině.

(a) Úlohu řešte pro $n = 4$ a $n = 6$.

(b) Úlohu řešte pro obecné n.

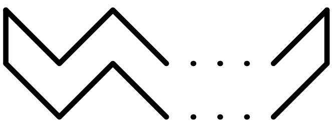
(a) Pro $n = 4$ uvažme pravidelný čtyřstěn $ABCD$. Pak hledaným protipříkladem je uzavřená lomená čára $ABCDA$ (všechny úsečky svírají úhel 60°). Pro $n = 6$ uvažme krychli $ABCDEFGH$ a uzavřenou lomenou čáru $ABCDHGFEA$ (tentokrát svírají úhel 90°).



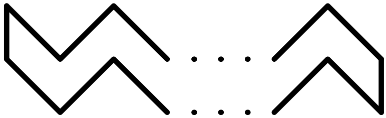


(b) Nejdříve najdeme protipříklady pro sudá n a pro lichá n, která jsou ostře větší než 5.

Pro $n = 4$ máme vyřešeno v (a). Buď $n = 2k$, $k \geq 3$. Obdobně jako pro případ $n = 6$; uvažme „schody“ (viz obrázek, všechny dvojice sousedních hran svírají úhel 90°).



[3]To značí, že její konec a začátek leží v tomtéž bodě.



Nechť $n = 2k + 1$ pro nějaké přirozené $k \geq 3$, pak zkonstruujeme uzavřenou lomenou čáru obdobně jako v předchozím případě, jen na konci nahradíme poslední (horní hranu schodů) dvěma hranami a to tak, že poslední dva vrcholy „rozevřeme" tak, aby byly právě ve vzdálenosti $\sqrt{2}a$, kde a je délka hrany. Pak mezi ně můžeme vložit pravoúhlý rovnoramenný trojúhelník s rameny délky a a to dokonce tak, aby jeho ramena s posledními hranami lomené čáry svírala úhel $90°$ (rozmysli si, že mohou svírat téměř libovolný úhel – největší úhel svírají, pokud leží s předchozími hranami v rovině).

A nyní ta nejtěžší část úlohy: dokážeme, že pro $n = 5$ musí už celá lomená čára ležet v rovině. Mějme vyhovující lomenou čáru $ABCDEA$. Uvědomme si, že máme-li daný libovolný úhel a délku, tak všechny vzdálenosti v požadované lomené čáře jsou určeny, protože každé dva sousední úseky leží v rovině, tedy máme danou vzdálenost AB a BC tedy i AC, obdobně BD, CE DA a EB, tedy vzdálenost libovolné dvojice vrcholů. Snadno ověříme, že pak už musí být lomená čára určená jednoznačně (až na nějaké shodné zobrazení).

Uvažme nyní shodné zobrazení, které body A, B, C, D a E zobrazí po řadě do bodů B, C, D, E a A. Označme toto zobrazení f. Pak zřejmě f zobrazuje těžiště bodů A, B, C, D, E na sebe sama. Zobrazení f může být přímé, nebo nepřímé (nepřímé je např. v rovině osová souměrnost, přímé naopak posunutí, otočení). Pokud složíme zobrazení f pětkrát za sebe dostaneme identitu, tedy f musí být přímé zobrazení (jinak i pětkrát složené by bylo nepřímé) a protože má pevný bod, tak je to otočení (nějaká trojrozměrná rotace kolem těžiště), z čehož již plyne, že $ABCDE$ je pravidelný pětiúhelník a leží tedy v jedné rovině.

4. úloha

Fibonnaciho posloupností rozumíme poslopoupnost danou předpisem $F_1 = F_2 = 1$ a $F_{i+2} = F_{i+1} + F_i$ pro i přirozené.

(a) Dokažte, že pro každé přirozené n platí $F_1^2 + F_2^2 + \cdots + F_n^2 = F_n F_{n+1}$.

(b) Dokažte, že je-li n přirozené, potom ho lze právě jedním způsobem zapsat jako součet

$$n = F_{i_1} + F_{i_2} + \cdots + F_{i_k}$$

kde $i_1 \geq 2$ a $i_{j+1} \geq i_j + 2$ pro každé $j \in \{1, 2, \ldots, k-1\}$.

(a) Dokážeme matematickou indukcí. Pro $n = 1$ máme $F_1^2 = 1^2 = 1 \cdot 1 = F_1 F_2$.

Předpokládejme tedy, že tvrzení platí pro n a dokažme pro $n + 1$:

$$F_1^2 + F_2^2 + \cdots + F_n^2 + F_{n+1}^2 = F_n F_{n+1} + F_{n+1}^2 = F_{n+1}(F_n + F_{n+1}) = F_{n+1} F_{n+2}$$

V první rovnosti byl použit indukční předpoklad a v poslední definice Fibonacciho posloupnosti.

(b) Nejdříve indukcí přes dva dokážeme, že každý součet, který vyhovuje zadání a obsahuje pouze indexy (ostře) menší než i, je ostře menší než F_i.

Pro $i = 3$ máme jediný možný součet, a to $F_2 = 1$ a platí $F_2 = 1 < 2 = F_3$. Pro $i = 4$ máme součty F_2 a F_3 a platí $F_2 = 1 < F_3 = 2 < F_4 = 3$.

Nechť tvrzení platí pro $i-1$, mějme součet vyhovující zadání, jehož největší index je $i+1$ (označme ho S), pak po odečtení F_{i+1} dostaneme součet s nejvyšším indexem nejvýš $i-1$. Tedy podle indukčního předpokladu platí:

$$S - F_{i+1} < F_i$$
$$S < F_i + F_{i+1} = F_{i+2}$$

Nyní podobnou indukcí dokážeme, že každé přirozené číslo má právě jeden takový rozklad na součet. První indukční krok je stejný jako v předchozím případě. Tedy předpokládejme, že tvrzení platí pro každé $n_0 < F_{i-1}$ a dokažme ho pro $F_i \leq n < F_{i+1}$. Protože součet obsahující F_j s indexy nejvýše $i-1$ je menší než F_i, tak rozklad čísla n musí obsahovat F_i (nemůže obsahovat ani větší, protože $n < F_{i+1}$). Uvažme tedy číslo $n - F_i$ a jeho rozklad. Platí $n < F_{i+1} \Rightarrow n - F_i < F_{i+1} - F_i = F_{i-1}$, pokud je tedy $n - F_i$ nenulové, má jednoznačný rozklad z indukčního předpokladu, jinak jsme našli jednoznačný rozklad $n = F_i$.

5. úloha

(a) Mějme n čísel $x_1, x_2, \dots x_n$ náhodně (rovnoměrně nezávisle[4]) vybraných z intervalu $(0,1)$. Určete pravděpodobnost, že pro každé $i \in \{3, 4, \dots, n\}$ platí, že x_i leží uvnitř intervalu s krajními body x_{i-2} a x_{i-1}.

(b) Mějme n bodů náhodně (rovnoměrně nezávisle) vybraných na kružnici. Určete pravděpodobnost, že střed kružnice leží uvnitř mnohoúhelníku tvořeného těmito body.

(a) Cílem úlohy bylo uvědomit si, že výsledná pravděpodobnost závisí jen na pořadí bodů v intervalu, ne na jejich konkrétní poloze. Všech možných pořadí je $n!$, snadno si rozmyslíš, že pro $n \geq 2$ jen dvě pořadí vyhovují podmínkám zadání. Jsou to pořadí

$$x_1 < x_3 < x_5 < \dots < x_6 < x_4 < x_2$$

a

$$x_1 > x_3 > x_5 > \dots > x_6 > x_4 > x_2.$$

Výsledná pravděpodobnost je tedy $\frac{2}{n!}$. Pro $n = 1$ je samozřejmě jen jedno „pořadí“ a výsledná pravděpodobnost je 1.

(b) Budeme počítat pravděpodobnost, že střed neleží uvnitř mnohoúhelníku, výsledná pravděpodobnost se pak získá odečtením od jedničky.

Střed neleží uvnitř mnohoúhelníku, právě když všechny body leží v nějaké společné polorovině procházející středem kružnice (rozmysli si). Nyní provedeme trik. Představme si, že pro každý bod nejprve vybereme (rovnoměrně nezávisle) dvojici protilehlých bodů, a až potom se rozhodneme, který z těchto dvou bodů bude hledaný bod (s pravděpodobností $\frac{1}{2}$ pro každý z bodů). Pravděpodobnost, že pro dva různé body vybereme stejnou dvojici protilehlých bodů je nulová, tedy takovou situaci uvažovat nebudeme.

Když už máme zvoleny dvojice protilehlých bodů, tak počet všech možných voleb vrcholů mnohoúhelníku je 2^n. Ukážeme, že $2n$ z těchto voleb neobsahuje střed kružnice. Totiž příslušný mnohoúhelník neobsahuje střed, pokud je na kružnici souvislý úsek vybraných bodů a potom

[4] Neformálně řečeno: Žádný bod není pravděpodobnější než jiný a volba x_i nezávisí na volbě ostatních $x_j, j \neq i$. Více se dočteš v úvodu k páté sérii.

následuje souvislý nevybraných bodů (samozřejmě protilehlých k vybraným). Takový úsek lze jednoznačně určit například bodem, co je na kraji tohoto úseku ve směru hodinových ručiček, a takových možných bodů je $2n$ (máme n dvojic protilehlých bodů).

Když tedy máme určeny dvojice protilehlých bodů, dostáváme pravděpodobnost $\frac{2n}{2^n} = \frac{n}{2^{n-1}}$, že střed kružnice neleží v mnohoúhelníku. Protože tato pravděpodobnost nezávisí na volbě dvojic, je tedy i pravděpodobnost v původní úloze, že střed leží vně mnohoúhelníku rovna $\frac{n}{2^{n-1}}$.

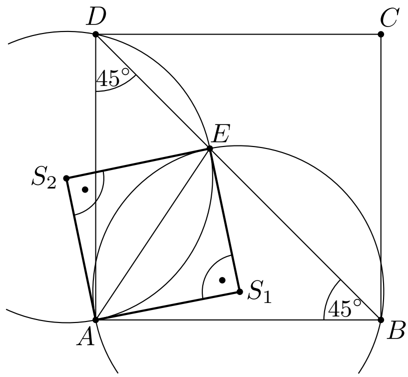
Pravděpodobnost, že střed leží uvnitř je tak $1 - \frac{n}{2^{n-1}}$.

6. úloha

(a) Buď E bod na úhlopříčce BD čtverce $ABCD$. Ukažte, že body A, E a středy opsaných kružnic trojúhelníků ABE a ADE tvoří další čtverec.

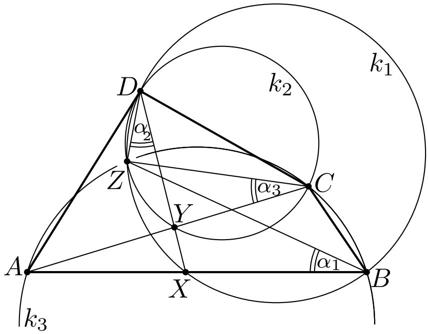
(b) Buď $ABCD$ konvexní čtyřúhelník, X bod na straně AB, Y průsečík DX s AC. Ukažte, že kružnice opsané trojúhelníkům ABC, CDY a BXD mají společný bod.

(a) Označme S_1, S_2 středy kružnic opsaných trojúhelníkům ABE, AED, stejně jako na obrázku.



Potom je podle věty o středovém a obvodovém úhlu $|\sphericalangle AS_1E| = 2|\sphericalangle ABE| = 2 \cdot 45° = 90°$. Analogicky pro druhý střed S_2 dostáváme $|\sphericalangle AS_2E| = 90°$. Dále víme, že jsou trojúhelníky AS_1E a AS_2E rovnoramenné (protože např. $|S_1A| = |S_1E| = r_1$ je poloměr první kružnice), dopočtením úhlů v těchto trojúhelnících dostaneme $|\sphericalangle AES_1| = |\sphericalangle EAS_1| = |\sphericalangle AES_2| = |\sphericalangle EAS_2| = 45°$. Všechny úhly ve čtyřúhelníku AS_1ES_2 jsou pravé a $|S_1A| = |S_1E|$ už zaručuje, že je to čtverec.

(b) Označme postupně k_1, k_2 a k_3 kružnice opsané trojúhelníkům BDX, DCY a ABC, úhly $|\sphericalangle ABZ| = \alpha_1$, $|\sphericalangle XDZ| = \alpha_2$ a $|\sphericalangle ACZ| = \alpha_3$ a Z průsečík kružnic k_1 a k_2. Cílem bude ukázat, že bod Z leží i na kružnici k_3, viz obrázek.



Úhly α_1 a α_2 jsou obvodové úhly na kružnici k_1 příslušející stejné tětivě XZ, proto $\alpha_1 = \alpha_2$. Úhly α_2 a α_3 jsou obvodové úhly na kružnici k_2 k tětivě YZ, proto $\alpha_2 = \alpha_3$. Složením rovností $\alpha_1 = \alpha_2$ a $\alpha_2 = \alpha_3$ dostáváme $\alpha_1 = \alpha_3$, jinak zapsáno $|\sphericalangle ABZ| = |\sphericalangle ACZ|$. Z dalšího použití věty o obvodových úhlech plyne, že body $ABCZ$ leží na jedné kružnici, tedy na kružnici k_3, což jsme chtěli dokázat.

7. úloha

(a) Dokažte, že pro každé přirozené číslo $n > 1$ platí

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} < \frac{n-1}{n}.$$

(b) Dokažte, že pro každé přirozené číslo n platí

$$\left(1 + \frac{1}{1 \cdot 2}\right)\left(1 + \frac{1}{2 \cdot 3}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{n \cdot (n+1)}\right) < \frac{5}{2}.$$

(a) Platnost zadané nerovnosti dokážeme indukcí.

Pro $n = 2$ je nerovnost triviálně splněna: $\frac{1}{4} < \frac{1}{2}$.

Indukční krok: Předpokládáme platnost nerovnosti pro všechna $k \leq n$ a dokážeme platnost pro $n + 1$.

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} < \frac{n-1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{n^2(n+1)}{n(n+1)^2} - \frac{1}{n(n+1)^2} < \frac{n}{n+1},$$

kde v první nerovnosti jsme využili indukčního předpokladu a v poslední faktu, že $\frac{1}{n(n+1)^2}$ je pro n přirozené kladné číslo. A tímto je nerovnost dokázána.

(b) Indukcí dokážeme silnější nerovnost

$$\left(1 + \frac{1}{1 \cdot 2}\right)\left(1 + \frac{1}{2 \cdot 3}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{n \cdot (n+1)}\right) \leq \frac{5}{2} - \frac{5}{2n+3}.$$

(i) $n = 1$ Zřejmě platí $\left(1 + \frac{1}{1 \cdot 2}\right) \leq \frac{5}{2} - \frac{5}{2+3}$.

(ii) Ať nerovnost platí pro $n - 1$, dokážeme ji pro n. K tomu stačí dokázat, že se levá strana zvětší méněkrát než pravá strana, neboli nerovnost $\left(1 + \frac{1}{n \cdot (n+1)}\right) \leq \frac{\frac{5}{2} - \frac{5}{2n+3}}{\frac{5}{2} - \frac{5}{2n+1}}$. Po chvíli nudného upravování výrazů zjistíme, že tato nerovnost vskutku platí.