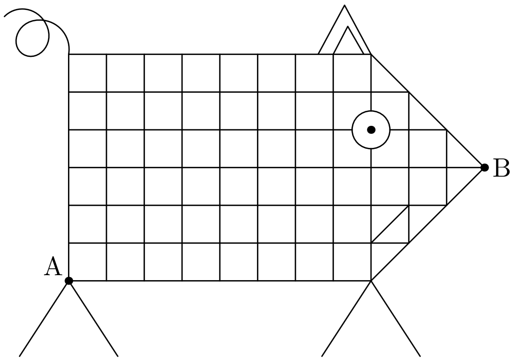
1. seriálová série

Téma: Kombinatorika

Datum odeslání: 14. ledna 2008

1. úloha (5 bodů)

Určete počet cest vedoucích ze spodku zadečku prasátka (bod A) do čumáku prasátka (bod B) takových, že vedou jen doprava, nahoru nebo šikmo doprava nahoru (poslední případ může nastat jen u brady či pusy prasátka).



2. úloha (5 bodů)

V závislosti na přirozeném k určete hodnotu součtu

$$\binom{1}{0}+$$
$$+\binom{1}{1}+\binom{3}{2}+\binom{5}{3}+\cdots+\binom{2k-1}{k}+$$
$$+\binom{2}{0}+\binom{4}{1}+\binom{6}{2}+\cdots+\binom{2k}{k-1}.$$

3. úloha (5 bodů)

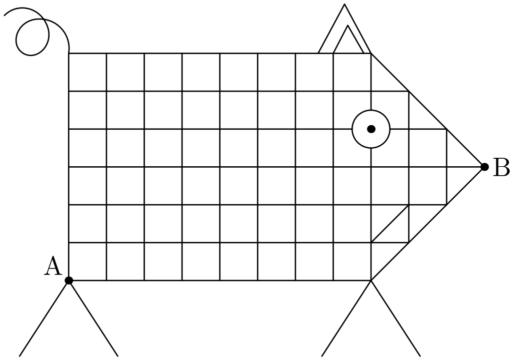
V závislosti na přirozeném n určete hodnotu součtu

$$1^3\binom{n}{1}+2^3\binom{n}{2}+3^3\binom{n}{3}+\cdots+n^3\binom{n}{n}.$$

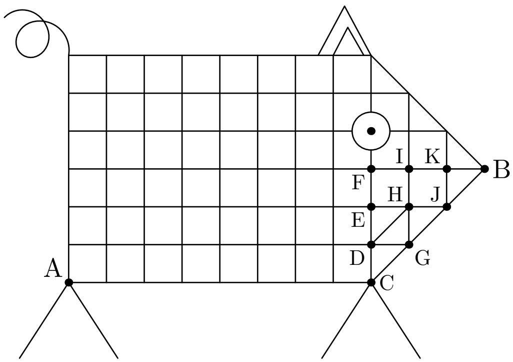
Řešení 1. seriálové série

1. úloha

Určete počet cest vedoucích ze spodku zadečku prasátka (bod A) do čumáku prasátka (bod B) takových, že vedou jen doprava, nahoru nebo šikmo doprava nahoru (poslední případ může nastat jen u brady či pusy prasátka).



Označme si C, D, … , K významné body prasátka jako na obrázku. Dále si označme b počet cest vedoucích z vrcholu A do B splňujících podmínky zadání. Podobné značení zavedeme pro ostatní písmenka c, d, … , k.



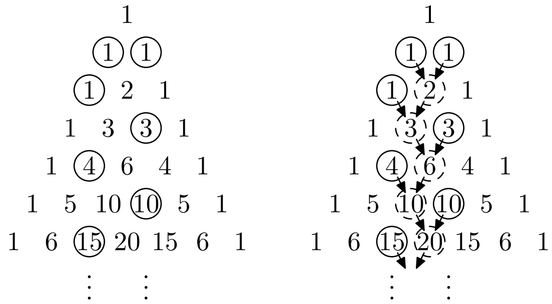
Podle textu seriálu je $c = \binom{8}{0} = 1$, $d = \binom{9}{1} = 9$, $e = \binom{10}{2} = 45$ a $f = \binom{11}{3} = 165$. Dále platí $g = c + d$, $h = d + e + g$ (pozor!), $i = f + h$, $j = g + h$, $k = j + i$, $b = j + k$. Odtud postupně dopočítáme $g = 10$, $h = 64$, $i = 229$, $j = 74$, $k = 303$, $b = 377$. Tedy počet cest vedoucích z A do B splňujících podmínky zadání je 377.

2. úloha

V závislosti na přirozeném k určete hodnotu součtu

$$\begin{gathered}\binom{1}{0}+\\ +\binom{1}{1}+\binom{3}{2}+\binom{5}{3}+\cdots+\binom{2k-1}{k}+\\ +\binom{2}{0}+\binom{4}{1}+\binom{6}{2}+\cdots+\binom{2k}{k-1}.\end{gathered}$$

Hlavní myšlenka řešení je, podobně jako v textu seriálu, zakroužkovat příslušné členy Pascalova trojúhelníku (obrázek vlevo). Potom už je jasné, jak se tato čísla budou postupně sčítat (obrázek vpravo). Poslední dva členy, které se sečtou, jsou $\binom{2k}{k-1}$ a $\binom{2k}{k}$. Jejich součet je $\binom{2k+1}{k}$, což je zároveň i řešení úlohy.



3. úloha

V závislosti na přirozeném n určete hodnotu součtu

$$1^3\binom{n}{1}+2^3\binom{n}{2}+3^3\binom{n}{3}+\cdots+n^3\binom{n}{n}.$$

Řešení bude velmi analogické řešení příkladu ze seriálu. Opět bude kocourkovské zastupitelstvo volit městskou radu (s alespoň jedním radním). Navíc jeden z radních bude starosta, jeden bude finančník a jeden bude mluvčí rady. Jeden radní může obsadit i více z těchto funkcí. Spočteme opět dvěma způsoby počet možných voleb.

I. způsob: Zcela analogickým postupem jako v textu seriálu dostáváme, že tento počet je

$$1^3\binom{n}{1}+2^3\binom{n}{2}+\cdots+n^3\binom{n}{n}.$$

II. způsob: Nejprve zvolíme starostu, finančníka a mluvčího. Mohou nastat tři situace.

První situace je, že jeden hyperaktivní zastupitel je zároveň starostou, finančníkem i mluvčím. Toho můžeme zvolit n způsoby a u zbylých zastupitelů máme 2^{n-1} možností (každý buď radním je nebo není). Dohromady je to $n2^{n-1}$ možností.

Druhá situace je, že tyto tři funkce budou zastávat dva zastupitelé (tedy radní). Jsou 3 možnosti, jak vybrat, zda je to starosta, finančník nebo mluvčí, kdo už nemá další funkci. Je-li takto vybráno, je pak n možností, jak vybrat, kdo zastává jednu funkci, a poté $n-1$ možností, jak vybrat, kdo zastává dvě funkce. Přidáme-li ještě 2^{n-2} možných voleb zbytku rady, dostáváme dohromady $3n(n-1)2^{n-2}$ možných voleb.

Třetí situace je, že každou funkci zastává někdo jiný. Potom je $n(n-1)(n-2)$ možností, jak rozdělit funkce, a následuje 2^{n-3} možných voleb rady, dohromady $n(n-1)(n-2)2^{n-3}$.

Sečteme-li první, druhou a třetí situaci, dostáváme

$$(4n+6n(n-1)+n(n-1)(n-2))2^{n-3}=(n+3)n^2 2^{n-3}$$

možností.

Spočítali jsme dvěma způsoby tentýž údaj. Tedy výsledek spočítaný druhým způsobem je řešením úlohy.

2. seriálová série

Téma: Kombinatorika

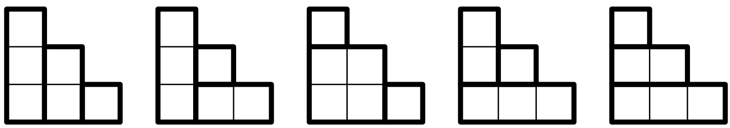
Datum odeslání: 10. března 2008

4. úloha (5 bodů)

Určete počet způsobů, jak lze obarvit políčka tabulky 3×3 červeně, žlutě a modře tak, že každá barva je použita právě třikrát a navíc se v obarvení nenachází žádná stejnobarevná kostička tvaru obdélníku 1×3 (ani 3×1). Za různá považujeme i obarvení lišící se převrácením či otočením, např. obarvíme-li prvně spodní řádek červeně a vrchní modře a poté spodní řádek modře a vrchní červeně, jedná se o dvě různá obarvení.

5. úloha (5 bodů)

Určete počet způsobů, jak vydláždit schodiště o straně n právě n obdélníky (či čtverci). Na obrázku je příklad pro $n = 3$.



6. úloha (5 bodů)

Na krasobruslařskou soutěž přijelo n bruslařů. Každý bruslař je ohodnocen jednou ze známek $1, 2, \dots, n$ (různí bruslaři můžou dostat stejné známky). Označme[1] A_i množinu všech možných ohodnocení (celé n-tice) bruslařů, při nichž žádný z bruslařů nedostal známku i.

(1) Spočtěte $|A_i|$, tj. velikost A_i.
(2) Pro k přirozené a $\{i_1, i_2, \dots, i_k\} \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$ spočtěte $|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}|$.
(3) Určete hodnotu výrazu

$$\binom{n}{0}(n-0)^n - \binom{n}{1}(n-1)^n + \binom{n}{2}(n-2)^n - \dots + (-1)^n \binom{n}{n} 0^n.$$

Řešení 2. seriálové série

4. úloha

Určete počet způsobů, jak lze obarvit políčka tabulky 3×3 červeně, žlutě a modře tak, že každá barva je použita právě třikrát a navíc se v obarvení nenachází žádná stejnobarevná kostička tvaru obdélníku 1×3 (ani 3×1). Za různá považujeme i obarvení lišící se převrácením či otočením, např. obarvíme-li prvně spodní řádek červeně a vrchní modře a poté spodní řádek modře a vrchní červeně, jedná se o dvě různá obarvení.

[1] Pokud je Ti to příjemnější, můžeš s množinou A_i pracovat jako s množinou všech funkcí $f\colon \{1, 2, \dots, n\} \to \{1, 2, \dots, i-1, i+1, i+2, \dots n\}$.

Nejdříve si spočteme, kolik je vůbec všech obarvení daného čtverce třemi barvami (modrou, červenou a žlutou) takových, že každá z nich je použita právě třikrát. Označme tuto množinu třeba A. Na takové obarvení můžeme nahlížet tak, že nejdříve obarvíme tři políčka červenou – máme $\binom{9}{3}$ možností, neboť vybíráme z devíti polí, pro tři modrá pole máme pak $\binom{6}{3}$ možností (zbylo nám šest polí) a pro žlutou jen jednu možnost, a to všechna zbylá pole (nebo taky $\binom{3}{3}$, abychom dodrželi symetrii). Celkový počet pak dostáváme pravidlem součinu:

$$|A| = \binom{9}{3}\binom{6}{3}\binom{3}{3} = \frac{9!}{3! \cdot 3! \cdot 3!} = 1680.$$

Dále spočítáme pomocí principu inkluze a exluze, kolik je takových obarvení, že obsahují sloupec nebo řádek jedné barvy. Uvědom si, že jedna barva může tvořit jen jeden sloupec (neboť můžeme obarvit pouze tři políčka). Označme tedy C množinu všech obarvení, které obsahují sloupec nebo řádek červené barvy, obdobně i M, respektive Z pro modrou, respektive žlutou barvu. Princip inkluze a exkluze pak říká:

$$|C \cup M \cup Z| = |C| + |M| + |Z| - |C \cap M| - |C \cap Z| - |M \cap Z| + |C \cap M \cap Z|.$$

Spočítáme $|C|$, máme tedy celkem 6 možností výběru sloupce nebo řádku, který bude červený, poté musíme obarvit ještě tři pole modře a zbytek žlutě, pro to máme celkem $\binom{6}{3}$ možností. Dohromady $|C| = 6\binom{6}{3}$. Stejně tak můžeme spočítat $|M|$ a $|Z|$, platí tedy $|C| = |M| = |Z| = 120$.

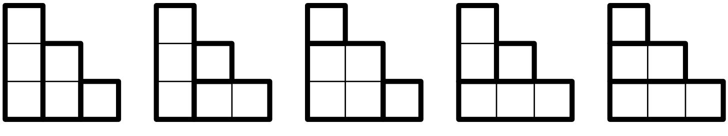
Mohutnost průniků po dvou spočítáme podobně, máme 6 možností výběru prvního sloupce nebo řádku. Na výběr druhého nám už ale zbývají jen dvě možnosti, neboť jinak bychom museli nějaké políčko obarvit dvěma barvami. Poslední řádek nebo sloupec už má také jasnou barvu. Tady si můžeme uvědomit, že pokud už existují dva jednobarevné sloupce nebo řádky, tak je jednobarevný i třetí sloupec nebo řádek – tedy platí dokonce rovnost množin[2] $C \cap M = C \cap Z = M \cap Z = C \cap M \cap Z$. Dohromady jsme tedy zjistili, že $|C \cap M| = |C \cap Z| = |M \cap Z| = |C \cap M \cap Z| = 12$.

Zbývá nám už jen dosadit, hledaný počet tedy je:

$$|A| - |C \cup M \cup Z| = 1680 - 3 \cdot 120 + 3 \cdot 12 - 12 = 1344.$$

5. úloha

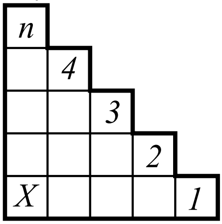
Určete počet způsobů, jak vydláždit schodiště o straně n právě n obdélníky (či čtverci). Na obrázku je příklad pro $n = 3$.



[2] Teď bychom mohli zajásat a uvědomit si, že jsme každou takovou možnost zatím započítali třikrát – za každou barvu jednou, zbývá nám ji dvakrát odečíst. Když se podíváš tak nám vyjde právě to, na co dojdeme i principem inkluze a exkluze. Jak jinak by to také mohlo být. ;-)

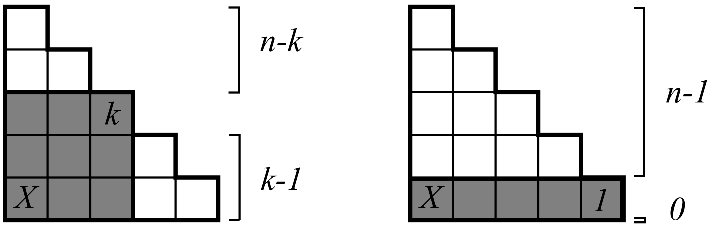
Pri riešení takýchto úloh je vždy dobré si spočítať, ako sa to správa pre pár prvých členov. V tomto prípade pre $n \in \{1, 2, 3, 4\}$ dostaneme postupne hodnoty $\{1, 2, 5, 14\}$, čo veľmi pripomína Catalanove čísla. Tak skúsime dokázať, že sú to naozaj ony.

Pomenujme si veci na obrázku. Nech schody sú políčka nachádzajúce sa na diagonále, očíslujme ich zospodu $1, \ldots, n$. Ďalej nech políčko X je políčko nachádzajúce sa v rohu schodiska a napokon schodiskom budem nazývať celý obrázok.



Na začiatok si môžme všimnúť, že každý schod musí byť pokrytý iným obdĺžnikom. Je to tak preto, lebo zrejme žiaden obdĺžnik nevie pokryť dva a viac schodov. Navyše, keďže je obdĺžnikov rovnako ako schodov, každý obdĺžnik musí pokryť práve jeden schod. Tiež z toho vyplýva, že schodisko s hranou n nevieme pokryť menej než n obdĺžnikmi. (Ináč by musel nejaký pokryť aspoň dva schody.)

Teraz si všimnime políčko X. To musí byť pokryté nejakým obdĺžnikom, ktorý pokrýva niektorý schod k. Čo sa ale nestane – tento obdĺžnik nám rozdelí pôvodné schodisko na dve menšie. Ľahko spočítať, že schodisko nad týmto obdĺžnikom bude mať veľkosť $n - k$ a schodisko napravo veľkosť $k - 1$.



Koľkými obdĺžnikmi musia byť vydláždené tieto „podschodiská“? Každé musí byť vydláždené aspoň takým počtom obdĺžnikov, koľko obsahuje schodov, čiže spolu ich musí byť aspoň $(n - k) + (k - 1) = n - 1$. Lenže my už máme na vydláždenie veľkého schodiska k dispozícii práve $n - 1$ obdĺžnikov (jeden sme minuli na obdĺžnik s políčkom X), takže každé z menších schodísk musí byť vydláždené takým počtom obdĺžnikov, akú má hranu.

To sme už skoro hotoví, pretože tým vieme rekurentne vyjadriť vzťah pre dláždenie. Označme p_n počet spôsobov, ako vydláždiť schodisko so stranou n. Nech oblžnik pokrývajúci políčko X pokrýva schod k. Potom pre takto pevne zvolený obdĺžnik je počet možných vydláždení $p_{n-k}p_{k-1}$. Ten obdĺžnik môže pokrývať všetky schody 1 až n, preto potrebujeme sčítať cez všetky k:

$$p_n = \sum_{k=1}^{n} p_{n-k}p_{k-1} = p_{n-1}p_0 + p_{n-2}p_1 + \cdots + p_0p_{n-1}$$

Pokiaľ by sme navyše vedeli, že $p_0 = 1$, tak by to boli práve Catalanove čísla (viď úvod k seriálu). To je ale pravda, pretože pre nás to znamená počet spôsobov, ktorými sa dá vydláždiť schodisko veľkosti 0. A to je 1 z toho dôvodu, že na vydláždenie nemáme inú možnosť, len ho nechať bez obdĺžníkov.

Teda počet spôsobov ako vydláždiť schodisko veľkosti n sú Catalanove čísla: $p_n = c_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$.

6. úloha

Na krasobruslařskou soutěž přijelo n bruslařů. Každý bruslař je ohodnocen jednou ze známek $1, 2, \ldots, n$ (různí bruslaři můžou dostat stejné známky). Označme[3] A_i množinu všech možných ohodnocení (celé n-tice) bruslařů, při nichž žádný z bruslařů nedostal známku i.

(1) Spočtěte $|A_i|$, tj. velikost A_i.
(2) Pro k přirozené a $\{i_1, i_2, \ldots, i_k\} \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ spočtěte $|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}|$.
(3) Určete hodnotu výrazu

$$\binom{n}{0}(n-0)^n - \binom{n}{1}(n-1)^n + \binom{n}{2}(n-2)^n - \cdots + (-1)^n\binom{n}{n}0^n.$$

Část (1) je poměrně snadná. Každý z bruslařů může dostat jednu z $(n-1)$ možných známek (k dispozici jsou všechny známky krom i). Ohodnocujeme n bruslařů. Tudíž podle pravidla součinu počet ohodnocení patřících do množiny A_i je $(n-1)^n$.

Podobně ani v části (2) není potřeba hledat nic složitého. V množině $A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}$ jsou všechna oznámkování bruslařů, při kterých žádný bruslař nedostal známku i_1, i_2, … ani i_k. Pro ohodnocení každého bruslaře nám tedy zbývá $n-k$ známek. Použijeme stejnou úvahu jako v první části a dostáváme $|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}| = (n-k)^n$.

Zajímavější je však část (3). Podobně jako v textu seriálu spočítáme dvěma způsoby $|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n|$. Připomeňme značení ze seriálu:

$$s_k = |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_k| + |A_1 \cap \cdots \cap A_{k-1} \cap A_{k+1}| + \cdots + |A_1 \cap \cdots \cap A_{k-1} \cap A_n| + \\ + |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{k-2} \cap A_k \cap A_{k+1}| + \cdots + |A_{n-(k-1)} \cap A_{n-(k-2)} \cap \cdots \cap A_n|.$$

Množin v takovémto součtu je přesně $\binom{n}{k}$, dostáváme tedy

$$s_k = \binom{n}{k}(n-k)^n.$$

Podle principu inkluze a exkluze tedy dostáváme

$$|A_1 \cup \cdots \cup A_k| = s_1 - s_2 + \cdots + (-1)^{n+1}s_n = \binom{n}{1}(n-1)^n - \binom{n}{2}(n-2)^n + \cdots + (-1)^{n+1}\binom{n}{n}(n-n)^n.$$

Toto číslo však můžeme spočítat i druhým způsobem. Vezmeme si počet všech oznámkování bruslařů, což je n^n. Od něj odečteme počet všech oznámkování, při kterých jsme rozdali všechny známky, což je počet permutací, tedy $n!$. Žádné takové oznámkovaní totiž neleží ani v jedné z množin A_i. Tedy

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k| = n^n - n!.$$

[3]Pokud je Ti to příjemnější, můžeš s množinou A_i pracovat jako s množinou všech funkcí $f\colon \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, i-1, i+1, i+2, \ldots n\}$.

To nám už stačí ke spočítání zadané sumy:

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}(n-k)^n = n^n - |A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k| = n^n - (n^n - n!) = n!.$$

3. seriálová série

Téma: Kombinatorika

Datum odeslání: 12. KVĚTNA 2008

7. ÚLOHA (5 BODŮ)

(1) Určete vytvořující funkci posloupnosti $(5, 6, 7, \dots)$.
(2) Určete posloupnost, která má vytvořující funkci $\frac{1}{(1+x^2)^2}$.

8. ÚLOHA (5 BODŮ)

Jsou dány klasické[4] hrací kostky: desetistěnná kostka D a trojstěnná kostka T. Nalezněte šestistěnnou kostku S a pětistěnnou kostku P (mající na stěnách pouze přirozená čísla; nicméně některá čísla se mohou opakovat) takové, že pro libovolné přirozené n je počet způsobů, jak hodit n pomocí kostek D a T, stejný jako počet způsobů, jak hodit n pomocí kostek S a P. **Nalezněte dvě různá řešení.**

9. ÚLOHA (5 BODŮ)

V závislosti na přirozeném n vyjádřete počet posloupností obsahujících pouze znaky a, b a c délky n takových, že a a b se nevyskytují vedle sebe.

Řešení 3. seriálové série

7. úloha

(1) Určete vytvořující funkci posloupnosti $(5, 6, 7, \dots)$.
(2) Určete posloupnost, která má vytvořující funkci $\frac{1}{(1+x^2)^2}$.

(1) Najjednoduchší spôsob, ako nájsť vytvárajúcu funkciu postupnosti, je získať ju úpravami z postupnosti $(1, 1, 1, 1, \dots)$ a jej vytvárajúcej funkcie $\frac{1}{1-x}$. Najskôr nájdeme pomocou (O7) vytvárajúcu funkciu postupnosti $(1, 2, 3, 4, \dots)$ ako konvolúciu postupnosti $(1, 1, 1, 1, \dots)$ so sebou samou, lebo

$$(1 \cdot 1, 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1, 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1, \dots) = (1, 2, 3, 4, \dots).$$

[4] Pro upřesnění, klasickou k-stěnnou kostkou rozumíme kostku, která má na stěnách čísla 1, 2, … , k.

Jej vytvárajúca funkcia je teda

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)^2 = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

Vynásobením postupnosti $(1, 1, 1, \dots)$ číslom 4 podľa (O1) dostaneme postupnosť $(4, 4, 4, \dots)$ s vytvárajúcou funkciou $\frac{4}{1-x}$. Výsledná postupnosť je súčet týchto dvoch postupností podľa (O2), a teda jej vytvárajúca funkcia je

$$\frac{1}{(1-x)^2} + \frac{4}{1-x} = \frac{5-4x}{(1-x)^2}.$$

(2) Opäť budeme vychádzať z vytvárajúcej funkcie $\frac{1}{1-x}$. Tentokrát použijeme substitúciu $-x$ podľa (O6), čím získame funkciu $\frac{1}{1+x}$ a postupnosť $(1, -1, 1, -1, \dots)$, a následne substitúciu x^2 podľa (O5). Výsledná funkcia teda bude $\frac{1}{1+x^2}$ a postupnosť $(1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, \dots)$. Funkciu zo zadania získame už len umocnením, teda znovu urobíme konvolúciu postupnosti so samou sebou a dostaneme postupnosť

$$\begin{aligned}(1\cdot 1, 1\cdot 0 + 0\cdot 1, 1\cdot(-1) + 0\cdot 0 + (-1)\cdot 1, 1\cdot 0 + 0\cdot(-1) + (-1)\cdot 0 + 0\cdot 1, \dots) &= \\ &= (1, 0, -2, 0, 3, 0, -4, 0, 5, \dots).\end{aligned}$$

(Párne členy sú vždy 0, lebo v každej dvojici činiteľov je 0, nepárne členy sú v absolútnej hodnote $1, 2, 3, \dots$ pričom členy na mieste $4k+1$ sú kladné, lebo vtedy spolu násobíme jednotky rovnakého znamienka a členy na mieste $4k+3$ sú záporné, lebo to je v každej dvojici jednotiek jedna záporná)

8. úloha

Jsou dány klasické[5] hrací kostky: desetistěnná kostka D a trojstěnná kostka T. Nalezněte šestistěnnou kostku S a pětistěnnou kostku P (mající na stěnách pouze přirozená čísla; nicméně některá čísla se mohou opakovat) takové, že pro libovolné přirozené n je počet způsobů, jak hodit n pomocí kostek D a T, stejný jako počet způsobů, jak hodit n pomocí kostek S a P. **Nalezněte dvě různá řešení.**

Označme $T(x) = x + x^2 + x^3$ a $D(x) = x + x^2 + \dots + x^9 + x^{10}$ „vytvořující" polynomy tří- a desetistěnné kostky. Koeficienty jejich součinu $T(x)D(x)$ potom udávají počet způsobů, kterými je možné hodit daný součet hodnot na obou kostkách.

Naším úkolem je najít pěti- a šestistěnnou kostku tak, aby počty způsobů, kterými je možné hodit daný součet na kostkách, byly stejné jako u trojstěnky a desetistěnky. Označíme-li tedy $P(x)$ a $S(x)$ (zatím neznámé) polynomy odpovídající novým kostkám, má platit, že $T(x)D(x) = P(x)S(x)$. Potřebujeme tedy rozdělit polynom $(x + x^2 + x^3)(x + x^2 + \dots + x^9 + x^{10})$ nějakým novým způsobem na součin. Pusťme se tedy do rozkládání: s $T(x)$ toho moc (až na vytknutí x) nenaděláme, zato

$$\begin{aligned}D(x) &= (x + x^2) + (x + x^2)x^2 + (x + x^2)x^4 + (x + x^2)x^6 + (x + x^2)x^8 = \\ &= x(1 + x)(1 + x^2 + x^4 + x^6 + x^8).\end{aligned}$$

[5] Pro upřesnění, klasickou k-stěnnou kostkou rozumíme kostku, která má na stěnách čísla 1, 2, … , k.

Po chvíli hraní si s poslední závorkou můžeme zjistit, že jde ještě rozložit, a to jako

$$1+x^2+x^4+x^6+x^8=(1-x+x^2-x^3+x^4)(1+x+x^2+x^3+x^4).$$

Je tedy

$$T(x)D(x)=x^2(1+x)(1+x+x^2)(1-x+x^2-x^3+x^4)(1+x+x^2+x^3+x^4).$$

Tento polynom potřebujeme vyjádřit dvěma způsoby jako součin polynomů se součtem koeficientů 5 a 6:

(a) $$P(x)=x(1+x+x^2+x^3+x^4)=x+x^2+x^3+x^4+x^5,$$
$$S(x)=x(1+x)(1+x+x^2)(1-x+x^2-x^3+x^4)=x+x^2+x^3+x^6+x^7+x^8,$$

pětistěnná kostka tedy má na stěnách čísla 1, 2, 3, 4, 5 a šestistěnka čísla 1, 2, 3, 6, 7 a 8.

(b) $$P(x)=x(1-x+x^2-x^3+x^4)(1+x+x^2+x^3+x^4)=x+x^3+x^5+x^7+x^9,$$
$$S(x)=x(1+x)(1+x+x^2)=x+2x^2+2x^3+x^4,$$

na stěnách tedy máme čísla 1, 3, 5, 7, 9 a 1, 2, 2, 3, 3, 4.

Můžeš si rozmyslet (ač to nebylo potřeba), že úloha nemá žádné další řešení (mají-li na stěnách být přirozená čísla).

9. úloha

V závislosti na přirozeném n vyjádřete počet posloupností obsahujících pouze znaky a, b a c délky n takových, že a a b se nevyskytují vedle sebe.

Označme A_n počet takových posloupností končících a. Podobně B_n, resp. C_n značí počet takových posloupností končících na b, resp. c. Zřejmě platí $A_1=B_1=C_1=1$. Dále platí rekurentní vztahy (rozmysli si):

$$\begin{aligned}A_{n+1}&=A_n+C_n,\\B_{n+1}&=B_n+C_n,\\C_{n+1}&=A_n+B_n+C_n.\end{aligned}$$

Ze symetrie je zřejmé, že $A_n=B_n$. Třetí vztah tedy můžeme přepsat na

$$C_{n+1}=2A_n+C_n.$$

Nyní budeme postupovat podobně jako u Fibonacciho čísel. Nechť $a(x)$, resp. $c(x)$ je vytvořující funkce odpovídající posloupnosti A_n, resp. C_n. Dostáváme[6]:

$$\begin{aligned}a(x)&=\sum_{n=1}^{\infty}A_nx^n=x+\sum_{n=2}^{\infty}A_nx^n=x+\sum_{n=1}^{\infty}A_{n+1}x^{n+1}=x+x\left(\sum_{n=1}^{\infty}A_{n+1}x^n\right)=\\&=x+x\left(\sum_{n=1}^{\infty}(A_n+C_n)x^n\right)=x+x(a(x)+c(x))=x(1+a(x)+c(x)).\end{aligned}$$

[6] V tomto řešení se bohužel nevyhneme zápisu pomocí sum, jiný zápis by byl příliš nepřehledný.

Zcela analogickým způsobem dostaneme

$$c(x) = x(1 + 2a(x) + c(x)).$$

Po odečtení dvou rovností výše máme

$$c(x) - a(x) = xa(x),$$

tedy $c(x) = (1 + x)a(x)$. Dosazením do první rovnosti dostaneme

$$a(x) = x(1 + a(x) + c(x)) = x(1 + 2a(x) + xa(x)).$$

Odtud lze $a(x)$ vyjádřit jako

$$a(x) = \frac{x}{1 - 2x - x^2}.$$

Máme vyjádření i pro $c(x)$:

$$c(x) = (1 + x)a(x) = \frac{x(1 + x)}{1 - 2x - x^2}.$$

Nyní bychom zcela anologickým způsobem jako u Fibonnacciho čísel mohli spočítat A_n a C_n a následně určit požadovaný počet posloupností jako $A_n + B_n + C_n = 2A_n + C_n$. Počítání si o malý kousek zjednodušíme, pokud si uvědomíme, že $C_{n+1} = A_n + B_n + C_n$, tudíž nám stačí určit koeficienty C_n.

Nejdřív $c(x)$ upravíme následujícím způsobem:

$$c(x) = \frac{x(1 + x)}{1 - 2x - x^2} = \frac{(x^2 + 2x - 1) - x + 1}{1 - 2x - x^2} = -1 + \frac{1 - x}{1 - 2x - x^2}.$$

Kvadratická rovnice $x^2 + 2x - 1 = 0$ má dva kořeny

$$x_1 = -1 + \sqrt{2}, \qquad x_2 = -1 - \sqrt{2}.$$

Analogickým postupem jako v textu o Fibonacciho číslech lze najít rozklad

$$\frac{1 - x}{1 - 2x - x^2} = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{x_1}x} + \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{x_2}x}.$$

Použitím operací (O1), (O2) a (O6) tedy dostáváme, že $c(x)+1$ je vytvořující funkcí posloupnosti $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x_1}\right)^n + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x_2}\right)^n$.

Jelikož se vytvořující funkce posloupností $c(x)+1$ a $c(x)$ liší pouze v nultém členu, dostávame pro $n \geq 1$:

$$C_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x_1}\right)^n + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x_2}\right)^n = \frac{1}{2}((1 + \sqrt{2})^n + (1 - \sqrt{2})^n).$$

Řešením úlohy je tedy C_{n+1} vyjádřené výše.