Povídání ke třetí sérii

Na tomto místě uvedeme hrstku vět, které by se Ti mohly hodit, až se budeš potýkat s příklady o trojúhelnících. Označme A, B, C vrcholy trojúhelníka, a, b, c délky protilehlých stran, α, β, γ velikosti vnitřních úhlů při vrcholech A, B, C, v_a, v_b, v_c příslušné výšky, r poloměr vepsané kružnice a R poloměr opsané.

Obsah trojúhelníku můžeme vypočítat jako $S = \frac{1}{2}av_a = \frac{1}{2}bv_b = \frac{1}{2}cv_c = \frac{1}{2}ab \cdot \sin\gamma = \frac{1}{2}bc \cdot \sin\alpha = \frac{1}{2}ac \cdot \sin\beta = \frac{abc}{4R} = \frac{a+b+c}{2} \cdot r$.

Věta. *Dva trojúhelníky jsou podobné, pokud*

(a) mají shodné dva vnitřní úhly

(b) mají stejné poměry odpovídajících stran

(c) mají stejný jeden úhel a stejný poměr stran, které tento úhel svírají.

Věta. (Sinová) $\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)} = 2r$.

Věta. (Kosinová) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha)$.

Věta. (Cévova) *Příčky AX, BY, CZ trojúhelníka procházejí jedním bodem, právě když platí, že*

$$\frac{|AZ|}{|BZ|} \cdot \frac{|BX|}{|CX|} \cdot \frac{|CY|}{|AY|} = 1.$$

3. série

Téma: Trojúhelníky

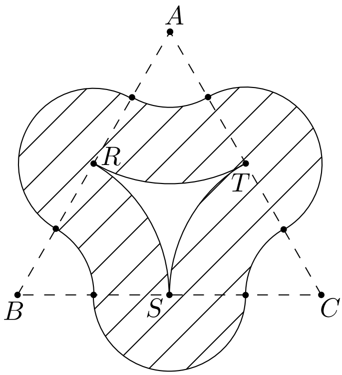
Datum odeslání: 10. prosince 2007

0. úloha (1 bod)

Nakreslete co nejkrásnější trojúhelník. Váže se k jeho vzniku nějaká legenda?

1. úloha (3 body)

Trojúhelník ABC má stranu délky 1. Body znázorněné na obrázku dělí strany na čtyři stejně dlouhé úsečky, R, S a T jsou středy stran. Všechny oblouky (části kružnic) mají své středy v jednom z bodů A, B, C, R, S nebo T. Spočítejte obsah vyšrafované plochy.



2. ÚLOHA (3 BODY)

M je bod v rovině trojúhelníku PQR. Dokažte, že součet délek $|PM| + |QM| + |RM|$ je aspoň tak velký jako polovina obvodu trojúhelníka.

3. ÚLOHA (3 BODY)

Je dán rovnoramenný trojúhelník DEF se základnou EF, $|EF| < |DE|$. Na polopřímce FE leží bod K, pro který $|DF| = |FK|$, podobně na polopřímce EF leží bod L a platí $|DE| = |EL|$. Ukažte, že platí $|KD|^2 = |DF| \cdot |KL|$.

4. ÚLOHA (5 BODŮ)

V trojúhelníku XYZ leží body P, Q po řadě na stranách YZ a XZ. Dále platí nerovnosti $|XP| \geq |YZ|$ a $|YQ| \geq |XZ|$. Jaké vnitřní úhly má zadaný trojúhelník?

5. ÚLOHA (5 BODŮ)

Najděte trojúhelník, který jde rozřezat na

(a) čtyři shodné trojúhelníky podobné hledanému trojúhelníku.

(b) tři shodné trojúhelníky podobné hledanému trojúhelníku.

6. ÚLOHA (5 BODŮ)

V trojúhelníku ABC je D středem strany AB a bod E leží na straně BC tak, že $|BE| : |EC| = 2 : 1$. Navíc platí $|\sphericalangle ADC| = |\sphericalangle DAE|$. Jaká je velikost úhlu CAB?

7. ÚLOHA (5 BODŮ)

H je vnitřní bod trojúhelníku KLM. Dokažte, že platí

$$4S \leq |KH| \cdot |LM| + |LH| \cdot |KM| + |MH| \cdot |KL|,$$

kde S je obsah trojúhelníku.

8. ÚLOHA (5 BODŮ)

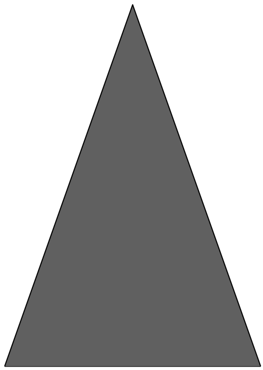
ABC je ostroúhlý trojúhelník s výškou AD. Body X a Y leží po řadě na kružnicích opsaných trojúhelníkům ABD a ACD tak, že X, D, Y leží na jedné přímce. Označme dále M střed strany BC a M' střed úsečky XY. Dokažte, že přímky MM' a AM' jsou kolmé.

Řešení 3. série

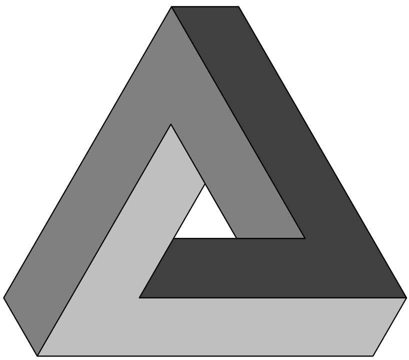
0. úloha
Nakreslete co nejkrásnější trojúhelník. Váže se k jeho vzniku nějaká legenda?

Místo vzorového řešení zveřejňujeme nejzajímavější výplody, jejichž tvůrci budou odměněni čokoládou. Vystavené obrázky však nikdy autenticky nevystihnou kompozice na papíře, kterých jsme byli svědky ...

Josef Ondřej
Jestli se k tomuto trojúhelníku váže nějaká legenda vskutku nevím, ale vím, že má strany v poměru, který snad nepotřebuje další komentáře, *90-60-90*!



Karolína Rezková
Tento útvar se jmenuje *Petroseův trojúhelník*, neboli *trigon*. Je jedním z útvarů, který porušuje pravidla euklidovské geometrie. Zkuste si útvar představit prostorově ... moc to asi nepůjde :). Obrazec je totiž tvořen třemi trámy, které jsou navzájem propojeny do pravého úhlu. Přesto tvoří trojúhelník. Matematik Penrose, který ho zkoumal, jej objevil na výstavě grafika Eschera.



Hana Šustková

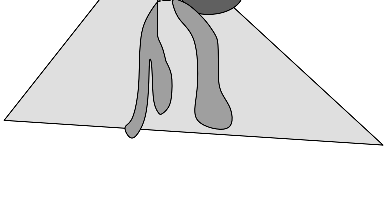
Jedna malá holčička se vždycky ráda dívala do zrcadla. Měla tam kamarádku Bětku, jak ji pojmenovala, a s ní se nejen při česání vlasů, čištění zubů nebo hraní si s panenkou radila o všech důležitých věcech. Jednoho večera, byla druhá adventní neděle a holčička psala krasopisně na vlastnoruční papír zprávu pro Ježíška, se Bětka zase objevila v zrcadle a jako holčička také psala dopis do nebe. „Taky se tak těšíš na Vánoce?“ Ptala se holčička nedočkavě, skoro okusujíc tužku. Bětka se usmála. „Ale nevím, Bětko,“ pohasl holčičin úsměv záhy, „co si od Ježíška přát. On má na starosti určitě spoustu dětí a já bych nerada, aby se na některé nedostalo. Třeba na ty z dětského domova ve městě . . . “

Vyskočila od psacího stolu a rázovala si to po pokoji. „Víťa mi vždycky říkal, že na ně Ježíšek trochu zapomíná“, očkem mrkla na Bětku a ta mrkla na holčičku. „Víťa a spousta jeho kamarádů v domově.“ Zastavila se u okna a sledovala snášející se vločky, které se tetelily jedna k druhé a sedaly si na větve nejbližšího smrčku. Kos zatím spokojeně zobal jablíčko, jež mu hodní lidé připravili, a mrk co mrk na holčičku za oknem. Chvíli ho bezděky pozorovala, než se plácla do čela: „Bětko! Už to mám! Už vím, co by mi mohl Ježíšek přinést!“

Rozbalovala jediný dárek pod stromečkem, na nejž Ježíšek připsal maminčiným písmem její jméno. Celá se chvěla. V hlavě jí zněla slova, která napsala, než šla spát, tu zasněženou neděli, když pokládala papír v obálce za okno a bála se, aby příliš nezasněžil. „Aby ho Ježíšek našel,“ znělo jí v hlavě.

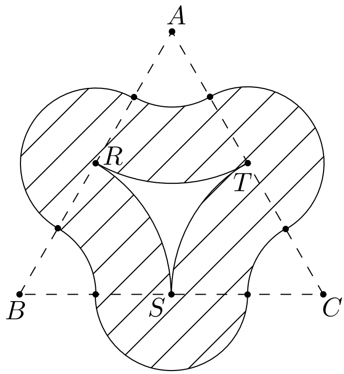
Milý Ježíšku, opatrně sundává stuhy z vánočního papíru, *letos jsem zase trochu zlobila maminku a tatínka a ještě k tomu jsem zapomněla dnes ráno dát slunečnici ptáčkům*, prsty se jí chvějí, jak se dotýká sněhuláků veselících se na lesklém papíře, a stuha jí prokluzuje až na zem, *ale měla bych na tebe jedno velké přání, víš, Ježíšku, mluvila jsem s Víťou, toho přece znáš, a přála bych si, abys mu nadělil velké sáňky vzadu s ohrádkou, aby na nich mohl vozit sněhové koule po zahradě - stavějí si iglů a bez sáněk to dá příliš práce . . .* Ježíšek se asi snažil, protože dárek je zajištěn ještě izolepou. *Ale abys nebyl smutný, že ses nepodíval k nám do obýváku (mamka zase od tebe dostane hrnce a šampon, tatínek ponožky nebo svetr s jelenem, takže i tak bys asi přišel), přines mi prosím pěkný trojúhelník, protože to je to jediné, čím bych mohla udělat radost Bětce.* Papír přeci jen povolil a holčička už se dotýká krabičky od bonboniéry. Pomalu odklápí víko . . . *Ona Bětka neumí nakreslit po mě nic jiného než trojúhelník. Ani čtverec nevypadá jako čtverec, chudák. Ale když jí ukážu trojúhelník, i ona ho bude mít. Mockrát ti děkuju, Ježíšku, seš moc milej a zase zacinkej a nezapomeň na ty sáňky.*

Holčička zavřela oči a sáhla do krabičky.
Byly tam vzpomínky s malou mašlí,
koníček s uchem na niti
a korále! Ty kde se našly?
Úplně na dně pak:
„Trojúhelník - *od Víti.*“

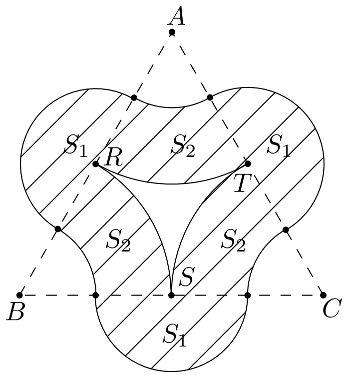


1. úloha

Trojúhelník ABC má stranu délky 1. Body znázorněné na obrázku dělí strany na čtyři stejně dlouhé úsečky, R, S a T jsou středy stran. Všechny oblouky (části kružnic) mají své středy v jednom z bodů A, B, C, R, S nebo T. Spočítejte obsah vyšrafované plochy.



Označme S_1 obsahy vně trojúhelníku a S_2 obsahy uvnitř trojúhelníku. Výraz $3S_1 + 3S_2$ dá požadovaný výsledek.



S_1 je obsah půlkruhu, jehož poloměr, jak je patrné z obrázku, je $\frac{1}{4}$. Je tedy

$$S_1 = \frac{\pi r^2}{2} = \frac{\pi}{32}.$$

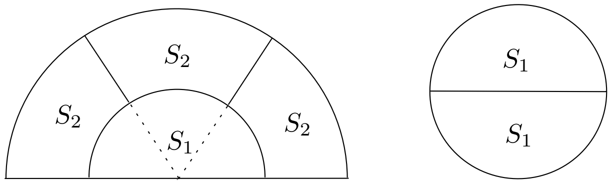
Obsah S_2 je částí mezikruží[1]. Úhel u vrcholu je v rovnostranném trojúhelníku 60°, což je šestina z 360°. S_2 se tedy spočítá jako jedna šestina rozdílu obsahů kruhů s poloměry $r_1 = \frac{1}{2}$ a $r_2 = \frac{1}{4}$:

$$S_2 = \frac{1}{6}(\pi r_1^2 - \pi r_2^2) = \frac{1}{6}\left[\pi\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \pi\left(\frac{1}{4}\right)^2\right] = \frac{\pi}{32}.$$

[1] mezirkuží je plocha mezi dvěma kružnicemi se stejným středem

Celkový obsah je tedy $3S_1 + 3S_2 = \frac{6\pi}{32} = \frac{3\pi}{16}$.

Úlohu bylo také možné řešit přeskládáním částí daného obrazce, jak ukazuje následující obrázek.



2. úloha

M je bod v rovině trojúhelníku PQR. Dokažte, že součet délek $|PM| + |QM| + |RM|$ je aspoň tak velký jako polovina obvodu trojúhelníka.

Pro body A, B, C v jedné rovině obecně platí trojúhelníková nerovnost:

$$|AC| + |BC| \geq |AB|$$

Rovnost nastává jedině tehdy, když bod C leží na úsečce AB. Pokud do této nerovnice dosadíme vždy dva vrcholy trojúhelníku a bod M a tyto tři nerovnice sečteme, dostaneme vztah:

$$2|PM| + 2|QM| + 2|RM| \geq |PQ| + |QR| + |QP| = o_{\Delta PQR}$$

Nyní stačí vydělit obě strany dvěma a úloha je dokázána.

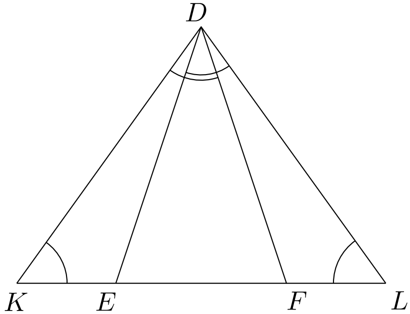
3. úloha

Je dán rovnoramenný trojúhelník DEF se základnou EF, $|EF| < |DE|$. Na polopřímce FE leží bod K, pro který $|DF| = |FK|$, podobně na polopřímce EF leží bod L a platí $|DE| = |EL|$. Ukažte, že platí $|KD|^2 = |DF| \cdot |KL|$.

Úloha sa dala riešiť mnohými spôsobmi, uvediem len dva najjednoduchšie z nich.

Prvé riešenie s využitím podobnosti trojuholníkov:

Zo zadania vieme, že $|ED| = |FD| = |FK| = |LE|$. $|KF| = |FD|$, teda ΔKFD je rovnoramenný a $|\triangleleft FKD| = |\triangleleft FDK|$. $|LE| = |ED|$, teda ΔLED je rovnoramený a $|\triangleleft ELD| = |\triangleleft EDL|$. Keďže ΔEFD je podľa zadania rovnoramenný a $|FK| = |EL|$, je aj ΔKLD rovnoramenný, teda $|\triangleleft LKD| = |\triangleleft KLD|$.



To znamená, že všetky uhly vyznačené na obrázku sú zhodné, preto môžeme povedať, že

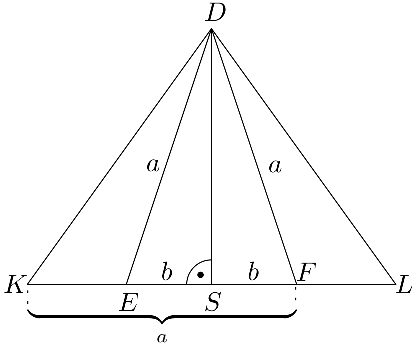
$$\Delta KFD \sim \Delta KLD$$

podľa vety *uu*. Z pomerov strán v týchto trojuholníkoch dostaneme

$$\frac{|KD|}{|KL|} = \frac{|DF|}{|KD|}$$

po úprave $|KD|^2 = |DF||KL|$, čo sme chceli dokázať.

Druhé riešenie s využitím Pytagorovej vety:
Do obrázku doplníme stred strany EF a označíme ho S. Keďže je ΔEFD rovnoramenný, je uhol KSD pravý. Označme $|ES| = |FS| = b$ a $|ED| = |FD| = |FK| = |LE| = a$.



Podľa Pytagorovej vety platí

$$|KD|^2 = |KS|^2 + |DS|^2$$

$$|DS|^2 = |ED|^2 - |ES|^2 = a^2 - b^2.$$

Podľa obrázku platí $|KS| = a - b$ a $|KL| = 2a - 2b$. Dosadíme do ľavej a pravej strany rovnosti zo zadania:

$$L = |KD|^2 = a^2 - 2ab + b^2 + a^2 - b^2 = 2a^2 - 2ab$$

$$P = |KL||FD| = (2a - 2b)a = 2a^2 - 2ab$$

$$L = P$$

Rovnosť zo zadania teda zjavne platí. Iné riešenia využívali sínusovú a kosínusovú vetu, či dokonca mocnosť bodu ku kružnici a počítanie obsahov.

4. úloha
V trojúhelníku XYZ leží body P, Q po řadě na stranách YZ a XZ. Dále platí nerovnosti $|XP| \geq |YZ|$ a $|YQ| \geq |XZ|$. Jaké vnitřní úhly má zadaný trojúhelník?

Ze všeho nejdřív bychom se vám měli omluvit za nepovedené zadání této úlohy. Vypadla nám z něj jedna drobnůstka (:, a sice že body P, Q měly být patami výšek na příslušné strany. Tím se samozřejmě značně změnilo řešení úlohy, ale taky srozumitelnost jejího zadání, které se dalo pochopit dvěma různými způsoby (striktně vzato, myslím, že znění zadání odpovídá jen ten první, ale nakonec jsem jako správné řešení uznával řešení kteréhokoli z nich). Obě možné úlohy vyřešíme. Pro zjednodušení vyjadřování si ale napřed označme $|XY| = z, |YZ| = x, |XZ| = y, |\sphericalangle YXZ| = \alpha, |\sphericalangle XYZ| = \beta, |\sphericalangle XZY| = \gamma$.

První způsob pochopení zadání:

Zadané nerovnosti platí pro nějakou dvojici bodů P, Q.

Nejprve si uvědomme, že úsečka XK, kde K je nějaký bod protější strany, bude nejdelší, pokud bude K jedním z vrcholů. Jinak se to dá vyjádřit taky tak, že pro každé K platí $\max(y, z) \geq |XK|$. Víme, že pro nějaké P platí $x \leq |XP|$, a tedy $x \leq |XP| \leq \max(y, z)$. Obdobně můžeme zjistit, že $y \leq \max(x, z)$. Teď je asi nejjednodušší rozlišit 4 případy podle velikostí stran trojúhelníka (případy rozdělujeme podle toho, jakou hodnotu nabývají obě maxima):

a) $z \geq y$, $z \geq x$. Pak je $\max(y, z) = z$, $\max(x, z) = z$, a proto musí platit $x \leq z, y \leq z$. V tomto případě se tedy ze zjištěných nerovností nic nového nedozvíme.

b) $z < y$, $z \geq x$. Pak je $\max(y, z) = y$, $\max(x, z) = z$, a proto musí platit $x \leq y, z \leq x$. Je tedy $z < y \leq x \leq z$, což není možné.

c) $z \geq y$, $z < x$. Stejně jako v předchozím případě dostaneme spor.

a) $z < y$, $z < x$. Pak je $\max(y, z) = y$, $\max(x, z) = x$ a musí platit $x \leq y, y \leq x$. To znamená, že $z < x = y$.

Zatím jsme tedy zjistili, že pokud nerovnosti platí, musí buďto být $z \geq y$, $z \geq x$, nebo $z < x = y$. Máme-li ale popsat všechny trojúhelníky, v kterých může nastat situace podle zadání (a to musíme, protože jinak bychom nemohli nic s určitostí říct o jejich úhlech), musíme zjistit, jestli popsané typy trojúhelníků skutečně mohou vyhovat zadání.

To ale mohou – v prvním případě je vše splněno, je-li $P = Y, Q = X$, v druhém případě stačí zvolit $P = Q = Z$.

Ještě zbývá zjištěná fakta o délkách stran přeložit do řeči úhlů. Protože ale víme, že velikosti úhlů a délky jim protilehlých stran jsou stejně uspořádané (tedy že například $x > z > y$, právě když $\alpha > \gamma > \beta$), je to už jednoduché. V prvním případě je γ (neostře) největší vnitřní úhel, v druhém případě je $\gamma < \alpha = \beta$.

Druhý způsob pochopení zadání:

Zadané nerovnosti platí pro všechny dvojice bodů P, Q.

Zvolíme-li $P = Q = Z$, zjistíme, že musí platit $x \geq y$ a $y \geq x$, tedy $x = y$. Každá z nerovností nám toho řekne nejvíc, pokud bude délka (například) XP co nejkratší. Snadno si můžeš rozmyslet, že to nastane, bude-li bod P co nejblíže patě příslušné výšky. Ihned se nám otevírají dvě možnosti:

a) $\gamma \leq 90°$. V tomto případě pata výšky z vrcholu X na stranu YZ i pata výšky z Y na XZ leží na příslušné straně. Zvolíme-li P coby tuto patu, platí $|XP| \geq x = |YZ| = |XZ|$. P je ale pata výšky, a tedy XP je nejkratší ze všech spojnic vrcholu X s nějakým bodem protější strany. Jedním takovým bodem je i bod Z, takže musí platit $|XP| \leq x = |XZ|$. Dáme-li tento vztah dohromady s předchozí nerovností, snadno zjistíme, že musí být $P = Z$. To ale neříká nic jiného, než že XZ je kolmá na YZ a tedy $\gamma = 90°$.

b) $\gamma > 90°$. Bod, který je nejblíž patě výšky z X na YZ (která leží někde za vrcholem Z), je v tomto případě bod Z. Je tedy $|XP| \geq |XZ|$ pro každé P na straně YZ; protože $x = y$, nerovnost ze zadání platí. Žádné další omezení tedy v tomto případě nedostaneme.

Zjistili jsme, že musí platit $\alpha = \beta$ a $\gamma \geq 90°$. Důkaz, proč všechny takovéto trojúhelníky vyhovují zadání, jsme už v podstatě také uvedli - zkus se ale ujistit o tom, že ti to je jasné! A to je vše (:

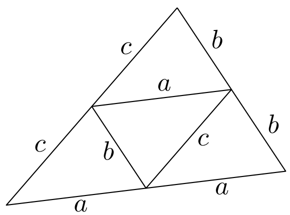
5. úloha

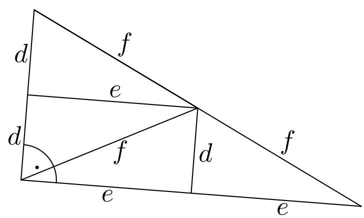
Najděte trojúhelník, který jde rozřezat na

(a) čtyři shodné trojúhelníky podobné hledanému trojúhelníku.

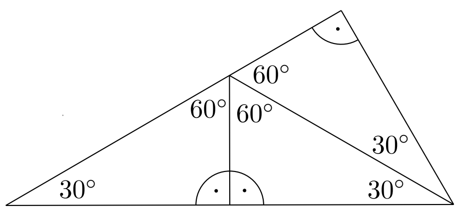
(b) tři shodné trojúhelníky podobné hledanému trojúhelníku.

Část (a) splňuje libovolný trojúhelník rozřezaný středními příčkami[2]. Střední příčky mají poloviční délku strany, se kterou jsou rovnoběžné, a na obrázku je pěkně vidět, že vzniklé trojúhelníky jsou podobné velkému (s koeficentem $\frac{1}{2}$), tedy navzájem shodné. Existuje ještě jedno řešení pro pravoúhlý trojúhelník, viz další obrázek.





Řešením (b) je libovolný pravoúhlý trojúhelník s úhly 30° a 60°, rozřežeme ho jako na obrázku. Podonost malých trojúhelníků dostaneme podle věty *uu* a shodnost tím, že první a druhý malý trojúhelník a druhý a třetí malý trojúhelník mají jednu stranu společnou a tedy stejně dlouhou.



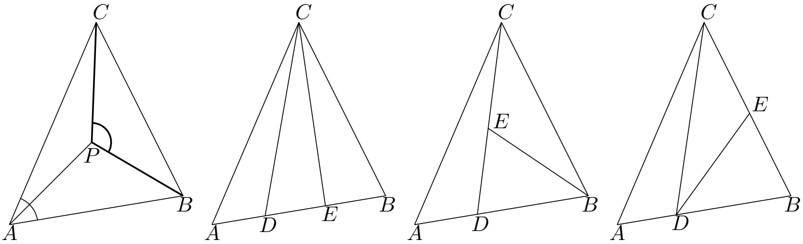
Tím je úloha ze zadání vyřešena.

Poučné je položit si otázku, jestli existují další řešení úlohy - odpověď zní, že ne, a my si ji mimo hru dokážeme hned dvěma způsoby. Důkazy neexistence dávají i náhled, jak rozebíráním možností najít všechna řešení. Prvnímu důkazu se někdy říká shora, v našem případě začneme s trojúhelníkem a budeme ho rozřezávat. Druhý je zdola, to znamená, že vezmeme tři malé shodné trojúhelníky a budeme z nich lepit velký jim podobný.

Důkaz shora rozborem možných řezů:

Pokusme se nalézt všechna korektní rozřezání trojúhelníku. Musíme udělat dva nebo tři řezy, zkuste si rozmyslet, proč tomu tak je. Trojúhelník lze rozřezat čtyřmi způsoby jako na obrázku níže.

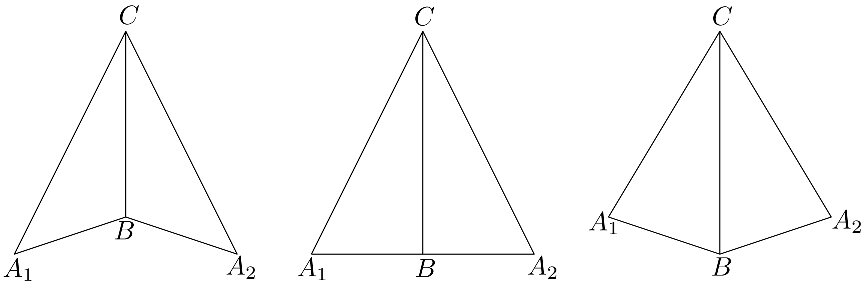
[2] úsečka spojující středy dvou stran



Nyní je potřeba tyto situace prodiskutovat, není to však ani zajímavé, ani obtížné. Může se nám hodit, že všechny malé trojúhelníky mají stejné úhly, délky stran i obsah, který je roven $\frac{1}{3}$ obsahu velkého trojúhelníka. První situace je jednoduchá, ve druhé a třetí dostáváme spor, že by jeden z trojúhelníků měl dva pravé úhly. Poslední nám odhalí hledaný trojúhelník, dá trochu práce dopočítat úhly. Tímto postupem jsme také našli všechny trojúhelníky vyhovující (b).

Důkaz zdola lepením trojúhelníků:

Máme na začátku tři malé shodné trojúhelníky a budeme je lepit stranami k sobě. Nejprve slepíme dva. Musíme je ale lepit k sobě stejnou stranou, protože jinak by výsledný n-úhelník nešlo doplnit na trojúhelník. Pokud lepíme dva trojúhelníky stejnou stranou k sobě, dostaneme buď rovnoběžník, nebo deltoid. Ale když k rovnoběžníku nalepíme další trojúhelník, tak bude mít stále dvě strany rovnoběžné a nemůže to tedy být trojúhelník. Pro deltoid máme tři možnosti, jak může vypadat[3].



Ke každému obrazci musíme dolepit ještě jeden trojúhelník. To zase vede na nezajímavé rozebírání situací, přesto neuškodí si ho promyslet. Druhá a třetí možnost vede na správné řešení.

6. úloha

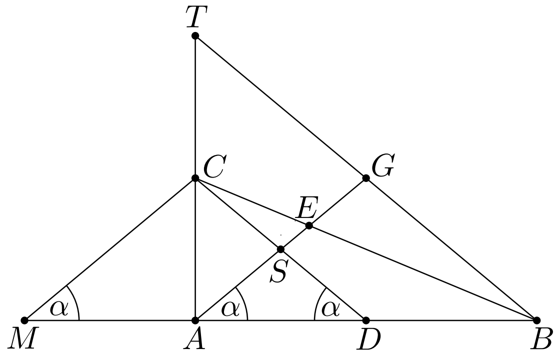
V trojúhelníku ABC je D středem strany AB a bod E leží na straně BC tak, že $|BE| : |EC| = 2 : 1$. Navíc platí $|\sphericalangle ADC| = |\sphericalangle DAE|$. Jaká je velikost úhlu CAB?

První řešení:

Nejprve podle obrázku označíme T bod na přímce AC takový, že C je střed TA, dále G je střed úsečky TB a nakonec S je bod na průniku EA a CD. Nyní se budeme snažit dokázat, že bod E je těžiště trojúhelníka ABT. Jelikož je C střed TA, je BC těžnice trojúhelníka ABT. Navíc

[3] pro puntíčkáře: prostřední je ve skutečnosti rovnoramenný trojúhelník

však ze zadání platí, že $\frac{|BE|}{|EC|} = 2$, bod E dělí tedy těžnici v poměru $1 : 2$ a je tedy těžištěm trojúhelníka ABT. Proto je přímka AE také těžnicí a protíná TB v jejím středu G. Jelikož DC je střední příčkou ABT, jest $|SC| = \frac{|TG|}{2} = \frac{|GB|}{2} = |SD|$. Ze zadání z $|\sphericalangle EAD| = |\sphericalangle CDA|$ plyne $|AS| = |DS|$. Tedy celkově $|CS| = |AS| = |DS|$, což znamená, že body A, D a C leží na kružnici se středem S. Navíc $|\sphericalangle DSC| = 180°$ a tedy $|\sphericalangle CAD| = 90°$.



Druhé řešení:

Nejprve vedeme bodem C rovnoběžku s AE a její průnik s přímkou AB označíme M. Ze zadání je $|\sphericalangle EAD| = |\sphericalangle CDA|$, což implikuje $|\sphericalangle CMD| = |\sphericalangle EAD| = |\sphericalangle CDA| = |\sphericalangle CDA|$. Trojúhelník MCD je tedy rovnoramenný. Dále však platí, že trojúhelníky AEB a MCB jsou podobné (dle definice bodu M), a jelikož máme ze zadání $\frac{|BE|}{|EC|} = 2$, je koeficient podobnosti $\frac{2}{3}$. Platí tedy $\frac{|AB|}{|MB|} = \frac{2}{3}$ a $|MA| = |MB| - |AB| = \frac{3}{2}|AB| - |AB| = \frac{1}{2}|AB| = |AD|$. V rovnoramenném trojúhelníku MCD tímto dostáváme $|MA| = |AD|$ a AC je výška, tedy $|\sphericalangle CAB| = 90°$.

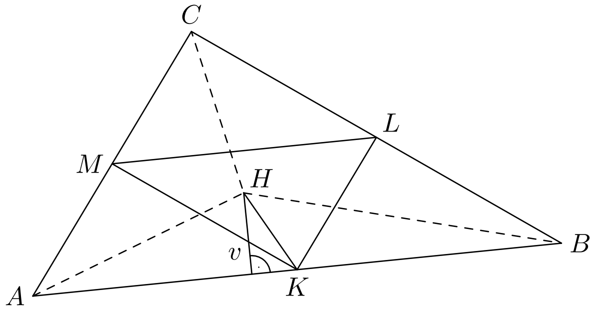
7. úloha

H je vnitřní bod trojúhelníku KLM. Dokažte, že platí

$$4S \leq |KH| \cdot |LM| + |LH| \cdot |KM| + |MH| \cdot |KL|,$$

kde S je obsah trojúhelníku.

Veďme každým vrcholem trojúhelníku KLM rovnoběžku s protější stranou a vzniklý trojúhelník označme ABC. Úsečky KL, ML a MK jsou střední příčky trojúhelníku ABC (a tedy $|AB| = 2|ML|$, $|BC| = 2|KM|$, $|AC| = 2|KL|$), navíc trojúhelníky AKM, BKL, MLC a KML jsou shodné, tudíž obsah trojúhelníku ABC je $4S$.



Na druhou stranu můžeme obsah trojúhelníku ABC vyjádřit jako součet obsahů trojúhelníků AHB, AHC a BHC. Ovšem

$$S_{AHB} = \frac{|AB|v}{2} = |ML|v \leq |ML||KH|, \tag{1}$$

kde v je výška z bodu H na stranu AB, navíc $v \leq |KH|$, neboť výška je nejkratší možná vzdálenost vrcholu od protější strany.

Analogicky:

$$S_{AHC} \leq |LK||MH| \tag{2}$$
$$S_{BHC} \leq |KM||LH| \tag{3}$$

Sečtením vztahů dostáváme:

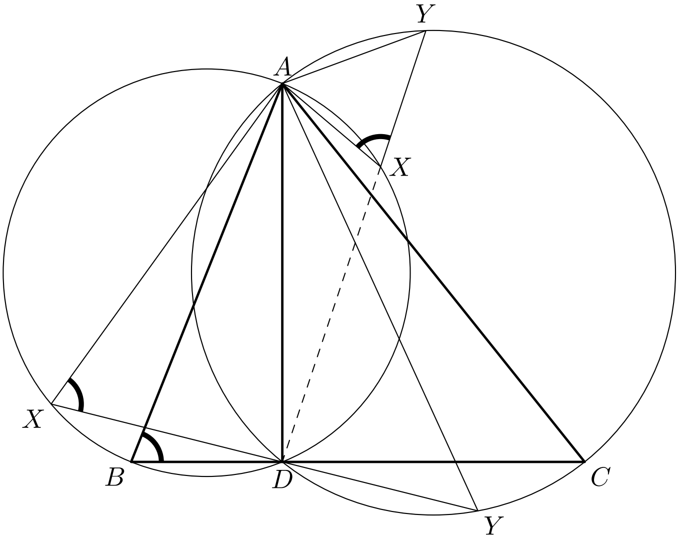
$$4S = S_{ABC} \leq |ML||KH| + |LK||MH| + |KM||LH|,$$

což jsme chtěli dokázat. Podotkněme ještě, že rovnost nastane, jsou-li KH, LH, MH příslušné výšky, tedy pokud je bod H ortocentrem trojúhelníku KLM.

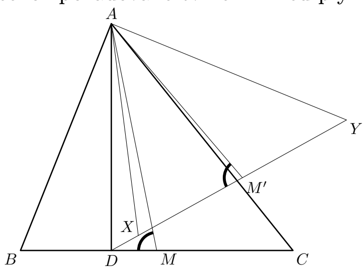
8. úloha
ABC je ostroúhlý trojúhelník s výškou AD. Body X a Y leží po řadě na kružnicích opsaných trojúhelníkům ABD a ACD tak, že X, D, Y leží na jedné přímce. Označme dále M střed strany BC a M' střed úsečky XY. Dokažte, že přímky MM' a AM' jsou kolmé.

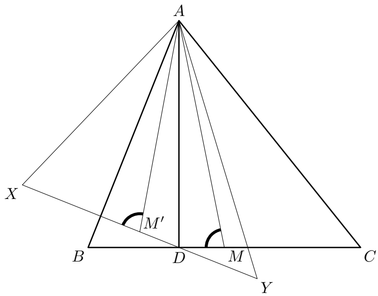
Poznámka: Ze zadání vypadlo vyloučení několika patologických případu, ve skutečnosti tam mělo být ještě dodáno, že body X a Y neleží na přímce BC (speciálně jsou různé od bodu D). Rozmysli si, že v některých z těchto případů dokonce tvrzení neplatí a že v jiných nemá smysl, protože $M = M'$, tedy nedefinují přímku MM'. Za tuto chybu v zadání se omlouváme.

První řešení (přímočaré)
Nejdříve dokážeme, že trojúhelníky ABC a AXY jsou si podobné. Rozlišme dva případy polohy bodu X: buď X leží na delším oblouku AD kružnice opsané ADB, nebo na kratším. V prvním případě platí $|\sphericalangle ABD| = |\sphericalangle AXD| = |\sphericalangle AXY|$, v druhém $|\sphericalangle ABD| = 180^\circ - |\sphericalangle AXD| = |\sphericalangle AXY|$, podle vět o obvodových úhlech. Obdobně $|\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle AYX|$. Tedy opravdu $ABC \sim AXY$, neboť mají stejné vnitřní úhly.



Z podobnosti ABC a AXY ihned dostáváme podobnost trojúhelníků AMB a $AM'X$, neboť M resp. M' jsou středy stran BC resp. XY těchto trojúhelníků. Tedy speciálně $|\sphericalangle AM'X| = |\sphericalangle AMB|$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $|BD| \leq |DC|$ (pokud by náhodou bylo $|BD| = |DC|$, pak $D = M$ je patou výšky v ABC, a tedy i M' je patou výšky v trojúhelníku AXY, z čehož požadované tvrzení ihned plyne).





Rozlišme opět dva případy polohy bodu M'. Buď M' leží v polorovině ADM, pak ale $|\sphericalangle AM'D| = |\sphericalangle AM'X| = |\sphericalangle AMD|$ a body A,D,M a M' leží na jedné kružnici z věty o obvodových úhlech, nebo M' leží v polorovině opačné k ADM, pak $|\sphericalangle AM'D| = 180° - |\sphericalangle AM'X| = 180° - |\sphericalangle AMD|$ a opět body A,D,M a M' leží na kružnici, neboť M a M' leží v opačných polorovinách s hraniční přímkou AD.

Zbývá si uvědomit, že zmíněná kružnice je Thaletovou nad průměrem AM, neboť úhel ADM je pravý (D je pata výšky). Z toho dostáváme, že úhel $AM'M$ je pravý.

Druhé řešení (spirální podobnost)

Stejně jako v předchozím řešení dojdeme k tomu, že trojúhelníky ABC a AXY jsou podobné. Navíc si ale uvědomíme, že je na sebe zobrazuje tzv. spirální podobnost se středem v A (je to složení otočení a stejnolehlosti, obojí se středem v A). Tato podobnost také zobrazuje bod M na M'.

Řekněme, že naše spirální podobnost má koeficient k (to je koeficient stejnolehlosti) a otáčí o úhel α. Snadno přijdeme na to, že pokud zobrazuje nějaký bod K na K' a L na L' tak trojúhelníky AKK' a ALL' jsou podobné podle věty *sus* (mají stejný úhel při vrcholu A, totiž α, a stejný poměr stran přiléhajících k tomuto úhlu, totiž k).

Zbývá nám uvědomit si, že trojúhelník AXB je pravoúhlý s pravým úhlem při vrcholu X, neboť AB je průměr kružnice opsané pravoúhlému trojúhelníku ADB a X na ní leží ze zadání. Dále $AXB \sim AM'M$, tedy AM' je kolmé na MM'.