Povídání k šesté sérii

Milý řešiteli, možná už sis zvykl, že pro tebe k některým sériím připravíme úvodní text. Nejinak je tomu i tentokrát, takže nemáš-li v používání zobrazení bohaté zkušenosti, můžeš se nyní něco přiučit.

Co vlastně takové zobrazení je, to asi každý tak nějak chápe, ale určitě nebude na škodu to zopakovat. No, zkrátka jde o to, že se každému bodu X roviny (mohou to být i body prostoru, ale rovina nám bude stačit) podle nějakého předem daného pravidla přiřadí jiný bod X' a řekne se, že X' je obrazem bodu X v tom onom zobrazení.

Základní zobrazení, která rozeznáváme jsou tyto:

(i) Osová souměrnost
(ii) Středová souměrnost
(iii) Otočení
(iv) Posunutí
(v) Stejnolehlost

K prvním dvěma snad není třeba nic dodávat a ani otočení či posunutí nejsou nijak nepochopitelná zobrazení, ale pro jistotu je ještě trochu upřesníme. Otočení vypadá tak, že si vybereme v rovině nějaký bod S, tomu budeme říkat střed otočení, a vymyslíme si úhel α. Pak každý bod roviny otočíme bodu S po směru hodinových ručiček o úhel α a tím získáme jeho obraz. U posunutí si zase zvolíme nějakou vzdálenost a směr a každý bod v tomto směru posuneme o onu vzdálenost. K prvním čtyřem zobrazením se hodí dodat, že se jedná o shodná zobrazení, což znamená, že pokud v nich zobrazíme krajní body nějaké úsečky, pak úsečka spojující jejich obrazy má stejnou délku. Krátce řečeno tato zobrazení zachovávají shodnost.

To ovšem není případ posledního zbývajícího zobrazení. Stejnolehlost je zobrazení, u kterého si také na začátku zvolíme bod S, střed stejnolehlosti, a nenulové reálné číslo k, poměr stejnolehlosti. Pokud je číslo k kladné, pak obraz daného bodu získáme tak, že ho od bodu S k-krát vzdálíme. Pokud je k záporné přidáme k tomu ještě převrácení středovou souměrnost podle bodu S. Stejnolehlost je podobné zobrazení, což má dva užitečné důsledky:

(i) Obrazem přímky je přímka (dokonce rovnoběžná)
(ii) Obrazem kružnice je kružnice

Teď si konečně ukážeme, jak se dá zobrazení využít pří řešení úloh, a to jak konstrukřních, tak důkazových.

Příklad. Je dán bod A, přímka b a přímka c ($b \,||\, c$). Sestrojte rovnostranný trojúhelník ABC tak, aby $B \in b$ a $C \in c$.

Toto je typická situace v konstrukčních úlohách. Známe množinu bodů B i množinu bodů C a přemýšlíme, jak to dát dohromady s tím, že trojúhelník má být rovnostranný. Naštěsí existuje zobrazení, které zobrazí bod B do bodu C a ještě k tomu takové zobrazení umíme provést. Ano, je jím otočení o 60° kolem bodu A (bod A známe a 60° umíme zkonstruovat). Pokud bod B leží na přímce b, pak jeho obraz v daném otočení, tedy odpovídající bod C, bude ležet na přímce b', která je obrazem b opět v tom samém otočení (tohle si rozmysli, dál už to bude lehké). Takže C leží na c i na b', tedy leží na jejich průniku, což je jediný bod. A jsme hotovi. No a podobný postup se dá v konstrukčních úlohách uplatnit velmi často.

Zajímavější je ovšem využití zobrazení k řešení důkazových úloh. Zde totiž existují pouze velmi obecná doporučení. Takové řešení vypadá nejčastěji tak, že si nakreslíme náčrt a všimneme si, že umíme nějak jednoduše zobrazit jeden objekt na druhý (úsečku na úsečku, trojúhelník na trojúhelník, kružnici na kružnici atd.) a v tomto zobrazení pak zobrazíme i zbytek náčrtku. No a může se stát, že z nového náčrtku s pár novými body, dokazované tvrzení již jednoduše plyne. Aby bylo trochu jasné, o čem je řeč, můžeš si to vyzkoušet na následujícím příkladu (doporučuji otočení o 90° podle A).

Příklad. Ve čtverci $ABCD$ je K libovolný bod strany CD, osa p úhlu BAK protíná stranu BC v bodě L. Dokažte, že platí

$$|BL| + |KD| = |AK|.$$

Za odměnu, že jsi se dočetl až sem, ti dáme dobrou radu. Některé geometrické útvary se často pojí s určitým druhem zobrazení. Všiml sis, že u rovnostranného trojúhelníka to je otočení o 60°. Jistě teď zvládneš odvodit, jaká všechna zobrazení souvisí se čtvercem nebo třeba s rovnoběžníkem. Věř, že to nebude marná práce.

6. série

Téma:	Geometrická zobrazení
Datum odeslání:	10. března 2008

0. úloha (1 bod)

Vymysli vlastní zobrazení s co nejpodivuhodnějšími vlastnostmi.

1. úloha (3 body)

Nechť $ABCD$ je rovnoběžník a na jeho stranách leží po řadě body K, L, M a N, které tvoří další rovnoběžník $KLMN$. Dokažte, že oba rovnoběžníky mají společný střed.

2. úloha (3 body)

V trojúhelníku ABC jsou uvnitř strany BC dva (ne nutně různé) body D a E tak, že $|BD| = |CE|$. Pro kterou polohu bodů D a E je $|AD| + |AE|$ minimální?

3. úloha (3 body)

V rovině jsou dány dvě neprotínající se kružnice k a l a úhel MVN na průsvitném papíře[1]. Úhel MVN se pohybuje tak, že rameno VM se dotýká kružnice k a rameno VN kružnice l, přičemž obě kružnice leží uvnitř úhlu. Dokažte, že v daném úhlu existuje bod, který při pohybu opisuje oblouk nějaké kružnice.

4. úloha (5 bodů)

Mějme rovnoramenný trojúhelník ABC se základnou AB. Bod D leží na jeho kružnici vepsané k se středem I a v polorovině CIB tak, že $|\sphericalangle CID| = |\sphericalangle ACB|$. Tečna kružnice k vedená bodem D protíná stranu BC v bodě E. Dokažte, že body A, I a E leží na jedné přímce.

5. úloha (5 bodů)

Mějme na přímce p po řadě body A, B, C a D. Nalezněte čtverec $KLMN$ takový, že přímky KL, MN, LM a KN protínají přímku p po řadě v bodech A, B, C a D.

[1] Úhel MVN si představ jako klín nakreslený na nekonečně velkém průsvitném papíru.

6. ÚLOHA (5 BODŮ)

Uvnitř rovnoběžníku $KLMN$ leží bod P tak, že $|\sphericalangle PLM| = |\sphericalangle PNM|$. Označme S_1, S_2, S_3 a S_4 středy kružnic opsaných po řadě trojúhelníkům KLP, LMP, MNP a NKP. Dokažte, že body S_1, S_2, S_3 a S_4 leží na kružnici se středem P.

7. ÚLOHA (5 BODŮ)

Kenny si v rovině nakreslil čtyřúhelník $EFGH$. Franta by si ho rád též nakreslil, tak mu Kenny řekl délky úseček EF, FG, GH a HE a taky délku XY, kde X je střed EF a Y střed GH. Co má teď Franta udělat, aby čtyřúhelník sestrojil?

8. ÚLOHA (5 BODŮ)

Mějme kružnice m, n o středech M, N, přičemž kružnice m leží uvnitř kružnice n a dotýká se jí v bodě T. V jedné polorovině určené přímkou TM leží na m dva různé body A, C a v opačné polorovině leží na n dva různé body B, D tak, že platí $|\sphericalangle BTN| = |\sphericalangle ATM| = |\sphericalangle CTD| - 90°$. Označme patu kolmice z C na AT jako X, patu kolmice z D na BT jako Y. Dokažte, že když pohybujeme body C a D se zachováním velikosti úhlu CTD, tak středy kružnic opsaných trojúhelníkům XYT leží na přímce[2].

Řešení 6. série

0. úloha

Vymysli vlastní zobrazení s co nejpodivuhodnějšími vlastnostmi.

Jelikož přišlo poměrně málo řešení, měl jsem tu možnost o všech dost popřemýšlet a zjistit mnohé zajímavosti, o kterých třeba ani samotní autoři nevěděli. Zobrazovalo se vše možné, nejprve body, přímky a kružnice, poté i netradiční věci jako prasátka a kytičky a vyvrcholením bylo zobrazení složené z básně. Nejvíce se mi líbilo zobrazení od *Pepy Tkadlece, Mirka Olšáka* a *Aleny Skálové.* Od prvních dvou jmenovaných jsem udělal věrnou kopii řešení a jejich zobrazení můžete nalézt pod tímto textem. Třetí zobrazení, které si pro Vás připravila Alča, bohužel nemohu názorně ukázat, protože využívá nám pro tisk nedostupných barviček, a tak jsem se snažil alespoň prezentovat myšlenku jejího zobrazení.

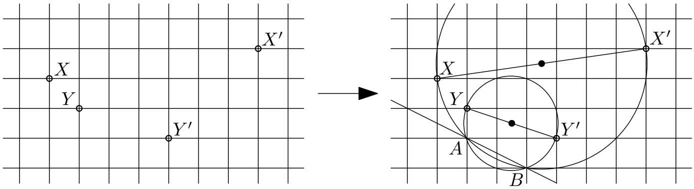
Zobrazení od Pepy Tkadlece:

Moje zobrazení je určeno dvojicí bodů A, B a funguje pro celou rovinu. Celou? Ne! Pro začátek rozhodně nefunguje pro přímku AB. No a pak se ještě chová hodně divně pro kolmice na ni v bodech A a B, takže ty radši taky vynecháme. Ale jinak celou. Co tedy zobrazení dělá? Bodu X přiřadí bod X' tak, aby $XA \perp X'A$ a $XB \perp X'B$. A je to.

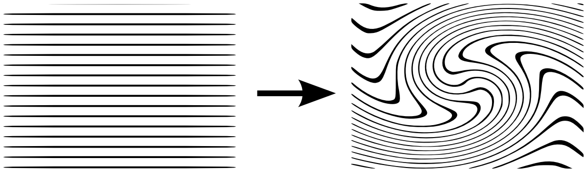
No a co tedy ty podivné vlastnosti? Jen si to zkuste! Schválně si zobrazte nějakou hezkou věc – to co vám vyleze je věru podivné. Jen velmi výjimečně je obrazem přímky přímka a kružnice kružnice. Když si pár objektů skutečně zobrazíte, připadá vám ještě podivnější, že tohle zobrazení i něco zachovává. A nejsou to věci jen tak ledajaké! Pro každou dvojici X, X' (vzor, obraz) platí, že čtyřúhelník $ABXX'$ je tětivový. No a krom toho mají body X a X' stejnou vzdálenost od osy úsečky AB. A samozřejmě, zobrazení aplikované dvakrát podle týchž středů je identita.

[2]Poloha bodů X, Y se mění v závislosti na poloze bodů C, D podle popsané konstrukce.

A na závěr úloha! Nalezněte středy zobrazení A, B, pokud $X \to X'$ $Y \to Y'$ v této čtverečkové síti:



Zobrazení od Mirka Olšáka:
Velice zajímavé zobrazení je zkroucení:



Toto zobrazení je totiž, ač se to někomu může nezdát, injektivní (prosté), a tudíž k němu existuje inverzní zobrazení. Není proto vhodné je používat k tomu, aby jistá část obrázku nebyla čitelná.

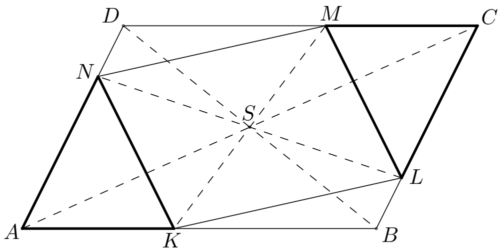
Střípky z řešení Aleny Skálové:
Nejúžasnějším zobrazením je tzv. zelená inverze, což je speciálním případem barevné inverze, která funguje celkem jednoduše. Je to zobrazení, které zinvertuje všechny původní barvy dle předem daného pravidla. Dobře se skládá se všemi známými shodnými i podobnými zobrazeními – jak s rotací, translací, osovou i středovou souměrností, tak i se stejnolehlostí nebo již profláknutou kruhovou inverzí.

Barevná inverze sama o sobě je sice pěkná, ale zelená! Zelená je hezčí. Barevná inverze totiž přiřadí každé barvě nějakou jinou, ale zelená inverze zobrazuje naprosto nepředvídatelně. Z každé dané barvy kromě zelené totiž vytvoří zelenou barvu. A teď přijde to nejlepší! Na zelenou barvu zelená inverze vůbec nefunguje! Ona ji prostě nijak nezmění, prostě ji nechá tak, jak je. Takže jak usoudíte sami, taková modrá inverze je oproti zelené inverzi úplný břídil. Stručně řečeno, zelená inverze je prostě jedinečná.

1. úloha
Nechť $ABCD$ je rovnoběžník a na jeho stranách leží po řadě body K, L, M a N, které tvoří další rovnoběžník $KLMN$. Dokažte, že oba rovnoběžníky mají společný střed.

Každý rovnoběžník je středově souměrný a průsečík úhlopříček je středem této souměrnosti. Víme také, že trojúhelníky AKN a CML jsou podobné (podle věty uu, neboť $|\sphericalangle NAK| = |\sphericalangle LCM|$ (protilehlé úhly v rovnoběžníku) a $|\sphericalangle AKN| = |\sphericalangle CML|$ díky rovnoběžnostem). Postupme dále, trojúhelníky AKN a CML jsou dokonce shodné, protože $|NK| = |LM|$. Trojúhelníky AKN a CML jsou navíc souměrné podle středu rovnoběžníku $KLMN$, neboť jsou podle jeho středu souměrné i strany LM a KM. Body A a C jsou ale souměrné i podle středu velkého rovnoběžníku $ABCD$. Protože máme vždy jen jednu středovou souměrnost převádějící body A

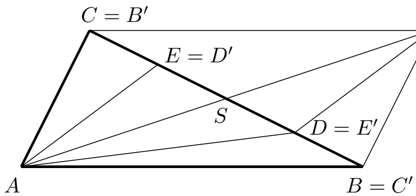
a C na sebe, musí být středové souměrnosti určené středy rovnoběžníků $ABCD$ a $KLMN$ stejné, a tedy i tyto středy rovnoběžníků shodné. Hotovo. :-)



2. úloha

V trojúhelníku ABC jsou uvnitř strany BC dva (ne nutně různé) body D a E tak, že $|BD| = |CE|$. Pro kterou polohu bodů D a E je $|AD| + |AE|$ minimální?

Označme S střed strany AB a zobrazme trojúhelník ABC a body D, E ve středové souměrnosti podle S. Bod A' tvoří teď s body C, A, B rovnoběžník, neboť čtyřúhelník $A'CAB$, který je středově souměrný, má středově souměrné i protější strany, které jsou díky středové souměrnosti rovnoběžné. Protože platí $|BD| = |CE|$, je S i středem úsečky DE a bod E se zobrazí do D.



Obrazem úsečky AE je úsečka $A'D$, proto $|AE| = |A'D|$ a pro součet délek ze zadání platí $|AD| + |AE| = |AD| + |DA'|$. Součet $|AD| + |AE|$ je tedy délkou zkonstruované lomené čáry ADA', která je nejkratší, právě když D leží na spojnici AA', neboli je $D = E = S$.

Poznámka: pro kteroukoli jinou polohu bodů D, E z trojúhelníkové nerovnosti dostaneme $|AD| + |DA'| > |AA'|$.

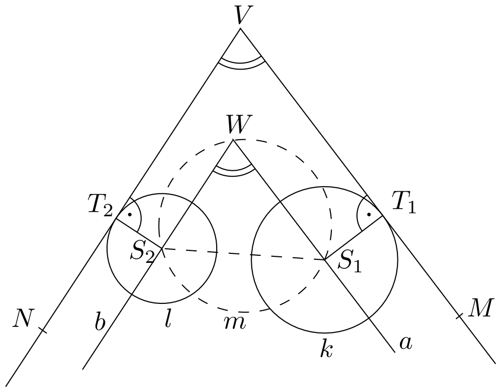
3. úloha

V rovině jsou dány dvě neprotínající se kružnice k a l a úhel MVN na průsvitném papíře[3]. Úhel MVN se pohybuje tak, že rameno VM se dotýká kružnice k a rameno VN kružnice l, přičemž obě kružnice leží uvnitř úhlu. Dokažte, že v daném úhlu existuje bod, který při pohybu opisuje oblouk nějaké kružnice.

Najprv si ujasníme, čo sa od nás v zadaní vlastne chce. Máme dva papiere. Jeden normálny a na ňom kružnice k a l, druhý priesvitný a na ňom uhol MVN. My hľadáme bod v uhle MVN, teda tento bod musíme dokresliť na priesvitný papier, aby sa pohyboval spolu s uhlom MVN. To znamená, že jeho polohu nemôžeme vzťahovať na kružnice k a l. Taký bod naozaj existuje. Najskôr si ho zostrojíme a potom si ukážeme, prečo vyhovuje zadaniu.

[3]Úhel MVN si představ jako klín nakreslený na nekonečně velkém průsvitném papíru.

Do uhlu MVN si doplníme rovnobežku a s ramenom VM vo vzdialenosti polomeru kružnice k a rovnobežku b s ramenom VN vo vzdialenosti polomeru kružnice l. Ich priesečník označíme W. Keď teraz priesvitný papier priložíme na papier s kružnicami tak, aby sa rameno VM uhla MVN dotýkalo kružnice k a rameno VN sa dotýkalo kružnice l, budú rovnobežky a, b prechádzať stredmi kružníc S_1, S_2. To bude platiť vždy bez ohľadu na polohu uhla MVN, pretože vzdialenosť dotyčnice od stredu kružnice je vždy rovná polomeru kružnice.



Uhol S_1WS_2 je zhodný s uhlom MVN, lebo ich ramená sú rovnobežné. Uhol MVN sa nemení a preto má aj uhol S_1WS_2 stále konštantnú veľkosť. Môžeme teda povedať, že z bodu W vidíme úsečku S_1S_2 stále pod rovnakým uhlom[4], a teda bod W sa pohybuje po kružnici m.

4. úloha

Mějme rovnoramenný trojúhelník ABC se základnou AB. Bod D leží na jeho kružnici vepsané k se středem I a v polorovině CIB tak, že $|\sphericalangle CID| = |\sphericalangle ACB|$. Tečna kružnice k vedená bodem D protíná stranu BC v bodě E. Dokažte, že body A, I a E leží na jedné přímce.

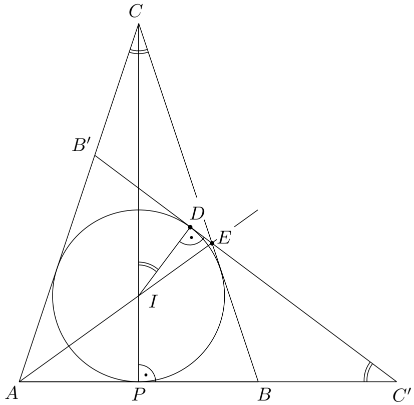
První řešení (přes osovou souměrnost):

Označme P průsečík přímek CI a AB a dále průsečíky tečny vedené bodem D s přímkami AB, AC postupně C', B'. Dokážeme, že $\triangle AB'C'$ je obrazem $\triangle ABC$ v osové souměrnosti podle osy úhlu při vrcholu A, tedy podle přímky AI. Poté bude strana $B'C'$ obrazem strany BC, ovšem vzor a obraz se musí nutně protínat na ose souměrnosti, odkud budeme vědět, že bod E leží na přímce AI.

Ovšem víme, že $|\sphericalangle IDC'| = 90°$ a rovněž $|\sphericalangle IPC'| = 90°$, tedy čtyřúhelník $IDC'P$ je tětivový, takže $|\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle CID| = 180° - |\sphericalangle PID| = |\sphericalangle PC'D| = |\sphericalangle AC'B'|$, dále se $\triangle ABC$ a $\triangle AB'C'$ shodují v úhlu při vrcholu A, takže jsou podobné. Navíc mají ještě shodnou kružnici vepsanou, tudíž jsou dokonce shodné. V osové souměrnosti podle osy úhlu AI se přímka AB zobrazuje na přímku AB', navíc jsme nyní dokázali $|AB| = |AB'|$ a $|AC| = |AC'|$, takže v této osové souměrnosti se opravdu bod B zobrazí na B' a C na C', čímž jsme hotovi.

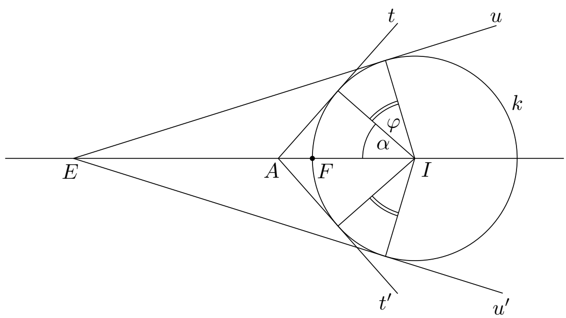
Poznamenejme ještě, že kdybychom se snažili namísto úhlu při vrcholu C' počítat úhel při vrcholu B', museli bychom rozlišit případ, kdy je bod B' na straně AC (D je nad AI jako na obrázku) a kdy je bod B' mimo stranu AC (D je pod AI).

[4] Uhol S_1WS_2 je obvodový uhol príslušný k tetive S_1S_2.



Druhé řešení (upraveno podle Jana Moravce)

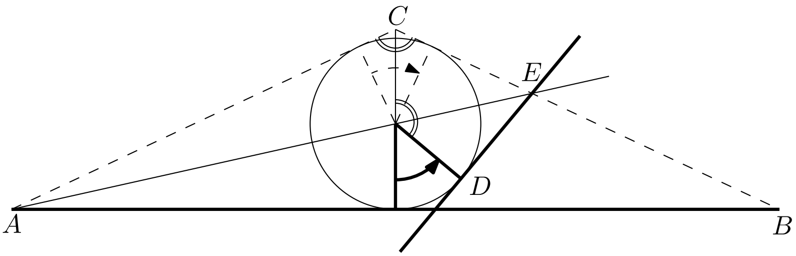
Zapomeňme na chvíli na zadání naší úlohy a podíváme se na následující obrázek.



Mějme kružnici k se středem I. Uvažujme vně kružnice bod A a z něj vedené tečny t, t' – ty jsou zřejmě osově symterické podle osy AI. Zamysleme se, co se stane, pokud obě tečny otočíme kolem bodu I o stejný úhel φ, ovšem každou opačným směrem. Ano! Dostaneme zřejmě nové osově symetrické tečny u, u', které se opět protínají na ose AI, tentokrát v bodě E.

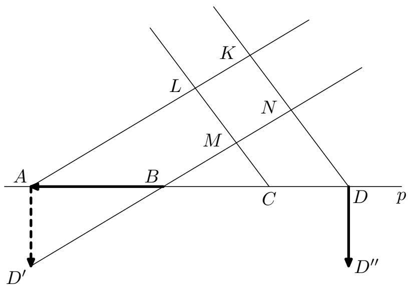
Pokud se Ti zdá tento přístup příliš intuitivní, zde je podrobnější vysvětlení: Můžeme si představit, že tečny t, t' vznikly z jedné tečny vedené bodem F: t vzniklo otočením kolem I o úhel α, t' otočením o úhel $-\alpha$. Tím jsme dostali dvě osově symetrické tečny. Když je dále otočíme ještě o úhel φ, je to totéž, jako kdybychom původní tečnu vedenou bodem F otočili rovnou o úhel $\alpha + \varphi$ a na druhou stranu o úhel $-\alpha - \varphi$, čímž dostaneme osově symetrickou dvojici tečen u, u'.

Nyní už si stačí jen uvědomit, že toto řeší naší úlohu podle následujícího obrázku. Dvojice tečen procházející bodem A se "otočením" (dvě různá otočení o úhel $180° - |\sphericalangle CBA|$) zobrazí na dvojici tečen (tučná se otočí na tučnou a čárkovaná na čárkovanou) protínající se v bodě E, který tedy leží na přímce AI.



5. úloha
Mějme na přímce p po řadě body A, B, C a D. Nalezněte čtverec $KLMN$ takový, že přímky KL, MN, LM a KN protínají přímku p po řadě v bodech A, B, C a D.

Řešení podle Jana Moravce:
Přímku KL získáme z přímky MN jejím posunutím o vektor $\overrightarrow{BA}$, analogicky získáme přímku LM, a to posunutím přímky KN o vektor $\overrightarrow{DC}$. Otočením vektoru $\overrightarrow{DC}$ o $90°$ dostaneme vektor $\overrightarrow{DD''}$. Pokud o tento vektor posuneme přímku KL, získáme přímku MN. Vektor $\overrightarrow{DD''}+\overrightarrow{BA}$ (což se rovná $\overrightarrow{AD'}+\overrightarrow{BA}$) má proto stejný směr jako přímka MN a konstrukci již snadno dokončíme. Úloha má dvě osově souměrná řešení.



K podobnému řešení lze dospět i bez znalosti vektorů.

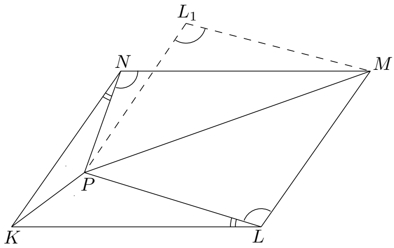
Řešení podle Petra Ryšavého:
Buď q kolmice na p v bodě A. Její průsečík s NM nazvěme D'. Všimněme si, že q protíná pás rovnoběžek KL a NM pod úhlem $|\sphericalangle AD'B| = |\sphericalangle BCM|$. To je stejný úhel, jaký svírá úsečka CD s pásem rovnoběžek LM a KN. Oba pásy jsou stejně široké, tudíž vzdálenost $|AD'|$ je stejná jako $|CD|$. Nyní již můžeme narýsovat úsečku KL a pak konstrukci snadno dokončit.

6. úloha
Uvnitř rovnoběžníku $KLMN$ leží bod P tak, že $|\sphericalangle PLM| = |\sphericalangle PNM|$. Označme S_1, S_2, S_3 a S_4 středy kružnic opsaných po řadě trojúhelníkům KLP, LMP, MNP a NKP. Dokažte, že body S_1, S_2, S_3 a S_4 leží na kružnici se středem P.

Nejprve si uvědomme, že body S_1, S_2, S_3 a S_4 leží na kružnici se středem P právě tehdy, když platí $|PS_1| = |PS_2| = |PS_3| = |PS_4|$. Jelikož ale vzdálenosti $|PS_1|$, $|PS_2|$, $|PS_3|$ a $|PS_4|$

jsou poloměry kružnic opsaných trojúhelníkům KLP, LMP, MNP a NKP, stačí nám ukázat, že všechny tyto poloměry (označme je postupně r_1, r_2, r_3 a r_4) jsou stejně velké.

Uvažujme osovou souměrnost podle osy MP. V ní se bod L zobrazí na L_1, přičemž bude platit $|\sphericalangle PLM| = |\sphericalangle PL_1M|$, viz obrázek.

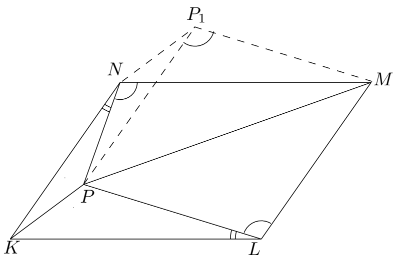


Protože body N, L_1 leží ve stejné polorovině s hraniční přímkou MP a $|\sphericalangle PL_1M| = |\sphericalangle PNM|$ podle rovnosti ze zadání, leží body P, M, N a L_1 na jedné kružnici. Tato kružnice je kružnicí opsanou jednak trojúhelníku PMN, jednak trojúhelníku PL_1M, který je ovšem shodný s trojúhelníkem PLM (protože je to jeho obraz v osové souměrnosti). Tedy $r_2 = r_3$.

Protože $KLMN$ je rovnoběžník, platí $|\sphericalangle KLM| = |\sphericalangle KNM|$. Jelikož navíc $|\sphericalangle PLM| = |\sphericalangle PNM|$, musí být $|\sphericalangle KLP| = |\sphericalangle KNP|$. Využijeme osovou souměrnost podle osy PK a podobně jako v předchozím odstavci dostaneme $r_1 = r_4$.

Poznámka. Právě odvozené rovnosti můžeme snadno nahlédnout také s pomocí následujícího vzorce pro poloměr r kružnice opsané trojúhelníku: $r = \frac{a}{2\sin\alpha}$, kde a je délka nějaké strany trojúhelníka a α je velikost protějšího úhlu. Stačí si uvědomit, že trojúhelníky PML a PMN (resp. PKL a PKN) mají proti společné straně PM (resp. PK) podle zadání stejný vnitřní úhel.

Zbývá ukázat $r_1 = r_3$. K tomu posuňme bod P o vektor $\overrightarrow{LM}$ do bodu P_1.



Čtyřúhelník $PLMP_1$ je rovnoběžník, takže $|\sphericalangle PLM| = |\sphericalangle PP_1M|$. Využijeme-li navíc rovnosti $|\sphericalangle PLM| = |\sphericalangle PNM|$, dostaneme $|\sphericalangle PP_1M| = |\sphericalangle PNM|$, tedy čtyřúhelník PMP_1N je tětivový. To znamená, že trojúhelníky MNP a MNP_1 mají stejnou opsanou kružnici, a protože trojúhelník MNP_1 je shodný s KLP (je to jeho obraz v posunutí), dostáváme kýženou rovnost $r_1 = r_3$ (která spolu s již dokázanými rovnostmi $r_2 = r_3$ a $r_1 = r_4$ dává $r_1 = r_2 = r_3 = r_4$).

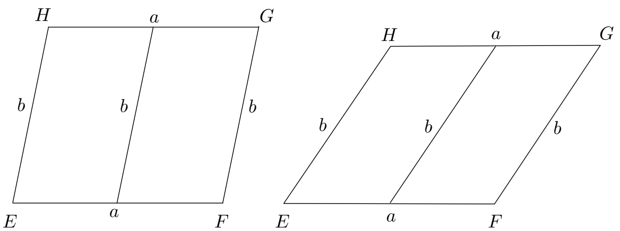
Trochu jiné řešení (podle Josefa Tkadlece):

Stejně jako v předchozím řešení posuneme bod P o vektor $\overrightarrow{LM}$ do bodu P_1 a ukážeme, že čtyřúhelník PMP_1N je tětivový. Poté kružnice opsaná tomuto čtyřúhelníku je i kružnicí opsanou trojúhelníkům PMN, P_1MN, PMP_1 a PP_1N. Zároveň ale $\Delta MNP_1 \cong \Delta LKP$, $\Delta PMP_1 \cong \Delta MPL$ (LMP_1P je rovnoběžník), $\Delta PNP_1 \cong \Delta NPK$ (KPP_1N je rovnoběžník), tedy kružnice opsané trojúhelníkům KLP, LMP, MNP, NKP mají stejný poloměr.

7. úloha

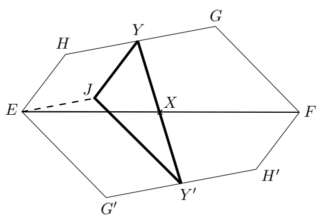
Kenny si v rovině nakreslil čtyřúhelník $EFGH$. Franta by si ho rád též nakreslil, tak mu Kenny řekl délky úseček EF, FG, GH a HE a taky délku XY, kde X je střed EF a Y střed GH. Co má teď Franta udělat, aby čtyřúhelník sestrojil?

Ještě než začneme čtyřúhelník konstruovat, všimneme si, že pokud si Kenny nakreslí rovnoběžník, nejsou poskytnuté údaje pro Frantu dostačující. Pak totiž vyhovuje každý rovnoběžník o daných stranách a těch je nekonečně mnoho. Na obrázku najdeš dva takové, které ti pomohou představit si i ty další.



Přejděme nyní k samotné konstrukci. Typickým obratem při konstruování čtyřúhelníka je nalezení nějakého pomocného trojúhelníka, který sestrojit umíme. S jeho pomocí pak konstrukci snadno dokončíme.

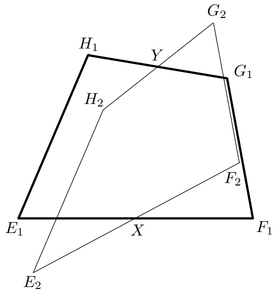
V hledání takového trojúhelníka nám pomůže středová souměrnost. Zobrazíme tedy celý čtyřúhelník $EFGH$ ve středové souměrnosti podle bodu X (obrazy označíme čárkovaně). Dále si dokreslíme bod J tak, aby $EJYH$ byl rovnoběžník (koukni na obrázek). Nyní zahlédneme, že trojúhelník $YY'J$ je shodný s trojúhelníkem $HG'E$. Jeden na druhý se totiž dá převést posunutím o vektor $\overrightarrow{HY}$, tedy shodným zobrazením. A nyní je jasné, že oba trojúhelníky umíme sestrojit ($|YY'| = 2|XY|$, $|YJ| = |HE|$, $|Y'J| = |EG'| = |GF|$).



Šikovnější je sestrojit trojúhelník $YY'J$, neboť můžeme okamžitě najít bod E (známe jeho vzdálenosti od bodů J a X). Známe–li bod E, dokončíme konstrukci již velmi snadno nalezením bodů H a G' a následným využitím středové souměrnosti.

Problém může nastat pokud body X a J splynou. Tehdy bod E hledáme jako průsečík soustředných kružnic. To může dopadnout buď tak, že žádný bod E nevyhovuje, což vyloučíme, protože Kenny si čtyřúhelník nakreslil, a tedy řešení existuje, anebo tak, že kružnice splynou a řešení je nekonečně mnoho. No a to se stane jedině tehdy, pokud si Kenny nakreslil rovnoběžník (rozmysli si!).

Na závěr se sluší říct, že ve většině případů má úloha dvě řešení (díky dvěma možným polohám bodu E). Aby si pak Franta mohl být jistý, že má ten samý čtyřúhelník jako Kenny, měl by je zkonstruovat obě. Příklad dvou vyhovujících čtyřúhelníků si můžete prohlédnout na obrázku.



8. úloha

Mějme kružnice m, n o středech M, N, přičemž kružnice m leží uvnitř kružnice n a dotýká se jí v bodě T. V jedné polorovině určené přímkou TM leží na m dva různé body A, C a v opačné polorovině leží na n dva různé body B, D tak, že platí $|\sphericalangle BTN| = |\sphericalangle ATM| = |\sphericalangle CTD| - 90°$. Označme patu kolmice z C na AT jako X, patu kolmice z D na BT jako Y. Dokažte, že když pohybujeme body C a D se zachováním velikosti úhlu CTD, tak středy kružnic opsaných trojúhelníkům XYT leží na přímce[5].

Převod na jednodušší úlohu:

První krok uděláme pro obě cesty k řešení stejný, ukážeme, že $\frac{|AX|}{|XT|} = \frac{|TY|}{|YB|}$. To vyplyne z podobnosti trojúhelníků ACT a TDB. Nejdřív náznak myšlenky vedoucí k $ACT \approx TDB$: při rovnoměrném pohybu bodu C z A do T se rovnoměrně pohybuje i D z T do B, oblouky AT a TB jsou podobné, proto ACT a TDB jsou podobné. A teď už důkaz.

Označme si B', D' další průsečíky přímek TB a TD s kružnicí m a dále nechť je TZ část tečny k m ležící v polorovině TMA.

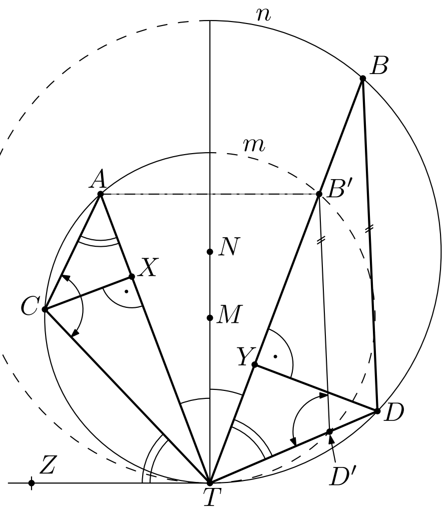
Díky stejnolehlosti kružnic m a n podle T jsou i trojúhelníky TDB a $TD'B'$ stejnolehlé, a proto $TDB \approx TD'B'$. Pro $\Delta ACT \approx \Delta TDB$ teď stačí ukázat $\Delta ACT \approx \Delta TD'B'$. Díky shodnosti úhlů $|\sphericalangle ATM| = |\sphericalangle BTM|$ se v osové souměrnosti podle TM zobrazí AT na $B'T'$, dostáváme $|AT| = |B'T|$ a následně[6] $|\sphericalangle TAC| = |\sphericalangle B'TD'|$. Počítáním úhlů ukážeme $|\sphericalangle TAC| = |\sphericalangle B'TD'|$:

$$\begin{aligned}|\sphericalangle TAC| &= |\sphericalangle ZTC| = |\sphericalangle ZTB'| - |\sphericalangle CTB'| = \\ &= 90° + |\sphericalangle BTM| - |\sphericalangle CTB'| = |\sphericalangle CTD| - |\sphericalangle CTB'| = |\sphericalangle B'TD'|.\end{aligned}$$

---

[5] Poloha bodů X, Y se mění v závislosti na poloze bodů C, D podle popsané konstrukce.

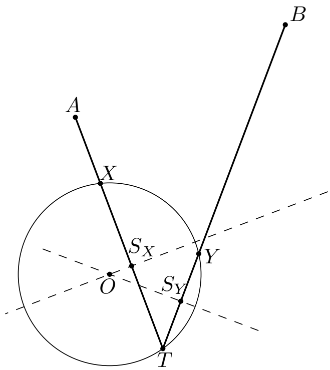
[6] Stejně dlouhým tětivám AT, $B'T'$ přísluší na kružnici stejně velké obvodové úhly $\sphericalangle TAC$, $\sphericalangle B'TD'$.



První rovnost vychází z věty o obvodovém a úsekovém úhlu, třetí rovnost platí díky $ZT \perp TM$, čtvrtá je rovnost ze zadání. Z věty uu dostáváme $\Delta ACT \approx \Delta TD'B'$ a tedy i $\Delta ACT \approx \Delta TDB$. Konstrukce bodů X, Y je jednoznačná, poměry $\frac{|AX|}{|XT|}$, $\frac{|TY|}{|YB|}$ jsou jasně určeny skrze poměry stran $|AC| : |CT| : |TA|$ a $|TD| : |DB| : |BT|$, které jsou stejné (jak jsme právě ukázali), tedy zřejmě platí potřebné $\frac{|AX|}{|XT|} = \frac{|TY|}{|YB|}$.

Jednodušší úloha:

Zadání jsme převedli na o poznání lépe vyhlížející úlohu: „V trojúhelníku ATB se uvnitř stran AT, TB pohybují body X, Y tak, že $\frac{|AX|}{|XT|} = \frac{|TY|}{|YB|}$. Ukažte, že středy O kružnic opsaných ΔXTY leží na jedné přímce o.“



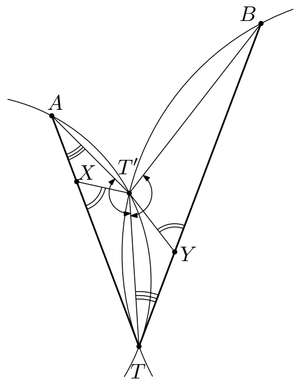
Z důvodu poučnosti ukážeme hned dvě řešení této jednodušší úlohy.

První řešení zjednodušené úlohy:

Potřebujeme, aby bod T' pro každou polohu X, Y splňoval $|\sphericalangle XT'Y| = 180^\circ - |\sphericalangle XTY|$, tedy i pro krajní případy $X = A$, $Y = T$ a $X = T$, $Y = B$. Pokud tedy T' existuje, splňuje

$$|\sphericalangle TT'A| = |\sphericalangle TT'B| = 180^\circ - |\sphericalangle XTY|.$$

Zkonstruujme T' pomocí kružnicových oblouků s obvodovým úhlem $180^\circ - |\sphericalangle XTY|$.



Je třeba ukázat, že zkonstruovaný T' leží na všech kružnicích opsaných ΔXTY. K tomu využijeme podobnost $\Delta ATT' \approx \Delta TBT'$. Podobnost trojúhelníků plyne buď z vlastností spirální podobnosti[7], nebo podle věty *uu* z rovností $|\sphericalangle TT'A| = |\sphericalangle TT'B|$ a

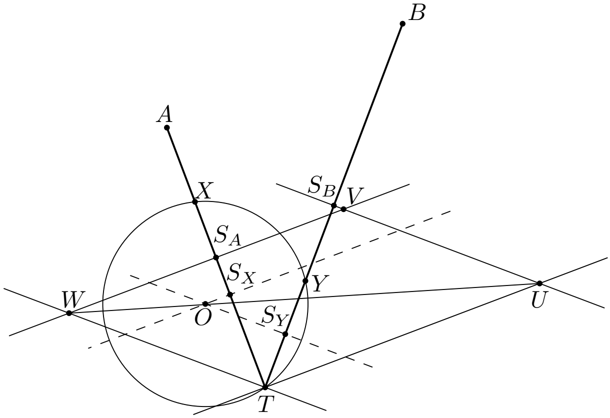
$$|\sphericalangle TAT'| = 180^\circ - |\sphericalangle TT'A| - |\sphericalangle ATT'| = |\sphericalangle ATB| - |\sphericalangle ATT'| = |\sphericalangle T'TB|.$$

Díky poměru $\frac{|AX|}{|XT|} = \frac{|TY|}{|YB|}$ si v podobných trojúhelnících ATT', TBT' navzájem odpovídají i polohy bodů X, Y. Pak si navzájem odpovídají i úhly $|\sphericalangle T'XT| = |\sphericalangle T'YB|$ a dostáváme $|\sphericalangle T'XT| + |\sphericalangle TYT'| = 180^\circ$, což je ekvivalentní s tím, že body T, Y, T', X leží na jedné kružnici, a to jsme chtěli dokázat.

Druhé řešení zjednodušené úlohy:

Označme S_X, S_Y středy úseček XT, YT a S_A, S_B středy úseček AT, BT, dále pak rovnoběžník $TUVW$ tvořený kolmicemi na přímky AT a BT jako na obrázku.

[7] Zobrazení vzniklé složením otočení a stejnolehlosti, v tomto případě kolem bodu T' o úhel $|\sphericalangle AT'T|$ v poměru $\frac{|TT'|}{|AT'|}$.



Při rovnoměrných pohybech bodů X, Y po úsečkách AT, TB se rovnoměrně pohybují i body S_X, S_Y po S_AT, TS_B. Díky konstrukci středu O pomocí bodů S_X, S_Y se musí bod O pohybovat též rovnoměrně přímočaře[8]. Lepší zdůvodnění (ale o to náročnější na celkové domyšlení) podá dokreslení rovnoběžníku $TUVW$ jako na obrázku, ve kterém, jak ukážeme, leží O na úhlopříčce. Označme O_X průnik WU a osy úsečky XT, O_Y průnik WU a osy YT. Sledování poměrů dá $\frac{|WO_X|}{|O_XU|} = \frac{|WO_Y|}{|O_YU|}$:

$$\frac{|WO_X|}{|O_XU|} = \frac{|S_A|}{|S_X|} = \frac{|AX|}{|XT|} = \frac{|TY|}{|YB|} = \frac{|TS_Y|}{|S_YS_B|} = \frac{|WO_Y|}{|O_YU|}$$

První a poslední rovnost plyne z rovnoběžností trojic přímek WV, O_1S_X, TU a WT, O_2S_Y, VU. Rovnost $\frac{|WO_X|}{|O_XU|} = \frac{|WO_Y|}{|O_YU|}$ dává[9] $O_X = O_Y = O$, O tedy leží na úhlopříčce.

[8]Toto je fyzikální zdůvodnění, které funguje, ale je ošemetné ve frázi „díky konstrukci O pomocí bodů S_X, S_Y“, funkčnost konstrukce a pohybu by se stejně měla lépe podložit.

[9]Důležitou roli tu hraje i fakt, že O_X, O_Y leží oba na na WU, tedy není jiná možnost než $O_X = O_Y$.