Povídání k sedmé sérii

Seznámení s funkcionálními rovnicemi

Co je to funkcionální rovnice?

Funkcionální rovnice je rovnice, do které hledáme funkci f tak, aby f vyhovovala rovnici pro všechny zadané hodnoty proměnných. Příklady na funkcionální rovnice mohou vypadat následovně.

Příklad 1. Najděte všechny funkce $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ splňující pro všechna x, $y \in \mathbb{Q}$ rovnici

$$f(x+y) = f(x) + f(y).$$

Příklad 2. Najděte všechny funkce $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, které vyhovují rovnici

$$f(x^2) = x + f(y) - \frac{y}{f(y)}.$$

Pro řešení je důležité **důkladně** pochopit, co vlastně zadání říká.

Výklad zadání příkladů

- *najděte všechny funkce* říká „nalezněte vyhovující funkce a ukažte, že jiné než Vámi nalezené funkce už rovnici neřeší“
- *funkce* $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ mají definiční obor $\mathbb{Q}$ a obor hodnot je částí $\mathbb{R}$
- *funkce* $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ říká, že definiční obor a funkční hodnoty jsou kladná reálná čísla
- *splňující rovnici pro všechna* x, $y \in \mathbb{Q}$ znamená „splňující pro všechny dvojice $[x, y]$, $x \in \mathbb{Q}$, $y \in \mathbb{Q}$“, tedy kupříkladu i dvojice $[0, y]$, $[x, x]$, neboli pro funkci f z příkladu 1. platí

$$f(0 + y) = f(0) + f(y), \text{ pro všechna } y \in \mathbb{Q},$$
$$f(x + x) = f(x) + f(x), \text{ pro všechna } x \in \mathbb{Q},$$

a pokud bychom v zadání hledali funkci $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, můžeme dosadit i $[f(x), y]$:

$$f(f(x) + y) = f(f(x)) + f(y), \text{ pro všechny dvojice } [x, y] \in \mathbb{Q}^2.$$

Co všechno můžeme do rovnice dosadit, vypráví kapitola „Užitečné hodnoty k dosazení“.

Základní idea řešení funkcionálních rovnic

Základní ideou řešení je implikace „pokud f vyhovuje, tak splňuje vztahy …“. Často používáme obsáhlejší formulaci: „předpokládejme, že $f(x)$ řeší zadanou funkcionální rovnici. Potom má toto řešení následující vlastnosti …“ Konkrétní vlastnosti většinou získáváme speciálním dosazením za x a y. V **příkladu 1.** nám dosazení dvojice $[0, 0]$ poskytne informaci o hodnotě $f(0)$:

$$f(0 + 0) = f(0) + f(0) \Rightarrow f(0) = 0.$$

Dosazení $[\sqrt{x}, 1]$ v **příkladu 2.** dá

$$f((\sqrt{x})^2) = \sqrt{x} + f(1) - \frac{1}{f(1)},$$

neboli pokud $f(x)$ vyhovuje původní rovnici $f(x^2) = x + f(y) - \frac{y}{f(y)}$, tak vyhovuje i jejímu konkrétnímu dosazení $[\sqrt{x}, 1]$, které určí, že funkce $f(x)$ splňuje vztah

$$f(x) = \sqrt{x} + \text{konst.}$$

Ptáte se, proč je $f(1) - \frac{1}{f(1)} = \text{konst.}$? V první implikaci „předpokládejme, že máme nějaké řešení $f(x)$ zadané rovnice, pak toto řešení splňuje ...“ už vyhovující funkci (jakože) máme, jen o ní ještě nic nevíme.[1] Tato funkce má ale pevně danou hodnotu v bodě 1, která se nemění, je konstantní. Proto je

$$f(1) - \frac{1}{f(1)} = \text{konst.}$$

Metody řešení

Hlavní metody řešení jsou dvě, *metoda substituční* a *metoda Cauchyova.*

Substituční metoda

Vhodnými substitucemi za proměnné x a y určíme tvar řešení. Nejdříve uvádíme jeden příklad podrobně, pak druhý stroze, ale přesně.

Příklad 3. Najděte všechny funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vyhovující rovnici

$$f(xy + 1) + f(x + y) = (f(x) + 1)(y + 1) \tag{1}$$

Řešení. Předpokládejme, že jsme už našli funkci f vyhovující zadané rovnici pro všechny dvojice $[x, y]$. Potom f splňuje vztah ze zadání i pro dvojici $[0, x]$ (rovnice je splněna pro všechny obecné dvojice, tedy i pro konkrétnější dvojici $[0, x]$, kdy v rovnici (1) za x dosadíme 0 a za y dosadíme x):

$$f(0x + 1) + f(0 + x) = (f(0) + 1)(x + 1)$$

neboli

$$f(x) = (f(0) + 1)x + f(0) + 1 - f(1). \tag{2}$$

Vyjádříme hodnotu konstant[2] $f(0)$ a $f(1)$. Zkusme dosadit dvojici $[0, 0]$: $f(0 + 1) + f(0 + 0) = (f(0) + 1)(0 + 1)$, po úpravě $f(1) = 1$. Dosazením $[0, 1]$ zjistíme, že $f(0) = 0$. Funkce může mít tedy tvar

$$f(x) = (f(0) + 1)x + f(0) + 1 - f(1) = (0 + 1)x + 0 + 1 - 1 = x.$$

Ale z ničeho zatím neplyne, že tento (už jediný možný) tvar vyhovuje zadání. Proto je potřeba udělat zkoušku. Zkouška:

$$\begin{aligned} L &= f(xy + 1) + f(x + y) = (xy + 1) + (x + y) \\ P &= (f(x) + 1)(y + 1) = (x + 1)(y + 1) = xy + 1 + x + y \\ L &= P \end{aligned}$$

[1] Pro představu: jako když máte v pytli zajíce, ale ještě nevíte, jak vypadá, můžete dloubáním zjišťovat, jak rychle se vrtí, za jak dlouho se unaví, atd. Je to už ale *konkrétní* zajíc, který má danou barvu očí, jež se nemění, ač ji vy neznáte.

[2] Z předpokladu existence f plyne konkrétnost hodnot $f(0)$ a $f(1)$, akorát my ji ještě neznáme, a ostatně proto ještě úlohu řešíme :).

Jedinou funkcí splňující podmínky v zadání je $f(x) = x$.

Příklad 4. Nalezněte všechny funkce $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}^+$ splňující $f(x+y) = f(x) + y$ pro každé $x, y \in \mathbb{R}_0^+$.

Řešení. Předpokládejme, že již máme nějakou funkci f řešící rovnici. Pak musí platit (označíme si $c = f(0)$ a dosadíme $x = 0$ do zadání)

$$f(y) = c + y, \text{ kde } c \in \mathbb{R}^+.$$

Naopak, dosadíme-li funkci f v takto zjištěném tvaru do zadání, zjistíme, že $f(y) = c + y$ řeší rovnici pro všechna $c \in \mathbb{R}^+$. Tím je úloha vyřešena.

Cauchyva metoda

Cauchyova metoda slouží k odvození tvaru řešení pro racionální čísla, často se dá z dalších podmínek rozšířit na všechna reálná. Poslouží nám úvodní příklad.

Příklad 5. Najděte všechny funkce $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ splňující pro všechna x, $y \in \mathbb{Q}$ rovnici

$$f(x+y) = f(x) + f(y).$$

Řešení. Předpokládejme, že máme nějaké řešení f této rovnice. Dosazením $[0, 0]$ dospějeme k $f(0) = 0$. Dosazením postupně $[x, x]$, $[2x, x]$, ... , $[(n-1)x, x]$ dostáváme pro $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} f(2x) &= f(x+x) = f(x) + f(x) = 2f(x) \\ f(3x) &= f(2x+x) = f(2x) + f(x) = 3f(x) \\ &\vdots \\ f(nx) &= f((n-1)x + x) = f((n-1)x) + f(x) = nf(x). \end{aligned} \tag{3}$$

Zapamatujme si důležitý vztah $f(nx) = nf(x)$. Upravujme podle něj hodnotu $f(n)$ dvěma způsoby:

$$\begin{aligned} f(n) &= nf(1) \\ f(n) &= f\Big(m \cdot \frac{n}{m}\Big) = mf\left(\frac{n}{m}\right), \ m, n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Složením těchto rovností dostáváme

$$f\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{m}{n} f(1), \text{ čili } f(x) = xf(1) \text{ pro } x \in \mathbb{Q}^+.$$

Dosazení $[0, 0]$ do zadání dá $f(0) = 0$ a dosazení $[x, -x]$ poskytne vztah pro $\mathbb{Q}^-$: $f(-x) = -f(x)$. Označme $f(1) = c$. Vzorec pro naši funkci je tedy $f(x) = cx$ a zkouška ukáže, že je skutečně pro $x \in \mathbb{Q}$ a $c \in \mathbb{R}$ vyhovujícím řešením.

K řešení pomocí Cauchyovy metody často pomáhá, že je funkce monotonní nebo spojitá. Pomůže nám následující věta.

Věta 6. *Nechť spojitá funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňuje pro všechna $x \in \mathbb{Q}$ předpis $f(x) = g(x)$, kde $g(x)$ je konkrétní spojitá funkce $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Pak platí $f(x) = g(x)$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$.*

Příklad 7. Najděte všechny spojité funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vyhovující rovnici

$$f(x+y) = f(x)f(y).$$

Řešení. Předpokládejme, že máme nějaké řešení f této rovnice. Jeli pro nějaké t reálné $f(t) = 0$, pak volbou $[x-t, t]$ dostáváme $f(x) = f(x-t+t) = f(x-t)f(t) = 0$ pro každé $x \in \mathbb{R}$. Dále se tedy budeme zajímat jen o nenulová řešení. Předně pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí $f(x) = f(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}) = f(\frac{x}{2})f(\frac{x}{2}) = \left(f(\frac{x}{2})\right)^2 > 0$. Funkce $f(x)$ nabývá tedy všude kladných hodnot. Indukcí jako v předchozím příkladě ukážeme $f(nx) = f(x)f((n-1)x) = \cdots = \left(f(x)\right)^n = f^n(x)$ pro $n \in \mathbb{N}$ a $x \in \mathbb{R}$. Tento vztah opět dvakrát užijeme v úpravě výrazu $f(nx)$:

$$\begin{aligned} f(nx) &= f^n(x) \\ f(nx) &= f\Big(m \cdot \frac{n}{m}x\Big) = f^m\left(\frac{n}{m}x\right) \qquad n, m \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Porovnáním pravých stran rovností získáme klíčový vzorec $f(\frac{n}{m}x) = f^{\frac{n}{m}}(x)$. Dosazením $x = 1$ obdržíme pro kladná racionální čísla q vztah $f(q) = f^q(1)$. Dvojice $[0,0]$ zasazená do zadání poskytne $f(0) = f^2(0) > 0$, čili $f(0) = 1$, a dvojice $[x, -x]$ dá $1 = f(0) = f(x-x) = f(x)f(-x)$. Proto $f(-q) = \frac{1}{f(q)} = \frac{1}{f^q(1)} = f^{-q}(1)$ pro $q \in \mathbb{Q}^+$. Při označení $f(1) = c \in \mathbb{R}^+$ jsme tímto ukázali vzorec $f(x) = c^x$ pro všechna $x \in \mathbb{Q}$. Definujeme-li nyní funkci $g(x) = c^x$ pro $x \in \mathbb{R}$, pak je $f(x) = g(x)$ pro všechna racionální čísla x a za předpokladu spojitosti dostáváme podle věty 6., že $f(x) = c^x$ i pro všechna x reálná. Dosazením do zadání se snadno ověří, že $f(x) = c^x$ je skutečně řešením dané rovnice pro všechna $c > 0$.

Užitečné hodnoty k dosazení

Nenechte se vázat tím, že x, y jsou reálné proměnné. Za tyto proměnné můžete dosazovat prakticky cokoli, co dá ve *výsledku* reálné číslo. Tedy například dosazení $x = t^2$ je korektní, protože pro t reálné je t^2 také reálné číslo. I dosazení $x = \sqrt{t}$ je korektní – za podmínky $t \geq 0$.

Příklad 8. Najděte všechny $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, které vyhovují rovnici

$$f(x - y^2) = f(x) - y^2.$$

Řešení. Řešení rozdělíme případy $x \geq 0$ a $x < 0$.

Případ $x \geq 0$: Dosazení $y = \sqrt{x}$ dá $f(x - (\sqrt{x})^2) = f(x) - (\sqrt{x})^2$, po úpravě $f(x) = x + f(0)$.

Případ $x < 0$: Dosazením dvojice $[0, \sqrt{-x}]$ dostaneme

$$\begin{aligned} f(-(\sqrt{-x})^2) &= f(0) - (\sqrt{-x})^2 \\ f(-(-x)) &= f(0) - (-x) \\ f(x) &= f(0) + x. \end{aligned}$$

Pro oba případy $x \geq 0$ i $x < 0$ jsme obdrželi stejný vzorec $f(x) = f(0) + x$, proto tento vzorec platí pro všechna $x \in \mathbb{R}$. Zkouška ukáže, že řešení vyhovují všechny hodnoty $f(0) \in \mathbb{R}$.

Množství speciálních výrazů, které jde dosadit, je však mnohem širší, než se zdá. Pro konkrétní $t \in \mathbb{R}$ je i hodnota $f(t) \in \mathbb{R}$, proto je dosazení $x = f(t)$ v pořádku.

Příklad 9. Najděte všechny funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující

$$f(y - f(x)) = f(y) - f(f(x)) + f(x) - x$$

Řešení. Dosadíme $y = f(x)$:

$$f(f(x) - f(x)) = f(f(x)) - f(f(x)) + f(x) - x,$$

po úpravě $f(x) = x + f(0)$. Zkouškou se ověří, že všechna řešení jsou skutečně ve tvaru $f(x) = x + c$, $c \in \mathbb{R}$.

Vlastnosti funkcí

K řešení často pomáhají známé vlastnosti funkcí, ty užitečné uvádíme zde. Funkce může být

(a) *sudá,* resp. *lichá*: platí $f(x) = f(-x)$, resp. $f(x) = -f(-x)$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$

(b) *rostoucí,* resp. *klesající*: pro libovolná $x < y$ je $f(x) < f(y)$, resp. $f(x) > f(y)$

(c) *nezáporná* (nebo *kladná*): $f(x) \geq 0$ (nebo $f(x) > 0$)

(d) *prostá*: funkce nenabývá žádné hodnoty víckrát než jednou ($x \neq y \Leftrightarrow f(x) \neq f(y)$)

(e) *na*: funkce nabývá všech hodnot aspoň jednou

(f) *bijekce*: funkce nabývá všech hodnot právě jednou (každému x z definičního oboru náleží právě jedno $f(x)$ z oboru hodnot)

(g) *spojitá*: zjednodušeně řečeno jde její graf nakreslit jedním tahem

Nakonec jedna netradiční metoda

Ne všechny úlohy se dají řešit postupným dosazováním vhodných hodnot a vyvozováním tvaru funkce, někdy musíme řešení uhodnout a následující příklad ukazuje, že vyhovující funkce nemusí vůbec vypadat obvykle.

Příklad 10. Najděte nelineární zobrazení[3] $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, které se nezmění, pokud ho libovolněkrát složíme, tedy pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí

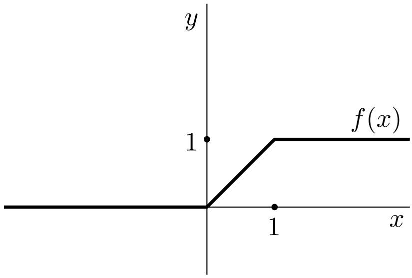
$$\underbrace{f(f(\ldots f(x)\ldots))}_{n\ krát} = f(x).$$

Řešení. Jedním z řešení je funkce

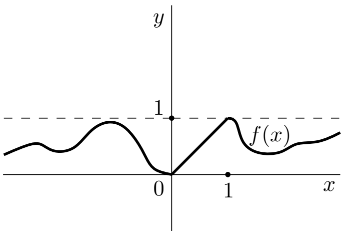
$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \leq 0, \\ x & \text{pro } x \in (0,1), \\ 1 & \text{pro } x \geq 1. \end{cases}$$

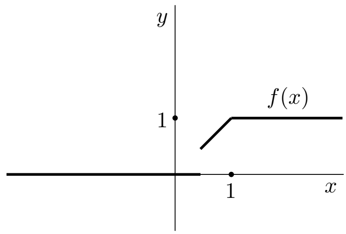
Graf vypadá následovně:

[3]zobrazení, pro které neplatí $f(x) = ax + b$, pro nějaká a, $b \in \mathbb{R}$



Je vidět, že $f(x) \in \langle 0,1\rangle$ pro $x \in \mathbb{R}$. Dále z $f(x) = x$ pro $x \in \langle 0,1\rangle$ plyne $f(f(x)) = f(x)$ a indukcí obržíme platnost vztahu ze zadání. Tím ale výčet vyhovujících funkcí rozhodně nekončí, na následujících obrázcích jsou grafy dvou dalších. Zkuste si rozmyslet, proč vyhovují.





Další zdroje

Pokud byste se chtěli dozvědět víc, hledejte na našich stránkách v sekci *knihovna* nebo v publikaci z edice školy mladých matematiků: *Davidov L.; Funkcionální rovnice; Mladá fronta; Praha 1984.*

7. series

Topic: Functional equations

Date due: April 14, 2008

PROBLEM 0 (1 POINT)
Decide which function has most functions.

PROBLEM 1 (3 POINTS)
Find all functions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfying for all pairs of real numbers x, y

$$f(x+y) - f(x-y) = xy.$$

PROBLEM 2 (3 POINTS)
Let $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ be one-to-one function, satisfying for every $x \in \mathbb{R}$ the equation $f^2(x) = f^2(-x)$. Show that f is odd function.

PROBLEM 3 (3 POINTS)

Find all functions $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ such that for every real x

$$x^3 f^3(x) + 1 = xf(x)(1 + xf(x)).$$

PROBLEM 4 (5 POINTS)

Is there any other solution to $f(f(x)) = 0$ than $f(x) = 0$? Explain.

PROBLEM 5 (5 POINTS)

Find a function $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ which for every real x satisfies

$$f(x) + xf(-x) = (1 - x) \sin x$$

and show that there are no more solutions.

PROBLEM 6 (5 POINTS)

Find all functions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfying for every pair of real numbers x and y

$$f(x^2 + y) + f(f(x) - y) = 2f(f(x)) + 2y^2.$$

PROBLEM 7 (5 POINTS)

Decide if there is a function $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ which for every natural number $n > 1$ satisfies

$$f(n) = f(f(n - 1)) + f(f(n + 1)).$$

PROBLEM 8 (5 POINTS)

Find all monotonic functions $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ satisfying for all x, y the functional equation

$$f(xy) \cdot f\left(\frac{f(y)}{x}\right) = 1.$$

Serie N. 7

Thema: Funktionalgleichungen

Datum des Poststempels: 14. April, 2008

Aufgabe n. 0 (1 punkt)
Welche Funktion hat die meisten Funktionen?

Aufgabe n. 1 (3 punkte)
Finde alle Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, so dass für jedes Paar reeller Zahlen x, y gilt

$$f(x+y) - f(x-y) = xy.$$

Aufgabe n. 2 (3 punkte)
Man weiß, dass die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ injektiv ist und dass für jedes $x \in \mathbb{R}$ zugleich gilt: $f^2(x) = f^2(-x)$. Zeige, dass die Funktion f ungerade ist.

Aufgabe n. 3 (3 punkte)
Finde alle Funktionen $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, so dass für jedes reelle x gilt:

$$x^3 f^3(x) + 1 = xf(x)(1 + xf(x)).$$

Aufgabe n. 4 (5 punkte)
Entscheide, ob die Funktionalgleichung $f(f(x)) = 0$ eine andere Lösung hat, als $f(x) = 0$. Begründe deine Antwort.

Aufgabe n. 5 (5 punkte)
Finde eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die für jedes reelle x erfüllt:

$$f(x) + xf(-x) = (1-x)\sin x.$$

Zeige, dass keine andere vorhanden ist.

Aufgabe n. 6 (5 punkte)
Finde alle Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, so dass für alle Paare reeller Zahlen x, y gilt:

$$f(x^2 + y) + f(f(x) - y) = 2f(f(x)) + 2y^2.$$

Aufgabe n. 7 (5 punkte)
Entscheide, ob so eine Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ existiert, die für alle natürlichen Zahlen $n > 1$ erfüllt:

$$f(n) = f(f(n-1)) + f(f(n+1)).$$

Aufgabe n. 8 (5 punkte)
Finde alle monotonen Funktionen $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, die für alle x, y die folgende Funktionalgleichung erfüllen:

$$f(xy) \cdot f\left(\frac{f(y)}{x}\right) = 1.$$

La série 7

Sujet: Equations fonctionnelles

Date d'expedition: LE 14 AVRIL 2008

PROBLÈME 0 (1 POINT)
Quelle fonction a le plus des fonctions?

PROBLÈME 1 (3 POINTS)
Déterminez l'ensemble de toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tel que pour tout x et y réel

$$f(x+y) - f(x-y) = xy.$$

PROBLÈME 2 (3 POINTS)
On sait que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est injective et $f^2(x) = f^2(-x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Démontrez que f est impaire.

PROBLÈME 3 (3 POINTS)
Trouvez toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ telles que pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$x^3 f^3(x) + 1 = xf(x)(1 + xf(x)).$$

PROBLÈME 4 (5 POINTS)
Décidez si l'equation fonctionnelle $f(f(x)) = 0$ a une autre solution que $f(x) = 0$. Justifiez votre réponse.

PROBLÈME 5 (5 POINTS)
Trouvez une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui satisfait

$$f(x) + xf(-x) = (1-x)\sin x$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$ et démontrez qu'aucune d'autre n'existe pas.

PROBLÈME 6 (5 POINTS)
Déterminez l'ensemble de toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tel que pour tout x et y réel

$$f(x^2 + y) + f(f(x) - y) = 2f(f(x)) + 2y^2.$$

PROBLÈME 7 (5 POINTS)
Décidez s'il existe une fonction $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ qui satisfait

$$f(n) = f(f(n-1)) + f(f(n+1))$$

pour tout n naturel, $n > 1$.

PROBLÈME 8 (5 POINTS)
Trouvez toutes les fonctions monotones $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ qui satisfont l'equation fonctionnelle

$$f(xy) \cdot f\left(\frac{f(y)}{x}\right) = 1$$

pour tout x, y.

Řešení 7. série

0. úloha

Která funkce má nejvíce funkcí?

Tentokráte řešení nulté úlohy přišlo dost pomálu (přesněji čtyři), tak jsem se rozhodl otisknout všechna. Jako první vám představím docela racionální přístup *Miroslava „Myrega" Klimoše* (samozřejmě v původním jazyce):

First of all we have to realize which function od functions is most important. From my point of view, the main functions is to solve functional equalities. Other functions of functions are immaterial, so we'll ignore them.

Althought difficulty of funcitonal equalities differs a lot, every functional equality is interesting and it's worth of attention. So we can't prioritize any functional equalities, and therefore, the function which has most functions is simply the function which is solution of the most functional equalities.

Unfortunately, there are infinetely many functional equalities, and therefore, we have to focus on some representing sample. I mean that this 7^{th} series is quite a good sample. Solutions of given equalities are $f(x) = \frac{x^2}{4} + c$ (1), $f(x) = \frac{1}{x}$ (3), $f(x) = \sin x$ (5), $f(x) = x^2$ (6) and $f(x) = 1, f(x) = \frac{1}{x}$ (8). Now it's clear that the function which solves most functional equalities is $f(x) = \frac{1}{x}$.

The function with the most functions is

$$f(x) = \frac{1}{x}.$$

Karel Kolář měl k celé problematice trošku fysikální přístup:

I think, that the most functions and the most useful function is $f : y = ae^{\frac{-x}{b}} + c$ (where a, b and c are some constant and e is Euler's number[4]). It has practicaly neverending use in physics and I think, that every single part of physics is somehow bounded with this equation.

Další rešitelka nám poslala německou básničku (já sám bohužel německy neumím, ale snad pobaví aspoň některé z našich řešitelů). Následuje tedy řešení *Hany Šustkové*.

Habe es gesucht
Du gültige Gesetze rein funkzional Luft
Du e'maligen Hauptmann warst durch verschwommens Meer
Du gleichzeitiges Otschan bleib was deine Funktion wär

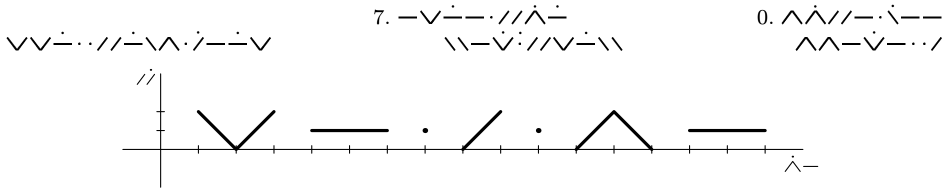
Habe ihm gesucht, mein Funktion, bin immer schwach
Und du in deinem Sprengel hast
Dein Fachgebiet mit leicht und last

beschwest mist

unter einem Dach

[4] $e = 2{,}718281828459045070\ldots$ je tzv. Eulerova konstanta, nebo též základ přirozeného logaritmu. Pokud víš něco o limitách, tak věz, že $e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Pozn. redaktora.

Poslední řešení – od *Jiřího Hadravy* – je velmi pečlivě zašifrováno (schválně, jestli ho dokážete rozšifrovat:P):



1. úloha
Nalezněte všechny funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takové, že pro každou dvojici reálných čísel x, y platí

$$f(x+y) - f(x-y) = xy.$$

Funkcionálna rovnica má platiť pre všetky dvojice x, y z $\mathbb{R}$, a teda aj pre dvojicu $x = y = \frac{a}{2}$.

$$\begin{aligned} f\left(\frac{a}{2}+\frac{a}{2}\right) - f\left(\frac{a}{2}-\frac{a}{2}\right) &= \left(\frac{a}{2}\right)^2 \\ f(a) - f(0) &= \left(\frac{a}{2}\right)^2 \\ f(a) &= \frac{a^2}{4} + f(0) \end{aligned}$$

Výraz $f(0)$ je konštanta, preto ak rovnica má nejaké riešenia, musia byť tvaru

$$f(a) = \frac{a^2}{4} + c.$$

Musíme ešte overiť, či všetky takéto funkcie zadaniu naozaj vyhovujú.

$$\begin{aligned} L &= f(x+y) - f(x-y) = \frac{(x+y)^2}{4} + c - \frac{(x-y)^2}{4} - c = \\ &= \frac{x^2 + 2xy + y^2 + 4c - x^2 + 2xy - y^2 - 4c}{4} = xy \\ P &= xy \\ L &= P \end{aligned}$$

Riešením funkcionálnej rovnice sú všetky funkcie tvaru $f(x) = \frac{x^2}{4} + c$, kde c je z $\mathbb{R}$.

2. úloha
O funkci $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ víme, že je prostá, a zároveň pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí $f^2(x) = f^2(-x)$. Ukažte, že f je lichá.

U této úlohy mohlo dojít u anglické verze k dvěma různým překladům zadání, které se dost značně lišily[5]. Výraz *one-to-one* lze totiž přeložit jako bijekci nebo jako prostou funkci. Protože

[5] Pro jedno byl výrok platný, pro druhý nikoli.

nešlo z většiny řešení poznat, jak si řešitel výraz přeložil, řešení obou verzí byla uznána. Řešení uvádíme pro oba výklady zadání.

Bijekce:
Po odmocnění obou stran rovnice dostáváme rovnici:

$$f^2(x) = f^2(-x)$$
$$|f(x)| = |f(-x)|.$$

Snadno tedy z diskuze pro každou hodnotu x musí platit jeden ze vztahů:

$$f(x) = f(-x)$$
$$f(x) = -f(-x)$$

Pro první možnost dostáváme pro každé takové x funkční hodnotu $f(x)$, která se ovšem rovná funkční hodnotě $f(-x)$ a rozhodně nemůže být součástí prosté funkce. Jediná hodnota, pro kterou je tedy tento vztah myslitelný je $x = 0$. Druhá z možností je obecný tvar liché funkce. Pokud tedy existuje funkce splňující podmínky zadání, musí být nutně lichá ve všech bodech kromě nuly.

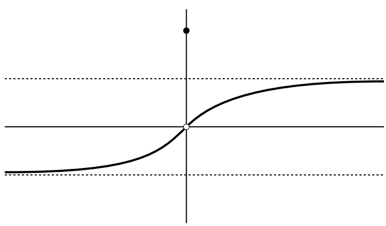
Pro určení funkční hodnoty v nule budeme pro spor předpokládat, že $f(0)$ není rovno 0. Dále budeme předpokládat, že neexistuje žádné x, pro které platí $f(x) = f(0)$. Pak ale také nemůže existovat žádné x s funkční hodnotou $f(x) = -f(0)$, což je spor s tím, že funkce je na. Pokud by existovalo x se stejnou funkční hodnotou jako nula, pak dostáváme okamžitě spor s prostotou. Proto musí platit

$$f(0) = 0.$$

Hledaná funkce je tedy nutně lichá.

Prostá funkce:
Pro tento případ výrok neplatí, to lze nejlépe dokázat předložením vhodného protipříkladu. Obecně stačí jakákoli omezená funkce, která je lichá všude kromě nuly. V nule pak nabývá hodnoty větší nebo menší než na zbytku definičního oboru. Tím dostáváme prostou funkci[6]. Jako hezký příklad uvedu řešení *Pepy Tkadlece*:

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg} x & \text{pro } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ 42 & \text{pro } x = 0 \end{cases}$$



[6] Která však není na, proto nelze použít v prvním případě.

3. úloha

Najděte všechny funkce $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ takové, že pro každé reálné x platí

$$x^3 f^3(x) + 1 = xf(x)(1 + xf(x)).$$

Původní rovnici budeme jednoduše ekvivalentně upravovat:

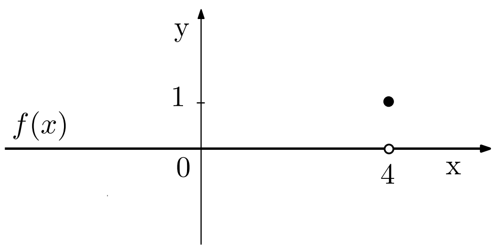
$$(xf(x))^3 - (xf(x))^2 - (xf(x)) + 1 = 0$$
$$\Big((xf(x)) - 1\Big)\Big((xf(x))^2 - 1\Big) = \Big(xf(x) - 1\Big)^2\Big(xf(x) + 1\Big) = 0$$

Dostali jsme rovnost, ze které snadno vidíme, že $xf(x) = 1$ nebo $xf(x) = -1$. Ovšem musíme tuto rovnost chápat správně. Takováto informace znamená, že pro každé x z definičního oboru funkce f nastává jedna z těchto rovností. Takže klidně může platit rovnost $xf(x) = 1$ pro nějakou část definičního oboru a $xf(x) = -1$ pro zbylou část. Zde nás ovšem právě definiční obor a obor hodnot zachrání, protože dle zadání je $x \in \mathbb{R}^+$, $f(x) \in \mathbb{R}^+$, a je tedy $f(x) = \frac{1}{x}$ pro celý definiční obor. Po dosazení tohoto jediného kandidáta do zadání vidíme, že $f(x) = \frac{1}{x}$ je skutečně řešením.

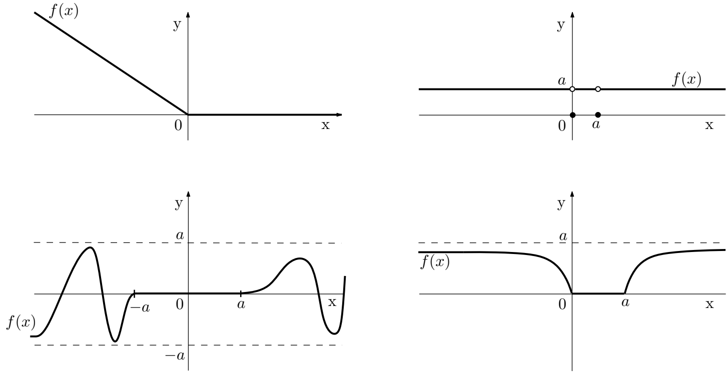
4. úloha

Rozhodněte, zda funkcionální rovnice $f(f(x)) = 0$ má jiné řešení než $f(x) = 0$. Svoji odpověď zdůvodněte.

Ano, existují i jiná řešení než $f(x) = 0$. Klíč k úspěchu byl v grafické představě. Stačilo nějakou vyhovující funkci nalézt a stručně popsat, proč vyhovuje. Jak ji tedy nalézt? Představme si graf funkce $f(x) = 0$. Hledáme ale nějaké jiné řešení než toto, proto se ji pokusíme pozměnit. Co se stane, budu-li chtít posunout jeden z bodů grafu ve směru osy y? Pro představu, posuňme bod $[4; 0]$ na pozici $[4; 1] \Rightarrow f(4) = 1$. Zkusíme-li tento bod dosadit, získáme $f(f(4)) = f(1) = 0$, což jsme potřebovali.



Máme tedy funkci, která splňuje $f(f(x)) = 0$ a zároveň $f(x) \neq 0$. To, že není spojitá, naší úloze rozhodně nevadí. Ale pokud by se vám toto řešení přece jen nelíbilo, dávám na ukázku několik dalších, hezčích. Popřemýšlejte o nich. Předpis první z funkcí lze i pěkně zapsat, a to $f(x) = |x - |x||$.



5. úloha
Nalezněte funkci $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, která pro každé reálné x splňuje

$$f(x) + xf(-x) = (1 - x)\sin x$$

a ukažte, že jiná neexistuje.

Snadno dokážeme, že řešením zadané funkcionální rovnice je $f(x) = \sin x$, prostě dosadíme do zadání a využijeme toho, že $\sin x$ je lichá funkce, tedy $\sin x = -\sin(-x)$. Dostaneme

$$\sin x + x \sin -x = \sin x - x\sin x = (1 - x)\sin x.$$

Těžiště úlohy však bylo dokázat, že $\sin x$ je jediným řešením. Ukážeme si hned tři různé způsoby, jak to šlo udělat.

Řešení první
Nejprve do zadání dosadíme $x = 0$ a dostaneme $f(0) = 0$. Pokud $x \neq 0$, dosadíme do zadání $-x$ a vynásobíme celou rovnici x, dostáváme

$$xf(-x) - x^2 f(x) = -x(1 + x)\sin x.$$

Získanou rovnici odečteme od zadané, některé členy se nám vykrátí a po úpravách dostáváme

$$(1 + x^2)f(x) = (1 + x^2)\sin x.$$

Protože výraz $1 + x^2$ je kladný pro libovolné reálné x, musí $f(x)$ být $\sin x$. Tím jsme dokázali jednoznačnost řešení.

Řešení druhé přes lichost $f(x)$
Zkusme si dokázat, že funkce $f(x)$ musí být lichá. Podobně jako výše dosadíme do zadání $-x$ a dostaneme

$$f(-x) - xf(x) = -(1 + x)\sin x.$$

Tyto dvě rovnice od sebe odečteme a sečteme, tedy dostaneme dvě další rovnice.

$$(f(x)+f(-x)) - x\overline{(f(x)-f(-x))} = -2x\sin x \tag{$\oplus$}$$
$$\underline{(f(x)-f(-x))} + x(f(x)+f(-x)) = 2\sin x. \tag{$\ominus$}$$

Všimněte si, že označené části jsou stejné. Můžeme tedy z druhé rovnice ($\ominus$) vyjádřit $(f(x) - f(-x))$ a dosadit do první ($\oplus$). Dostaneme další rovnici

$$\begin{aligned}
(f(x)+f(-x)) - x\Big(2\sin x - x(f(x)+f(-x))\Big) &= -2x\sin x\\
(x^2+1)f(x) &= -(x^2+1)f(-x)\\
f(x) &= -f(-x),
\end{aligned}$$

tedy funkce $f(x)$ je lichá.

Získaný poznatek použijeme přímo na rovnici ze zadání, dostáváme

$$\begin{aligned}
f(x) + xf(-x) &= (1-x)\sin x\\
(1-x)f(x) &= (1-x)\sin x.
\end{aligned}$$

Z toho dostáváme pro $x \neq 1$ hodnotu $f(x) = \sin x$. Hodnota $f(1)$ je také určena jednoznačně. Funkce $f(x)$ je totiž lichá, tedy platí

$$f(1) = -f(-1) = -\sin(-1) = \sin 1.$$

Zadané rovnici tedy opět vyhovuje jediná funkce $f(x) = \sin x$.

Řešení třetí podle Myrega Klimoše

Pro spor předpokládejme, že existuje ještě jiné řešení $f(x)$. Takové řešení se liší alespoň v jednom nenulovém bodě a, kde $f(a) \neq \sin a$. Platí $f(a) = \sin a + b$, kde b je nenulové reálné číslo. Dosaďme do zadání za x nejprve a a vyjádřeme $f(-a)$.

$$\begin{aligned}
f(a) + af(-a) &= (1-a)\sin a\\
f(-a) &= -\sin a - \frac{b}{a}.
\end{aligned}$$

Podobně dosadíme do zadání $-a$ za x.

$$\begin{aligned}
f(-a) - af(a) &= -(1+a)\sin a\\
f(-a) &= ab - \sin a.
\end{aligned}$$

Dostali jsme tedy dva vztahy s $f(-a)$, mezi kterými musí platit rovnost. Tedy

$$\begin{aligned}
-\sin a - \frac{b}{a} &= ab - \sin a\\
0 &= b\left(a + \frac{1}{a}\right),
\end{aligned}$$

protože $(a + \frac{1}{a}) \neq 0$, musí být $b = 0$, což je však ve sporu s předpokladem. Tedy řešení je určeno jednoznačně, $f(x) = \sin x$.

6. úloha
Najděte všechny funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takové, že pro všechny dvojice reálných čísel x a y platí

$$f(x^2 + y) + f(f(x) - y) = 2f(f(x)) + 2y^2.$$

První řešení:
Funkcionální rovnice platí pro všechny dvojice $[x, y]$, proto platí i konkrétnější dosazení $[x, 0]$ a $[x, f(x) - x^2]$.

$$\begin{aligned} f(x^2) + f(f(x)) &= 2f(f(x)) \\ f(f(x)) + f(x^2) &= 2f(f(x)) + \left(f(x) - x^2\right)^2 \end{aligned}$$

Odečtením těchto rovnic obdržíme

$$0 = (f(x) - x^2)^2, \text{ což implikuje vztah } \ f(x) = x^2.$$

Pokud nějaká funkce řeší naši rovnici, pak je to funkce $f(x) = x^2$, proveďme zkoušku.

$$\begin{aligned} &L = f(x^2 + y) + f(f(x) - y) = (x^2 + y)^2 + (x^2 - y)^2 = 2x^4 + 2y^2 \\ &P = 2f(f(x)) + 2y^2 = 2x^4 + 2y^2 \\ &L = P \end{aligned}$$

Jediným řešením je tedy $f(x) = x^2$.

Druhé řešení podle Myrega Klimoše:
Nejprve získáme dosazením $[x, 0]$ jednoduchý vztah

$$f(x^2) = f(f(x)). \tag{1}$$

Nyní předpokládejme, že pro nějaká a, b platí vztah $f(a) = f(b)$. S použitím rovnice ze zadání vychází

$$\underline{f(a^2 + y)} = 2f(f(a)) + 2y^2 - f(f(a) - y) = 2f(f(b)) + 2y^2 - f(f(b) - y) = \underline{f(b^2 + y)}.$$

Získaný vztah $f(a^2 + y) = f(b^2 + y)$ platí pro všechna $y \in \mathbb{R}$, proto je f periodická s periodou $p = a^2 - b^2$. Dosaďme $y = p$ do rovnice ze zadání a použijme periodičnost $f(x) = f(x + p)$:

$$\begin{aligned} f(x^2 + p) + f(f(x) - p) &= 2f(f(x)) + 2p^2 \\ f(x^2) + f(f(x)) &= 2f(f(x)) + 2p^2 \\ f(x^2) &= f(f(x)) + 2p^2 \end{aligned}$$

Porovnáním s (1) obdržíme $2p^2 = 0$, z čehož snadno dostaneme $a = b$ nebo $a = -b$. Celkově jsme obdrželi implikaci „pokud $f(a) = f(b)$, pak $a = b$ nebo $a = -b$.“ Použitím na vztah (1) splňují funkční hodnoty buď $f(x) = x^2$ nebo $f(x) = -x^2$. Zřejmě $f(0) = 0$.

Je potřeba dokázat, že $f(x) = x^2$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$. Předpokládejme tedy pro spor, že existuje $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ takové, že $f(t) = -t^2$. Potom volba $[0, t]$ v rovnici ze zadání ukáže:

$$\begin{aligned} f(0^2 + t) + f(f(0) - t) &= 2f(f(0)) + 2t^2 \\ f(t) + f(-t) &= 2t^2 \\ f(-t) &= 3t^2 \end{aligned}$$

A to je spor, protože máme pouze možnosti $f(-t) = t^2$ a $f(-t) = -t^2$. Pokud tedy nějaká funkce vyhovuje zadání, pak splňuje $f(x) = x^2$. Zkouškou se snadno, stejně jako v předchozím způsobu řešení, přesvědčíme, že nalezené řešení vyhovuje.

Třetí řešení:
Zkusme dosadit $[x, f(x)]$ a $[x, -x^2]$.

$$\begin{aligned} f(x^2 + f(x)) + f(0) &= 2f(f(x)) + 2f(x^2) \\ f(0) + f(f(x) + x^2) &= 2f(f(x)) + 2x^4 \end{aligned}$$

Odečtením dostáváme

$$2f^2(x) = 2x^4, \text{ neboli } f(x) = \pm x^2.$$

Funkce vyhovující podmínce $f(x) = \pm x^2$ jsou všechny funkce vzniklé nějakou kombinací funkcí $f_1(x) = x^2$ a $f_2(x) = -x^2$. Stejně jako v řešení podle *Myrega Klimoše* bychom ukázali, že jediné vyhovující řešení je $f(x) = x^2$.

7. úloha
Rozhodněte, zda existuje funkce $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, která pro všechna přirozená $n > 1$ splňuje

$$f(n) = f(f(n-1)) + f(f(n+1)).$$

Zo zadania dostávame pre všetky $n > 1$ nerovnosť $f(n) \geq 2$, pretože na pravej strane rovnosti máme dve prirodzené čísla. V ďalšom kroku použijeme matematickú indukciu cez k, pomocou ktorej dokážeme, že pre každé prirodzené $n > 1$ rastie jeho funkčná hodnota do nekonečna, čo bude spor s predpokladom, že vyhovujúca funkcia f existuje (a má konečné hodnoty). Ukážeme, že $f(n)$ je väčšie ako hociktoré prirodzené číslo. Prvý indukčný krok pre $k = 2$ už máme ($f(n) \geq$ ≥ 2), nasleduje druhý indukčný krok.

Predpokladajme, že platí $f(n) \geq k$ pre všetky $n > 1$ a pre nejaké $k > 1$ prirodzené. Potom aj $f(n+1) \geq k > 1$ a podľa predpokladu $f(f(n+1)) \geq k$. Potom podľa vyššie uvedenej rovnosti platí:

$$f(n) = f(f(n-1)) + f(f(n+1)) \geq f(f(n-1)) + k \geq k + 1.$$

Opäť sme použili skutočnosť, že funkčné hodnoty sú prirodzené čísla, a teda $f(f(n-1)) \geq 1$. Dokázali sme, že pre všetky $n > 1$ a ľubovoľné k prirodzené platí $f(n) \geq k$, a to znamená, že taká funkcia neexistuje, pretože inak by musela posielať hodnoty mimo svoj obor hodnôt.

8. úloha
Nalezněte všechny monotónní funkce $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ splňující pro všechna x, y funkcionální rovnici

$$f(xy) \cdot f\left(\frac{f(y)}{x}\right) = 1.$$

Idea důkazu je následující. Nejprve si spočítáme hodnotu $f(1) = 1$. Poté využijeme monotonii a rozdělíme si úlohu na dvě možnosti:

(a) Není-li f ryze monotónní v 1 (tj. $\exists t \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\} : f(t) = 1$), pak po několika provedených myšlenkách získáme jediné možné řešení $f(t) = 1$.

(b) Je-li f ryze monotónní v 1 (tj. $\forall t \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\} : f(t) \neq 1$), pak dokážeme, že jediná funkce splňující zadání je $f(t) = \frac{1}{t}$.

Teď již přejdeme k samotnému řešení příkladu. Nejprve provedeme několik dosazení a zjistíme funkční hodnotu $f(1)$:

$$[1, z]: \quad f(z)f(f(z)) = 1, \quad \forall z \in \mathbb{R}^+ \tag{1}$$

$$[f(f(z)), f(z)]: \quad f(f(f(z))f(z))f(1) = 1, \quad \forall z \in \mathbb{R}^+ \tag{2}$$

Dosadíme-li (1) do (2) dostaneme:

$$f(1)f(1) = 1 \Rightarrow f(1) = 1,$$

přičemž hodnotu $f(1) = -1$ nemusíme díky definičnímu oboru $\mathbb{R}^+$ do možných hodnot $f(1)$ zahrnovat.

Uvažujme nyní možnost (a), tedy $\exists t \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\} : f(t) = 1$. Provedeme-li dosazení jednak této hodnoty t a druhak hodnoty 1 za proměnnou y, dostaneme:

$$[z, t] : 1 = f(zt)f\left(\frac{f(t)}{z}\right) = f(zt)f\left(\frac{1}{z}\right) \quad \forall z \in \mathbb{R}^+$$

$$[z, 1] : 1 = f(z)f\left(\frac{f(1)}{z}\right) = f(z)f\left(\frac{1}{z}\right) \quad \forall z \in \mathbb{R}^+$$

Porovnáním těchto dvou výsledků dostaneme:

$$f(z) = f(zt) \quad \forall z \in \mathbb{R}^+. \tag{3}$$

A nakonec postupným dosazením hodnot $z = 1, t, t^2, t^3, \ldots$ a $z = 1, \frac{1}{t}, \frac{1}{t^2}, \frac{1}{t^3}, \ldots$ do (3) dostaneme:

$$1 = f(1) = f(t) = f(t^2) = f(t^3) = \ldots$$

$$1 = f(1) = f\left(\frac{1}{t}\right) = f\left(\frac{1}{t^2}\right) = f\left(\frac{1}{t^3}\right) = \ldots$$

Snadno se nahlédne, že funkce $f(x) = 1$ rovnici řeší. Neexistenci dalších funkcí dokážeme sporem. Má-li tuto rovnici řešit i jiná funkce, musí existovat bod $a \neq 1$, jehož funkční hodnota není 1. Pak ovšem pro takové a jsme schopni nalézt $m \in \mathbb{N}$ takové, že $a \in [\frac{1}{t^m}, t^m]$,[7] protože $t \neq 1$. Avšak funkce f je monotónní a nabývá v bodech t^m a $\frac{1}{t^m}$ hodnoty 1, tudíž potom i $f(a) = 1$. A to je ve sporu s volbou hodnoty a. Tudíž dostáváme jedinou funkci, která splňuje zvolené podmínky na celém definičním oboru, a tou je $f(z) = 1$.

Nyní dle (b) hledejme jen funkce ryze monotónní. Dosaďme do rovnice ze zadání substituci $x = z, y = f(z)$:

$$[z, f(z)]: \quad 1 = f(zf(z))f(1) = f(zf(z)), \quad \forall z \in \mathbb{R}^+.$$

současně již víme, že $f(x) = 1$ pouze pro $x = 1$ (díky ryzí monotonii), tudíž je nutně $zf(z) = 1$. Ještě snadno díky definičnímu oboru $\mathbb{R}^+$ upravíme na tvar $f(z) = \frac{1}{z}$, což je tudíž i jediné řešení.

Úloha má tedy dvě řešení, které se nechají na celém definičním oboru zapsat ve tvaru:

$$f(z) = 1 \text{ a } f(z) = \frac{1}{z}.$$

---

[7] Resp. $a \in [t^m, \frac{1}{t^m}]$ v případě, že $t < 1$.