8. série

Téma: Finální myšmaš

Datum odeslání: 12. května

1. úloha

(a) Vyřešte následující rovnici, v níž x je reálné číslo.

$$\sqrt{x}+\sqrt{2x+1}+\sqrt{3x+4}+\sqrt{4x+9}=14$$ (2 body)

(b) Mějme kladná reálná čísla x, y, z, pro něž platí následující rovnosti

$$z^2+\frac{y^2}{3}=9,$$
$$\frac{y^2}{3}+xy+x^2=16,$$
$$x^2+zx+z^2=25.$$

Určete hodnotu výrazu $xy+2yz+3zx$. (3 body)

2. úloha

Hráči Marco a Kryštof hrají hru Objevení Ameriky. Hra má následující jednoduchá pravidla: Máme dvě pásky rozdělené na různý počet políček a každý z hráčů dostane deset různých zlaťáků v hodnotách od 1 do 10, které postupně umísťuje na pásku. Průbojnější Marco hraje první. Zvolí si jednu pásku a na libovolné její volné políčko umístí jeden ze zlaťáků, který mu zbývá. Poté hraje Kryštof, který na libovolné políčko druhé pásky umístí svůj stejně cenný[1] zlaťák. Střídají se v tazích a skončí, až jim dojdou všechny zlaťáky. Kryštof vyhraje, pokud jsou po 10 tazích hodnoty zlaťáků na obou páskách umístěny ve stejném pořadí. V opačném případě vyhrává Marco.

(a) Dokažte, že pro délky pásek 42 a 1492 políček má Marco vyhrávající strategii. (2 body)

(b) Jedna páska je dlouhá 1492 políček. Jaká je nejmenší délka druhé pásky, aby měl naopak Kryštof vyhrávající strategii? (3 body)

3. úloha

(a) Ukažte, že trojúhelník, v němž je jedna z těžnic stejně dlouhá jako poloměr kružnice opsané, nemůže být ostroúhlý. (2 body)

(b) Máme trojúhelník ABC a bod M ležící uvnitř něho. Dokažte, že obsah útvaru, který je středově souměrný podle bodu M a celý leží uvnitř trojúhelníka, je nejvýše $\frac{2}{3}$ obsahu trojúhelníka. (3 body)

4. úloha

(a) Nalezněte všechna celočíselná řešení rovnice

$$n^2+(n+1)^2+(n+2)^2=m^2.$$ (2 body)

[1] Stejné číselné hodnoty.

(b) Určete, která celá čísla n je možné vyjádřit ve tvaru

$$n = \pm 1^2 \pm 2^2 \pm \cdots \pm k^2$$

při vhodné volbě znamének a parametru k. (3 BODY)

5. ÚLOHA

(a) Představme si nekonečně velkou šachovnici, jejíž políčka jsou čtverce o straně 1 a mají střídavě černou a bílou barvu[2]. Určete maximální poloměr kružnice, která nezasahuje[3] do žádného černého políčka. (2 BODY)

(b) šnEk dostal od Zuzky k Vánocům čtyři reálná čísla a, b, c, d, která jsou všechna větší než 1. Dvě z nich si vybere a označí je x a y tak, aby výraz

$$\frac{\sqrt{(x^2-1)(y^2-1)}+1}{xy}$$

měl co největší hodnotu. Dokažte, že může vždy vybrat taková x a y, aby měl daný výraz hodnotu alespoň $\frac{\sqrt{3}}{2}$. (3 BODY)

6. ÚLOHA

(a) Bod M leží na průměru RS kružnice k. Tětiva TU prochází bodem M a svírá s RS úhel $45°$. Dokažte, že velikost $|TM|^2 + |UM|^2$ nezávisí na volbě bodu M. (2 BODY)

(b) Kružnice k_1 a k_2 se středy S_1 a S_2 se dotýkají v bodě T a leží uvnitř kružnice k_3 se středem S_3, jíž se dotýkají po řadě v bodech T_1 a T_2. Uvažme bod C ležící na kružnici k_3 takový, že označíme-li po řadě A a B body, v nichž přímky CT_1 a CT_2 protínají kružnice k_1 a k_2, platí $|AT| \cdot |TS_2| = |BT| \cdot |TS_1|$. Dokažte, že přímky S_1S_2 a CS_3 jsou na sebe kolmé. (3 BODY)

7. ÚLOHA

Najděte všechny funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takové, že pro každou dvojici $x, y \in \mathbb{R}$ platí:

(a) $f(x + f(y)) = x^2 + f^2(y) + 2xf(y)$ (2 BODY)

(b) $f(x + f(y)) = f(x) + f^2(y) + 2xf(y)$ (3 BODY)

Řešení 8. série

1. úloha

(a) Vyřešte následující rovnici, v níž x je reálné číslo.

$$\sqrt{x} + \sqrt{2x+1} + \sqrt{3x+4} + \sqrt{4x+9} = 14$$

[2] Jedná se tedy o klasickou šachovnici, jen opravdu velkou.
[3] Dotýkat se může.

(b) Mějme kladná reálná čísla x, y, z, pro něž platí následující rovnosti

$$\begin{aligned} z^2 + \frac{y^2}{3} &= 9, \\ \frac{y^2}{3} + xy + x^2 &= 16, \\ x^2 + zx + z^2 &= 25. \end{aligned}$$

Určete hodnotu výrazu $xy + 2yz + 3zx$.

(a)

Krátké uvedení úlohy. Zajisté jste si všimli, že postup, který se běžně učí na školách, tedy postupnými úpravami vyjádřit neznámou, v tomto příkladu není schůdný. Občas je dobré zamyslet se nad tím, jak taková rovnice vlastně funguje.

Řešení. U této rovnice je jasné, že pokud zvětšujeme hodnotu x, pak tím zvětšujeme hodnoty všech odmocnin na levé straně. Ano, levá strana je tedy rostoucí funkce s x, zatímco pravá strana je konstantní. Nyní je už jasné, že rovnost obou stran může nastat pro jedinou hodnotu x. Přesnější zdůvodnění by využívalo toho, že každá rostoucí funkce je prostá, a tedy nabývá každé hodnoty nejvýše jednou, postačí ovšem i názorný obrázek. Nyní je již úloha v podstatě vyřešena, neboť nám stačí jakkoliv nalézt ono jediné řešení rovnice. Koukáme, dosazujeme, tipujeme a rychle objevíme, že oným hledaným řešením je $x = 4$.

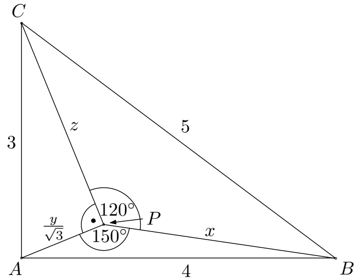
Tento postup je mimochodem velmi široce použitelný. Jeho aplikací se dá snadno vyřešit celá škála rovnic, například tyto:

$$x + \log x = 11 \qquad x^5 + x = 2.$$

(b) I u této úlohy jsou běžné postupy nesmírně pracné a značně neefektivní. Je tedy potřeba se zamyslet nad tím, co přesně nám ony rovnice o neznámých x, y a z říkají. První dobré pozorování je, že pravé strany rovnic jsou druhé mocniny čísel 3, 4 a 5, tedy strany známého pravoúhlého trojúhelníka. Též nelze dlouho přehlížet podobnost první rovnice s Pythagorovou větou. Ano, nyní jsme už na správné stopě, zbývá interpretovat zbylé dvě rovnice jako kosinové věty a nakreslit si ten správný obrázek. Rovnice si přepíšeme následovně:

$$\begin{aligned} z^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{3}}\right)^2 &= 3^2 \\ \left(\frac{y}{\sqrt{3}}\right)^2 + x^2 - 2\left(\frac{y}{\sqrt{3}}\right) x \cos(150^\circ) &= 4^2 \\ x^2 + z^2 - 2xz\cos(120^\circ) &= 5^2 \end{aligned}$$

A správný obrázek pak vypadá takto:



Při konstrukci obrázku jsme využili, že druhá a třetí rovnice jsou kosinovými větami pro $\triangle ABP$ a $\triangle BCP$ a první rovnice Pythagorovou větou pro $\triangle CAP$.

V tuto chvíli jistě oceníme, že úkolem nebylo spočítat délky x, y a z, ale hodnotu výrazu $xy + 2yz + 3xz$. Součiny sousedních stran nás navádějí k využití vzorce pro obsah $S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$. Vyjádříme-li tedy obsah $\triangle ABC$ jako součet obsahů $\triangle ABP$, $\triangle BCP$ a $\triangle CAP$ získáme výraz velmi podobný tomu zkoumanému, jehož hodnotu budeme znát, neb obsah $\triangle ABC$ je jistě 6. Tedy zkusme to.

$$
\begin{aligned}
S_{ABC} &= S_{ABP} + S_{BCP} + S_{CAP} \\
6 &= \frac{1}{2}x\left(\frac{y}{\sqrt{3}}\right)\sin(150^\circ) + \frac{1}{2}xz\sin(120^\circ) + \frac{1}{2}z\left(\frac{y}{\sqrt{3}}\right) \\
6 &= \frac{1}{4\sqrt{3}}(xy + 2yz + 3zx) \\
24\sqrt{3} &= xy + 2yz + 3zx
\end{aligned}
$$

Naše snažení bylo tedy plodné a my jsme vyjádřili hodnotu zadaného výrazu.

Řešení ovšem v tuto chvíli **nekončí**. My totiž pouze známe hodnotu $xy + 2yz + 3zx$ pro jednu jedinou trojici (x, y, z), která soustavu řeší, a nikde není psáno, že žádná jiná trojice řešení netvoří. Je to tedy potřeba dokázat.

Předpokládejme, že existují dvě trojice, které jsou řešením soustavy (x, y, z) a (x', y', z'). Trojice si označíme tak, aby platilo $y \geq y'$. Letmý pohled na první z rovnic zadané soustavy nám prozradí, že pokud zvětšíme y, musíme zmenšit z, aby se zachovala hodnota levé strany. Víme tedy $z' \geq z$. Obdobnou úvahu nyní provedeme u třetí rovnice (připomeňme si, že $x, y, z > 0$) a získáme tak $x \geq x'$, což opět stejným způsobem použijeme ve druhé rovnici a máme $y' \geq y$. Zároveň ale platí $y \geq y'$, pak nutně $y = y'$. Zcela obdobně pak vynutíme rovnost i ostatních proměnných a obě řešení splynou.

Konečně můžeme říci, že soustava má jediné řešení a výraz $xy+2yz+3zx$ nabývá jedné jediné hodnoty, tou je $24\sqrt{3}$.

2. úloha

Hráči Marco a Kryštof hrají hru Objevení Ameriky. Hra má následující jednoduchá pravidla: Máme dvě pásky rozdělené na různý počet políček a každý z hráčů dostane deset různých zlaťáků v hodnotách od 1 do 10, které postupně umísťuje na pásku. Průbojnější Marco hraje první. Zvolí si jednu pásku a na libovolné její volné políčko umístí jeden ze zlaťáků, který mu zbývá. Poté hraje Kryštof, který na libovolné políčko druhé pásky umístí svůj stejně cenný[4] zlaťák. Střídají

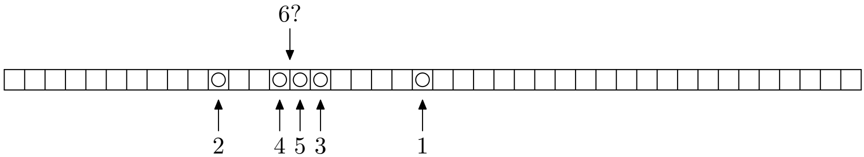
[4]Stejné číselné hodnoty.

se v tazích a skončí, až jim dojdou všechny zlaťáky. Kryštof vyhraje, pokud jsou po 10 tazích hodnoty zlaťáků na obou páskách umístěny ve stejném pořadí. V opačném případě vyhrává Marco.

(a) Dokažte, že pro délky pásek 42 a 1492 políček má Marco vyhrávající strategii.

(b) Jedna páska je dlouhá 1492 políček. Jaká je nejmenší délka druhé pásky, aby měl naopak Kryštof vyhrávající strategii?

Pro řešení části (a) nám stačí popsat Marcovu strategii. Marco bude hrát vždy na delší pásku. Každým svým tahem určí oblast, do které musí na druhé pásce umístit minci Kryštof, pokud nechce prohrát. Marco bude vždy hrát do oblasti, která odpovídá na Kryštofově pásce té nejkratší. Když Kryštof umístí minci do oblasti, rozdělí ji na dvě poloviny. Pokud ji umístí do středu, bude se délka nejkratší oblasti zmenšovat nejpomaleji. I tak tímto způsobem může vzdorovat nejvýše pět tahů. Jeden z možných průběhů hry je zachycen na obrázku. Když Marco v šestém tahu umístí minci na své pásce mezi 4 a 5, Kryštof již nemá místo a prohrál.



Délka nejkratšího úseku se totiž může zmenšovat nejpomaleji takto: $42 \to 20 \to 9 \to 4 \to 1 \to 0$. Nyní se zaměřme na část (b).

Jak moc dobrá je výše popsaná Marcova strategie? S jakou nejvyšší délkou pásky je schopen Kryštofa porazit? Podívejme se na průběh hry od konce. Aby Kryštof vyhrál, musí být délka nejkratší oblasti před položením desáté mince alespoň jedno pole, před položením deváté tři, atd. S každou další mincí vzroste minimální délka z m na $2m + 1$. Dostáváme postupně minimální délky[5]

$$1 \leftarrow 3 \leftarrow 7 \leftarrow 15 \leftarrow 31 \leftarrow 63 \leftarrow 127 \leftarrow 255 \leftarrow 511 \leftarrow \mathbf{1023}.$$

Tedy pro pásku dlouhou nejvýše 1022 má Marco vyhrávající strategii.

Zkusíme postupovat z opačné strany a dokážeme si, že naopak Kryštof má pro pásku dlouhou alespoň 1023 polí vyhrávající strategii. Jestliže na obou páskách má úsek stejnou délku, nemůže na něm Marco nikdy vyhrát. Kryštofovi stačí totiž kopírovat jeho tahy. Takový úsek je uzavřený a již se jím nemá cenu zabývat.

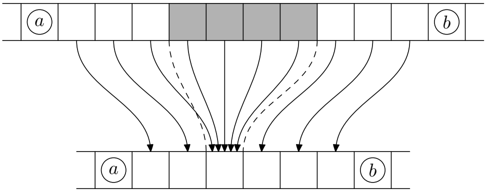
Rozlišíme dva možné Marcovy tahy: tah ke kraji a tah daleko od kraje. Tah blízko kraje pásky nastane, když Marco táhne nejvýše do vzdálenosti poloviny délky Kryštofova úseku. Kryštof umístí svoji minci stejně daleko. Tím na jedné straně vytvořil uzavřený úsek a na druhé mu zůstal úsek alespoň poloviční.[6] Pokud Marco umístí svoji minci naopak dále od kraje, dá Kryštof minci doprostřed. Touto taktikou bude délka nejkratšího neuzavřeného úseku klesat nejvýše podle posloupnosti výše. Protože je páska dostatečně dlouhá, Kryštof nemůže prohrát.

---

[5] Za povšimnutí stojí, že počty jsou rovny $2^k - 1$. Zkus si to jako malé cvičení dokázat.

[6] Proč tak Kryštof činí? Marco by totiž mohl zahrát svoji další minci na druhou pásku a tím nad Kryštofem vyhrát. Představte si situaci, kdy Marco umístí minci těsně ke kraji. Pokud by ji Kryštof umístil dále od kraje, stačilo by do úseku mezi ně umístit další minci a Kryštof by prohrál.

Pro lepší názornost je Kryštofův výběr pole naznačen na obrázku, při délce Marcova úseku 10 a Kryštofova 6. Políčka daleko od kraje jsou vybarvena šedě.



Nejkratší délka pásky, na které může Kryštof vyhrát, je tedy 1023.

3. úloha

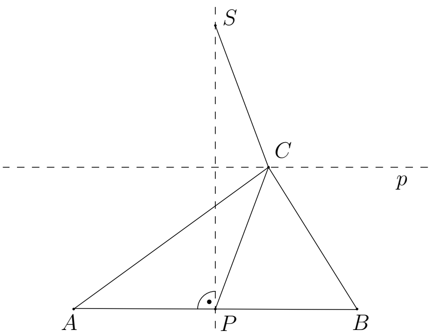
(a) Ukažte, že trojúhelník, v němž je jedna z těžnic stejně dlouhá jako poloměr kružnice opsané, nemůže být ostroúhlý.

(b) Máme trojúhelník ABC a bod M ležící uvnitř něho. Dokažte, že obsah útvaru, který je středově souměrný podle bodu M a celý leží uvnitř trojúhelníka, je nejvýše $\frac{2}{3}$ obsahu trojúhelníka.

(a) Označme trojúhelník ABC tak, aby těžnice na stranu c byla stejně dlouhá jako poloměr kružnice opsané. Dále označme P střed strany AB a S střed kružnice opsané. Má tedy platit $|CP| = |CS|$. Rozlišíme dva případy:

Pokud $S = P$, pak je střed opsané kružnice středem strany AB, čili trojúhelník ABC je pravoúhlý.

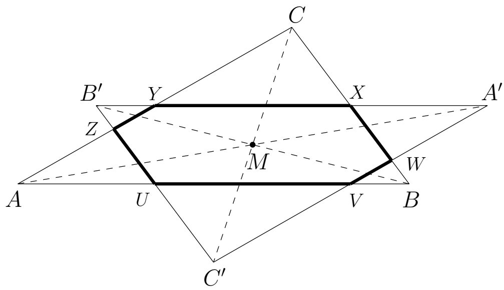
Jsou-li body S, P různé, pak S je obrazem P v osové souměrnosti podle přímky p procházející bodem C a rovnoběžné s AB (protože P i S leží na ose úsečky AB a $|CP| = |CS|$). Tím pádem ale body S, P leží v opačných polorovinách s hraniční přímkou p, a protože ve stejné polorovině jako bod P leží i celý trojúhelník ABC, musí S ležet vně trojúhelníku, a tudíž je trojúhelník ABC tupoúhlý.



Ukázali jsme, že trojúhelník, ve kterém je jedna z těžnic stejně dlouhá jako poloměr kružnice opsané, je pravoúhlý nebo tupoúhlý, a tedy nemůže být ostroúhlý.

(b) Každý útvar, který je středově souměrný podle bodu M a celý leží uvnitř trojúhelníku ABC, musí ležet v průniku trojúhelníků ABC a $A'B'C'$, kde $A'B'C'$ je obraz ABC ve středové souměrnosti podle bodu M (neboť obrazem libovolného bodu tohoto útvaru musí být opět bod tohoto útvaru a ten podle zadání leží uvnitř trojúhelníka). Stačí tedy ukázat, že obsah tohoto průniku není větší než $\frac{2}{3}$ obsahu trojúhelníku ABC.

Předpokládejme nejprve, že průnikem je šestiúhelník. Označme U, V průsečíky AB po řadě s $B'C'$, resp. $A'C'$, W, X průsečíky BC s $A'C'$, resp. $A'B'$ a Y, Z průsečíky CA s $A'B'$, resp. $B'C'$. Ukážeme-li, že součet obsahů trojúhelníků AUZ, VBW, YXC je alespoň $\frac{1}{3}$ obsahu ABC, pak obsah průniku bude menší než $\frac{2}{3}$ obsahu trojúhelníku ABC a budeme mít vyhráno.



Obsah trojúhelníku ABC můžeme psát jako $k|AB|^2$ pro nějakou (kladnou) konstantu k. Potom vzhledem k podobnostem platí $S_{AUZ} = k|AU|^2, S_{YXC} = k|XY|^2, S_{VBW} = k|VB|^2$ a $S_{AUZ} + S_{YXC} + S_{VBW} = k(|AU|^2 + |YX|^2 + |VB|^2)$. Chceme ukázat, že

$$k(|AU|^2 + |YX|^2 + |VB|^2) \geq \frac{1}{3}k|AB|^2,$$

neboli po vydělení k

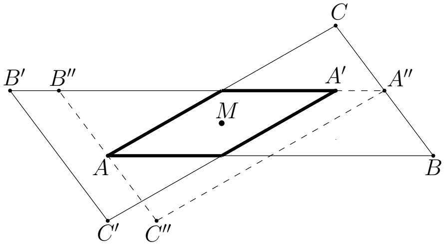
$$|AU|^2 + |YX|^2 + |VB|^2 \geq \frac{1}{3}|AB|^2.$$

Protože obrazem trojúhelníku YXC ve středové souměrnosti se středem M je trojúhelník VUC', jsou tyto dva trojúhelníky shodné a platí $|YX| = |UV|$. Tedy $|AU| + |YX| + |VB| = |AB|$. Z nerovnosti mezi aritmetickým a kvadratickým průměrem plyne

$$\sqrt{\frac{|AU|^2 + |YX|^2 + |VB|^2}{3}} \geq \frac{|AU| + |YX| + |VB|}{3} = \frac{|AB|}{3},$$

což již snadno upravíme na kýžený tvar $|AU|^2 + |YX|^2 + |VB|^2 \geq \frac{1}{3}|AB|^2$.

Průnikem trojúhelníků ABC a $A'B'C'$ může být také čtyřúhelník. Pokud některý jeho vrchol leží uvnitř ABC, můžeme obsah průniku zvýšit posunutím ve směru úsečky AB tak, aby tento vrchol ležel na AC. Pak ale úplně stejným postupem jako výše dostaneme, že obsah průniku je nejvýše $\frac{2}{3}$ obsahu trojúhelníku ABC (dokonce nejvýše $\frac{1}{2}$ obsahu ABC).



4. úloha

(a) Nalezněte všechna celočíselná řešení rovnice

$$n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 = m^2.$$

(b) Určete, která celá čísla n je možné vyjádřit ve tvaru

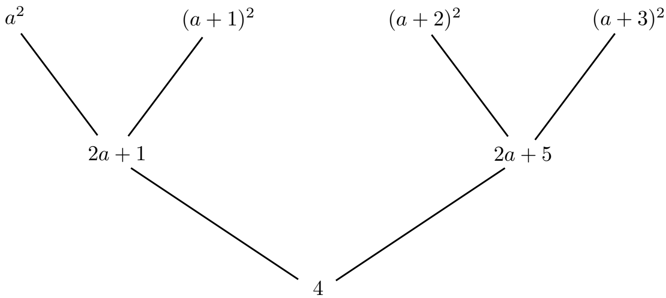
$$n = \pm 1^2 \pm 2^2 \pm \cdots \pm k^2$$

při vhodné volbě znamének a parametru k.

(a) Budeme chtít dokázat, že žádné takové řešení neexistuje. Všimneme si, že po sobě jdoucí čísla n, $n+1$, $n+2$ dávají v nějakém pořadí zbytky $0, 1, 2$ po dělení třemi. Jejich druhé mocniny tedy dávají v nějakém pořadí zbytky 0^2, 1^2, 2^2. Jejich součet dává po dělení třemi zbytek 2, ovšem neexistuje celé číslo m, jehož druhá mocnina dává po dělení třemi zbytek 2. Číslo m samo totiž dává jeden ze zbytků $0, 1, 2$ a jeho druhá mocnina může dávat jen zbytky 0 nebo 1.

Kdybychom si nevšimli tohoto triku zkoumat zbytky po dělení třemi, můžeme se na rovnici dívat jako na kvadratickou rovnici vzhledem k n. Její kořeny nám potom vyjdou ve tvaru $n_{1,2} = -1 \pm \sqrt{\frac{m^2-2}{3}}$, odkud vidíme, že pod odmocninou musí být aspoň celé číslo (dokonce druhá mocnina). A opět bychom potřebovali najít celé m tak, aby jeho druhá mocnina dávala po dělení třemi zbytek 2. Další přístup by mohl spočívat ve zkoumání jiných zbytků, např. po dělení osmi.

(b) Dokážeme, že lze vyjádřit všechna celá čísla. Myšlenka, která nás k takovému závěru dovede, je ta, že k libovolnému číslu tvaru $n = \pm 1^2 \pm 2^2 \pm \cdots \pm k^2$ umíme připojit sekvenci čísel tak, abychom dostali číslo $n+4$. Rozdíly po sobě jdoucích druhých mocnin jsou totiž postupně všechna lichá čísla a pomocí jejich rozdílů lze dostat například právě čtyřku.



Z obrázku (nebo též výpočtem) vidíme, že platí

$$4 = ((a+3)^2 - (a+2)^2) - ((a+1)^2 - a^2) = a^2 - (a+1)^2 - (a+2)^2 + (a+3)^2.$$

Připojením této sekvence (s vhodnou volbou a) tedy umíme čísla zvětšovat o 4, připojením sekvence s přesně opačnými znaménky umíme čísla zmenšovat o 4. Nyní nám proto stačí nějak vyjádřit 4 po sobě jdoucí čísla a již budeme mít jistotu, že umíme vyjádřit každé celé číslo. To umíme například takto: $3 = -1^2 + 2^2$, $4 = -1^2 - 2^2 + 3^2$, $5 = +1^2 + 2^2$, $6 = +1^2 - 2^2 + 3^2$.

5. úloha

(a) Představme si nekonečně velkou šachovnici, jejiž políčka jsou čtverce o straně 1 a mají střídavě černou a bílou barvu[7]. Určete maximální poloměr kružnice, která nezasahuje[8] do žádného černého políčka.

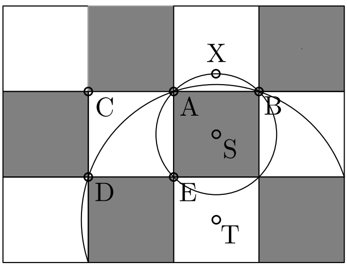
(b) šnEk dostal od Zuzky k Vánocům čtyři reálná čísla a, b, c, d, která jsou všechna větší než 1. Dvě z nich si vybere a označí je x a y tak, aby výraz

$$\frac{\sqrt{(x^2-1)(y^2-1)}+1}{xy}$$

měl co největší hodnotu. Dokažte, že může vždy vybrat taková x a y, aby měl daný výraz hodnotu alespoň $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(a) Zaměřme se jen na kružnice, které procházejí alespoň dvěma bílými políčky, protože ty, které jsou v jednom bílém políčku, mají poloměr maximálně $\frac{1}{2}$. Představme si, že šachovnice určuje souřadný systém se středem v nějakém rohu a s jednotkovou délkou políčka.

Hledaná kružnice zajisté bude mít nějaký bod, který má největší y-ovou souřadnici (na obrázku bod X). Tento bod určitě leží v nějakém bílém políčku. Protože X je „nejvyšší“ bod kružnice, musí tato kružnice procházet dvěma dolními rohy (značené A a B). Zaměřme se na bílé políčko, které sousedí s bodem A (tedy políčko $CDEA$). Zde kružnice musí procházet právě jedním z bodů C, D a E. A jelikož kružnice je určena třemi body, tak dostáváme jediné možné kružnice ABC, ABD a ABE. První z nich je bohužel přímka, druhá kružnice ABD má střed v bodě T a poloměr $\frac{\sqrt{10}}{2}$ a poslední kružnice ABE má střed v bodě S a poloměr $\frac{\sqrt{2}}{2}$, přičemž žádná z těchto kružnic neprochází černými políčky.



[7] Jedná se tedy o klasickou šachovnici, jen opravdu velkou.

[8] Dotýkat se může.

Tedy kružnice s největším poloměrem, která nezasahuje do černých políček, má poloměr $\frac{\sqrt{10}}{2}$.

(b) Upravme si daný výraz do jiné podoby:

$$V = \frac{\sqrt{(x^2-1)(y^2-1)}+1}{xy} = \sqrt{\frac{(x^2-1)(y^2-1)}{x^2y^2}} + \frac{1}{xy} = \sqrt{\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\left(1-\frac{1}{y^2}\right)} + \frac{1}{xy}.$$

Nyní provedeme substituci:

$$\frac{1}{x} = \sin\varphi, \quad \varphi \in (0, \frac{\pi}{2}),$$
$$\frac{1}{y} = \sin\psi, \quad \psi \in (0, \frac{\pi}{2}),$$

která je korektní, jelikož jak $\frac{1}{x}$, tak $\frac{1}{y}$ jsou z intervalu $(0, 1)$. Navíc funkce $\sin t$ a $\cos t$ dávají vždy kladné hodnoty pro $t \in (0, \frac{\pi}{2})$. Dostáváme tedy:

$$V = \sqrt{(1-\sin^2\varphi)(1-\sin^2\psi)} + \sin\varphi\sin\psi = \cos\varphi\cos\psi + \sin\varphi\sin\psi = \cos(\varphi-\psi).$$

Provedeme-li tuto substituci pro všechna a, b, c, d, dostaneme postupně úhly $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in (0, \frac{\pi}{2})$. Rozdělme si tento interval $(0, \frac{\pi}{2})$ na tři intervaly $(0, \frac{\pi}{6}], (\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}], (\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2})$. Dle Dirichletova principu alespoň v jednom z těchto intervalů budou dva z úhlů $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. šnEk je nyní natolik chytrý, že si vybere taková dvě čísla, jejichž úhly jsou ve stejném intervalu. Potom jejich rozdíl je menší než $\frac{\pi}{6}$, a tedy

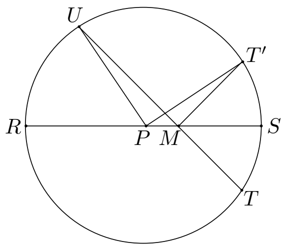
$$V = \cos(\varphi - \psi) < \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

6. úloha

(a) Bod M leží na průměru RS kružnice k. Tětiva TU prochází bodem M a svírá s RS úhel $45°$. Dokažte, že velikost $|TM|^2 + |UM|^2$ nezávisí na volbě bodu M.

(b) Kružnice k_1 a k_2 se středy S_1 a S_2 se dotýkají v bodě T a leží uvnitř kružnice k_3 se středem S_3, jíž se dotýkají po řadě v bodech T_1 a T_2. Uvažme bod C ležící na kružnici k_3 takový, že označíme-li po řadě A a B body, v nichž přímky CT_1 a CT_2 protínají kružnice k_1 a k_2, platí $|AT| \cdot |TS_2| = |BT| \cdot |TS_1|$. Dokažte, že přímky S_1S_2 a CS_3 jsou na sebe kolmé.

(a) Snadno a rychle načrtneme obrázek.



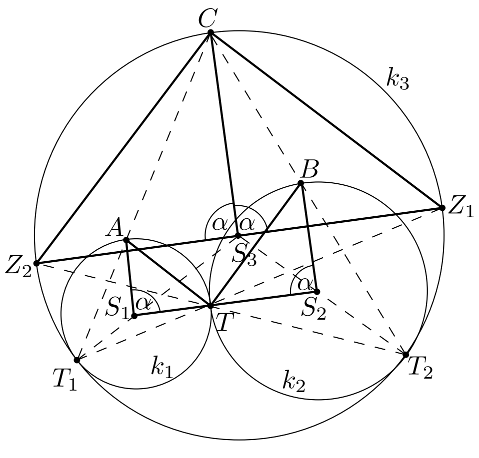
Střed kružnice označme P. Jako zobrazení použijeme osovou souměrnost a zobrazíme si podle tětivy RS bod T na bod T'. Osová souměrnost zachovává úhly, snadno dopočteme $|\sphericalangle UMT'| = \pi/2$. Z toho vyplývá, že zkoumaný součet druhých mocnin vzdáleností není nic jiného než druhá mocnina velikosti přepony. Stačí nám tedy dokázat, že vzdálenost $|T'U|$ nezávisí na volbě M.

Na tuto úsečku se nyní podíváme jako na základnu trojúhelníku UPT'. Ten je zřejmě rovnoramenný s rameny konstantní délky, a proto délku základny můžeme jednoznačně určit z velikosti úhlu $\sphericalangle UPT'$[9] Tento úhel je ovšem středový k obvodovému úhlu $\sphericalangle UTT'$, jehož velikost je pevně daná. Tím jsme ukázali, že součet druhých mocnin velikostí úseček na volbě M nezávisí.

(b) Stejně jako v předchozím případě si nejprve nakreslíme obrázek. Zadané vztahy velikostí úseček upravíme do tvaru

$$\frac{|AT|}{|TS_1|} = \frac{|BT|}{|TS_2|}.$$

Z této rovnosti a z rovnoramennosti trojúhelníků AS_1T a BS_2T plyne, že jsou si tyto trojúhelníky podobné. Proto platí $\sphericalangle AS_1T = \sphericalangle BS_2T$, označme si velikost těchto úhlů jako α.



K důkazu dále využijeme dvě stejnolehlosti. Nejprve aplikujeme stejnolehlost se středem v bodě T_1 a koeficientem takovým, že zobrazí kružnici k_1 na k_3. Díky zvolené stejnolehlosti se bod S_1 zobrazí na S_3, bod A se zobrazí na bod C a bod T do bodu, který označíme Z_1. Dostáváme, že obrazem trojúhelníku $\triangle AS_1T$ je trojúhelník CS_3Z_1, proto platí $|\sphericalangle CS_3Z_1| = \alpha$. Analogicky vezmeme na druhé straně stejnolehlost se středem v bodě T_2, která zobrazí k_2 na k_3, obraz bodu T označíme Z_2 a bude platit $|\sphericalangle CS_3Z_2| = |\sphericalangle BS_2T| = \alpha$.

Nyní nám již stačí učinit jednoduché pozorování: Vzhledem k tomu, že pro stejnolehlost platí rovnoběžnost obrazu a vzoru, jsou obě úsečky Z_2S_3 i S_3Z_1 rovnoběžné s S_1S_2. Obě mají navíc společný bod S_3, takže leží na jedné přímce rovnoběžné s S_1S_2. Proto je $|\sphericalangle Z_1S_3Z_2| = \pi$, a tedy

$$2\alpha = \pi.$$

[9] Například pomocí kosínové věty.

Vidíme, že S_3C je kolmá na Z_1Z_2 ($\alpha = \pi/2$) a z rovnoběžnosti výše dokázané i na S_1S_2, jsme hotovi.

7. úloha

Najděte všechny funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takové, že pro každou dvojici $x, y \in \mathbb{R}$ platí:

(a) $f(x + f(y)) = x^2 + f^2(y) + 2xf(y)$

(b) $f(x + f(y)) = f(x) + f^2(y) + 2xf(y)$

(a) Rovnici ze zadání upravíme do tvaru

$$f(x + f(y)) = (x + f(y))^2.$$

Když zafixujeme y, tak výraz $t = x + f(y)$ nabývá pro $x \in \mathbb{R}$ všech reálných hodnot, proto pro všechna reálná t platí

$$f(t) = t^2.$$

K dokončení úlohy můžeme buď provést zkoušku, nebo si všimneme, že z rovnice $f(t) = t^2$ umíme zpětně dosazením $t = x + f(y)$ dostat rovnici ze zadání, obě vyjádření jsou tedy ekvivalentní a nalezené řešení nutně vyhovuje dané rovnici.

(b)

První řešení:

Dosazení $[0, y]$ odhalí rovnost

$$f(f(y)) = f(0) + f^2(y), \quad y \in \mathbb{R}, \tag{$\star$}$$

neboli pro všechna a z oboru hodnot funkce f (o kterém ale zatím nic nevíme) platí

$$f(a) = a^2 + f(0).$$

Zřejmě nulová funkce $f(x) = 0$ splňuje rovnost ze zadání a je řešením. Pro jakoukoli jinou funkci, která řeší zadanou rovnici, existuje $y_0 \in \mathbb{R}$ takové, že $f(y_0) \neq 0$. Dosaďme $[x, y_0]$ a převeďme člen $f(x)$ nalevo:

$$f\Big(x + f(y_0)\Big) - f(x) = f^2(y_0) + 2xf(y_0) = c_1x + c_2.$$

Pravá strana rovnosti probíhá pro $x \in \mathbb{R}$ všechna reálná čísla, proto i levá strana probíhá všechna reálná čísla. Levou stranu přesně tvoří výraz $a_1 - a_2$, kde a_1 a a_2 jsou z oboru hodnot. Ke každému reálnému číslu x tedy existují a_1, a_2 z oboru hodnot tak, že $x = a_1 - a_2$. Funkční hodnotu v $f(x)$ přímo vyjádřit neumíme, ale umíme najít funkční hodnotu $f(a_1 - a_2)$. Dosazení $[f(x) - f(y), y]$ dává

$$f\Big(f(x) + f(y) - f(y)\Big) = f(f(x) - f(y)) + f^2(y) + 2(f(x) - f(y))f(y),$$

neboli po úpravě

$$\begin{aligned} f(f(x) - f(y)) = f(f(x)) + f^2(y) - 2f(x)f(y) \overset{(\star)}{=} f^2(x) + f(0) + f^2(y) - 2f(x)f(y) = \\ = (f(x) - f(y))^2 + f(0). \end{aligned} \tag{Ξ}$$

Nyní se už můžeme pustit do vyjádření $f(x)$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$.

$$f(x) = f(a_1 - a_2) \stackrel{(\Xi)}{=} (a_1 - a_2)^2 + f(0) = x^2 + f(0).$$

Zkouška dosazením do zadání ukáže, že funkce $f(x) = x^2 + c$ vyhovuje pro všechny konstanty $c \in \mathbb{R}$. Řešeními dané rovnice jsou tedy $f(x) = 0$ a $f(x) = x^2 + c$.

Druhé řešení (podle Myrega Klimoše a Mirka Olšáka):
Zkoušením nám vyjde, že je funkce $f(x) = x^2$ řešením. Zvolme substituci $f(x) = x^2 + g(x)$. Po dosazení a úpravách dostaneme

$$g(x) = g(x + y^2 + g(y)) \qquad \text{pro všechna } x, y \in \mathbb{R}. \tag{Υ}$$

To znamená, že g je periodická funkce pro všechny periody délek $y^2 + g(y)$. Pokud je $y^2 + g(y) = 0$ pro všechna $y \in \mathbb{R}$, tak je $g(y) = -y^2$ a $f(y) = y^2 + g(y) = 0$.

Předpokládejme teď naopak, že existuje perioda nenulové délky, označme ji p. Dosaďme do (Υ) dvojici $[x, y + p]$ a $[x + p(p + 2y), y]$:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{g(x)}} &= g(x + (y+p)^2 + g(y+p)) = g(x + (y+p)^2 + g(y)) = \\ &= g(x + p(p+2y) + y^2 + g(y)) = \underline{\underline{g(x + p(p+2y))}}. \end{aligned}$$

Je vidět, že i $p(p + 2y)$ je periodou pro každé y. To znamená jediné – protože $p \neq 0$, nabývá $p(p + 2y)$ všech hodnot, tudíž $g(x) = g(y)$ pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$, tedy $g(x)$ je konstantní. Odtud už snadno

$$g(x) = c \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{f(x)}} = x^2 + g(x) = \underline{\underline{x^2 + c}}.$$

Zkouškou se lehce ověří, že funkce $f(x) = 0$ a $f(x) = x^2 + c$ jsou skutečně řešením.