1. série

Téma: Úlohy na šachovnici

Datum odeslání: 6. října 2008

0. úloha (1 bod)

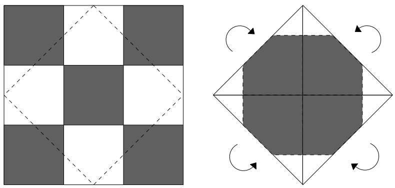
Šepotá se, že v šachovnicovém šapitó šilhala ze škopku šílená šachovnicová šifra. Šarlatán Šimon ji ale po tuhém boji udolal … a tak se hledá nová šifra – lepší, šachovnicovější. A pěkná. Zvládnete ji vyrobit?

1. úloha (3 body)

Kenny stojí na velikánské šachovnici 5×5 na poli, které hranou sousedí s prostředním. Umí se po šachovnici teleportovat, ovšem jen z černého pole na bílé a naopak. Může si takto[1] udělat výlet přes všechna políčka šachovnice, aniž by na nějaké vstoupil[2] dvakrát?

2. úloha (3 body)

Monika má čtvercový papír, na němž je nakreslená mřížka 3×3 vybarvená jako na obrázku.



Jednoho dne se Monika rozhodla, že si z něj poskládá parníček. Nejprve ohnula každý roh na stejnou stranu do středu tak, aby se rohy setkaly v jednom bodě uprostřed, a vznikl tím menší čtverec. Navrchu zůstala obarvená mřížka a celá rubová strana papíru zmizela uvnitř skládanky.

Potom papír obrátila[3] a celý postup zopakovala. Pak ještě naposled papír obrátila a znovu ohnula rohy směrem do středu. Moniku uchvátily obrazce, které se objevily na obou stranách vzniklého čtverečku. Nemohla se ovšem rozhodnout, která barva celkově převládá[4]. Pomůžete jí? Nezapomeňte své tvrzení zdůvodnit.

3. úloha (3 body)

Háňa si půjčila na prázdniny z útrob školního skladu magickou tabulku 3×3, obarvenou jako šachovnici s černým políčkem uprostřed, a k tomu magickou paličku. Uhodí-li paličkou na nějaké políčko šachovnice, pak toto políčko i všechna, která s ním sousedí hranou, změní barvu na opačnou[5]. Ukažte, že když Háňa uhodí paličkou v libovolném pořadí na všechna políčka šachovnice, na každé právě jednou, budou na konci všechna políčka bílá.

---

[1] Pouhým teleportováním.

[2] Ani na první políčko se nesmí vrátit.

[3] Tak, že se po obrácení dívala na tu stranu, kterou předtím neviděla (tuto situaci zachycuje druhý obrázek).

[4] Bráno na obou stranách dohromady.

[5] Černá políčka na bílou, bílá na černou.

4. ÚLOHA (5 BODŮ)

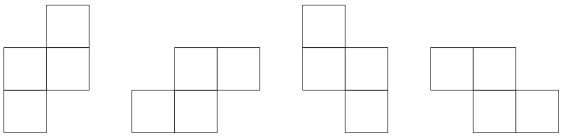
Franta si umělecky vyzdobil pokoj. Na stěnu si načrtl skutečně velkou čtvercovou mřížku tvořenou čtverci o straně dlouhé $\sqrt{2}$ metru. Vždy si pak vybral libovolné tři mřížové body, které tvořily barvami doposud nedotčený trojúhelník, a tento trojúhelník vymaloval nějakou pěknou barvou – pokaždé jinou, aby byl pokoj co nejveselejší. Ukažte, že každá z použitých barev pokrývá celočíselný počet metrů čtverečních.

5. ÚLOHA (5 BODŮ)

Když se pro změnu Jarda hrabal ve školním skladu, také našel magickou tabulku, tentokrát o rozměrech 4×4. Celá je vyplněna reálnými čísly a má tu pěknou vlastnost, že součet čísel v každém řádku, každém sloupci a na obou hlavních úhlopříčkách je stejný. Dokažte, že tento součet mají i čtyři čísla v rozích tabulky.

6. ÚLOHA (5 BODŮ)

Do šachovnice 8×8 kdosi vepsal čísla 1 až 64, každé právě jednou. Pavel si z Ruska přivezl tetrisovou kostičku tvaru S (viz obrázek), a ať ji nad šachovnicí otáčí a převrací jakkoli, vždy, když s ní přikryje čtyři políčka šachovnice, součet čísel v těchto políčkách je dělitelný čtyřmi. Existuje takové rozmístění čísel 1 až 64 do šachovnice, aby to byla pravda? Opět nezapomeňte na zdůvodnění.



7. ÚLOHA (5 BODŮ)

Miško onehdy našel ve školním skladu další zajímavou tabulku. Má rozměry 9×9 a všechna její políčka jsou obarvena buď červeně, nebo zeleně. Navíc každé políčko sousedí hranou s nejvýše jedním políčkem stejné barvy. Políčka o souřadnicích $(4, 4)$ a $(4, 9)$[6] jsou červená. Dokažte, že políčko o souřadnicích $(9, 9)$ je zelené.

8. ÚLOHA (5 BODŮ)

Tabulka $n \times n$ je vyplněná čísly $1, 2, \ldots, n^2$, přičemž každé je použito právě jednou. Dokažte, že existují dvě hranou sousedící políčka taková, že rozdíl čísel v nich napsaných je alespoň n.

Řešení 1. série

0. úloha

Šepotá se, že v šachovnicovém šapitó šilhala ze škopku šílená šachovnicová šifra. Šarlatán Šimon ji ale po tuhém boji udolal … a tak se hledá nová šifra – lepší, šachovnicovější. A pěkná. Zvládnete ji vyrobit?

Milí řešitelé, nultých úloh se nám sešlo šťastných sedmnáct, a to naškrabaných šifer i spletitých šachovnic. Někteří z Vás snadno domysleli, že šťastlivec opravovatel si sice rád zaluští, ale šprýmy

[6] To jest čtvrté políčko ve čtvrtém řádku a deváté políčko ve čtvrtém řádku.

bez odhalení myšlenky s ním pěkně zacvičí. Nakonec šílenost ustoupila soucitu a většina šifer se nechala rozluštit. Sladké potěšení pošleme **Jirkovi Hadravovi**, **Elišce Pilátové** a **Verče Paštykové**[7].

Došlá řešení lze rozdělit do několika sort. Především se jednalo o klasické šifry, obvykle zapsané do tabulky, čili šachovnice. Moje sympatie patří těm, kteří si dali práci a využili toho, že šachovnice není jen tabulka, ale vtipně zapracovali její další vlastnosti.

Například informatická šifra **Marka Behúna** zakódovala znaky do bitů[8], bílou jako jedničku a černou jako nulu. Po přiložení písmen na šachovnici pak obyčejným `xor`em[9] dostaneme zmodifikovaný kód. **Helena Brandejská** zase využila čísla polí podle známých šachových stylů. A vůbec nejzajímavější mi přišlo kódování pomocí šachového zápisu, které poslal **Jiří Hadrava**. Každý tah znamená buď jedničku, nebo nulu podle barvy pole, kam se táhne. Pak použijeme ASCII tabulku nebo jiné kódování. Na této šifře se mi líbí hlavně to, že obsahuje mnoho informací v podobě čísel, písmen a typu figurek, takže je těžké si v ní vybrat to, co potřebujeme k řešení.

Další řešení, která nebyla tolik šachovitá, jsou například šifra **Martina Bucháčka**, ke které potřebujete znát čísla 1 a 2:

Radek Jelínek se velmi nerad miloval. Jasně, že se ona a Áda nebojí zemětřesení země! Jelen na Miladě cestoval enklávou Otatata okolo Omara . . .

. . . tahle šifra mě zaujala spíš textem než způsobem šifrování, který je poněkud známější. A z mnoha krásných tabulek jsem pro vás vybral tu od **Honzíka Vaňhary**, a to především kvůli velmi pozitivní tajence.

A	A	H	M	O	D	J	R
I	O	L	B	I	U	Z	V
D	I	I	T	E	N	M	E
J	Y	L	E	I	N	L	K
O	R	L	J	U	E	U	I
J	O	U	J	B	E	V	L
A	A	A	B	A	S	X	D
S	K	T	I	S	E	I	L

. . . pokud si s ní nebudete vědět rady, tak začněte od těch čísel, která vás napadnou první.

Předposledním způsobem přístupu bylo sepsání krátkého vtipného textu, který by byl důstojnou odpovědí na šišlavé zadání. Nemohl jsem se rozhodnout, které z následujících řešení je lepší, tak vám zasílám obě dvě:

Řešení dle Jany Martínkové:
Šišlavý šašek šustl šustilkou, avšak šum došel až k šilhavému šprtu, který hrál na šachovnici šachy. Šupem sešel svah a štrádoval si to k cirkusákovi, aby mu sáček sebral. Šumivou špatnost sruloval a šoupnul do koše. Na stezce šlápl do šlupky a spadl do špinavého zplesnivělého kontejneru. Teď slyší jen šum šprýmů od smějícího se slizkého Šimona.

Řešení dle Jany Monsportové:
Při šachovém šampionátu šikovný šestinásobný šampion Šimon Špáral šilhal na šíleně špinavou

[7] Tato dvě řešení byla příliš barevná a krásná, než abych vám je tady mohl důstojně předvést v černé a bílé. :-)

[8] Jako osm jedniček nebo nul v dvojkové soustavě.

[9] Logická spojka, která znamená: Právě jedno je pravda.

Šárku Šípalovou, která Šimonovi Špáralovi šeptala šachovnické šifry do šachového šuplíku, který Šimon Špáral štípal na šachovnické šipky. Proto šestinásobný šachový šampion vyhrál šampionát.

V samém závěru nesmím opomenout řešení **Markéty Švecové**, které bylo tak tajné a záhadné, že se ho dokonce někdo pokusil spálit a dorazilo s ohořelými okraji. Bohužel nám černobílý tisk neumožňuje tuto nerozluštitelnou, barvami zářící šifru důstojně představit, takže musí zůstat tajná.

A nakonec bych si vás dovolil pohladit po poetických duších řešením dle **Jana Kotíka** ...

Šachovnicové šifry šumivě šlapají,
zašera špatně kolem sebe šilhají.
Šikovně však po šlépějích šplhají,
bez šatu, bez šály šaramantně špásují.
Šamani i šarlatáni o tom šeptají,
jak šikovně šifry po šachovnici šplhají.

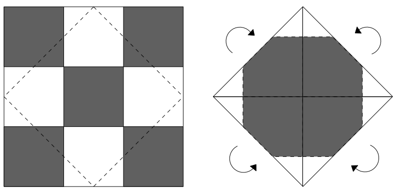
1. úloha

Kenny stojí na velikánské šachovnici 5×5 na poli, které hranou sousedí s prostředním. Umí se po šachovnici teleportovat, ovšem jen z černého pole na bílé a naopak. Může si takto[10] udělat výlet přes všechna políčka šachovnice, aniž by na nějaké vstoupil[11] dvakrát?

Na šachovnici 5×5 je 25 políčok. Z toho je 13 políčok rovnakej farby ako stredové políčko a 12 je inej farby. Z toho vyplýva, že ak chce Kenny teleportovaním prejsť celú šachovnicu, musí začať na políčku farby stredového políčka, lebo tých je viac (začne aj skončí na políčku rovnakej farby). Kenny ale podľa zadania začína na políčku, ktoré stranou susedí so stredovým políčkom, a preto je nutne inej farby ako toto políčko a Kenny šachovnicu prejsť nemôže.

2. úloha

Monika má čtvercový papír, na němž je nakreslená mřížka 3×3 vybarvená jako na obrázku.



Jednoho dne se Monika rozhodla, že si z něj poskládá parníček. Nejprve ohnula každý roh na stejnou stranu do středu tak, aby se rohy setkaly v jednom bodě uprostřed, a vznikl tím menší čtverec. Navrchu zůstala obarvená mřížka a celá rubová strana papíru zmizela uvnitř skládanky.

Potom papír obrátila[12] a celý postup zopakovala. Pak ještě naposled papír obrátila a znovu ohnula rohy směrem do středu. Moniku uchvátily obrazce, které se objevily na obou stranách

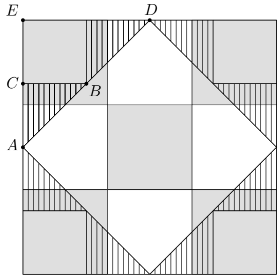
[10] Pouhým teleportováním.

[11] Ani na první políčko se nesmí vrátit.

[12] Tak, že se po obrácení dívala na tu stranu, kterou předtím neviděla (tuto situaci zachycuje druhý obrázek).

vzniklého čtverečku. Nemohla se ovšem rozhodnout, která barva celkově převládá[13]. Pomůžete jí? Nezapomeňte své tvrzení zdůvodnit.

Pre predstavu poskladajme Monikin parníček, vyšrafujme obe strany vzniknutého štvorčeka a parníček rozložme. Dostaneme tento obrázok:



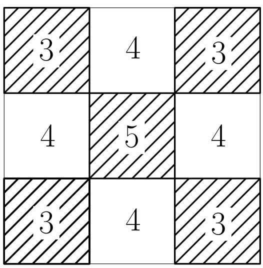
Ako vidíme, vyšrafovanú plochu tvorí osem zhodných trojuholníkov, preto stačí určiť pomer čiernej a bielej v jednom z nich (napr. v ABC). Označme veľkosť strany čierneho/bieleho štvorca mriežky ako a. Z postupu skladania potom vyplýva, že $|AB| = \frac{1}{2}|AD| = \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{3}{2}a\right)^2 + \left(\frac{3}{2}a\right)^2} = \frac{3}{4}\sqrt{2}a$. Ďalej z Pytagorovej vety platí $|AC|^2 = \frac{1}{2}|AB|^2$, teda $S_{ABC} = \frac{1}{2}|AC|^2 = \frac{1}{4}|AB|^2 = \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\sqrt{2}a\right)^2 = \frac{9}{32}a^2$.

Je zrejmé, že obsah bielej plochy v ABC je $S_b = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{1}{8}a^2$, teda obsah čiernej plochy S_c musí byť $S_{ABC} - S_b = \frac{5}{32}a^2$. Pomer čiernej ku bielej je preto 5:4, čiže celkovo prevláda čierna.

3. úloha

Háňa si půjčila na prázdniny z útrob školního skladu magickou tabulku 3×3, obarvenou jako šachovnici s černým políčkem uprostřed, a k tomu magickou paličku. Uhodí-li paličkou na nějaké políčko šachovnice, pak toto políčko i všechna, která s ním sousedí hranou, změní barvu na opačnou[14]. Ukažte, že když Háňa uhodí paličkou v libovolném pořadí na všechna políčka šachovnice, na každé právě jednou, budou na konci všechna políčka bílá.

Každé políčko změní barvu právě tolikrát, kolik je vedle něj polí sousedících s ním hranou, plus 1 (za sebe samo). Z této myšlenky vyplývá, že nebude záležet na pořadí poklepání. Počet změn barvy jednotlivých polí je zapsán v následující tabulce:



[13] Bráno na obou stranách dohromady.

[14] Černá políčka na bílou, bílá na černou.

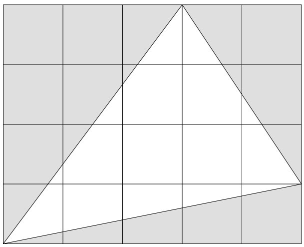
Snadno si uvědomíme, že po lichém počtu změn se barva změní a po sudém počtu změn zůstane stejná. Tedy černá pole (dle obrázku je na nich proveden lichý počet změn) se změní na bílá a bílá pole (dle obrázku je na nich proveden sudý počet změn) zůstanou bílá, takže všechna pole nakonec budou bílá, což se mělo ukázat.

4. úloha

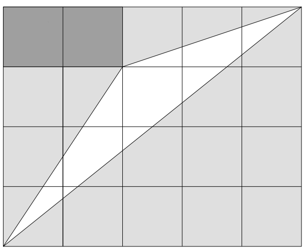
Franta si umělecky vyzdobil pokoj. Na stěnu si načrtl skutečně velkou čtvercovou mřížku tvořenou čtverci o straně dlouhé $\sqrt{2}$ metru. Vždy si pak vybral libovolné tři mřížové body, které tvořily barvami doposud nedotčený trojúhelník, a tento trojúhelník vymaloval nějakou pěknou barvou – pokaždé jinou, aby byl pokoj co nejveselejší. Ukažte, že každá z použitých barev pokrývá celočíselný počet metrů čtverečních.

První řešení:

Každému trojúhelníku můžeme „opsat" obdélník s vrcholy v mřížových bodech (viz obrázek).



Obdélník má zjevně celočíselný obsah, neboť $S_o = a \cdot b$, kde $a = x \cdot \sqrt{2}$ a $b = y \cdot \sqrt{2}$ (x a y jsou počty hran čtvercové sítě). Čili $S_o = xy \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2xy$. Z toho je také hezky vidět, že jakýkoliv pravoúhlý trojúhelník, jenž je polovinou takového obdélníka, má také celočíselný obsah, neboť $S_\Delta = \frac{S_o}{2} = xy$. Obsah obarveného trojúhelníka získáme jako obsah opsaného obdélníka minus obsahy jednoho až tří pravoúhlých trojúhelníků (podle toho, jak moc byl barevný trojúhelník obecný), případně ještě minus obsah menšího obdélníka (viz druhý obrázek).



A jelikož celá čísla jsou uzavřená na sčítání, odčítání i násobení, je výsledkem opět celé číslo. Každý trojúhelník, který si Franta vybarví, má tedy celočíselný obsah.

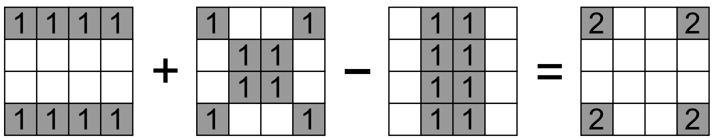
Řešení podle Tomáše Pavlíka:
Použijeme Pickovu formuli[15] pro obsah mnohoúhelníka ve čtvercové síti:

$$S = v + \frac{h}{2} - 1,$$

kde v je počet bodů čtvercové sítě ve vnitřní oblasti mnohoúhelníka a h je počet bodů na jeho obvodu. Jelikož Frantova čtvercová síť má jednotkový čtvereček o straně $\sqrt{2}$, musíme celkový obsah ještě přenásobit $\sqrt{2}^2 = 2$. A tedy $S = 2v + h - 2$, což je zjevně celé číslo.

5. úloha
Když se pro změnu Jarda hrabal ve školním skladu, také našel magickou tabulku, tentokrát o rozměrech 4×4. Celá je vyplněna reálnými čísly a má tu pěknou vlastnost, že součet čísel v každém řádku, každém sloupci a na obou hlavních úhlopříčkách je stejný. Dokažte, že tento součet mají i čtyři čísla v rozích tabulky.

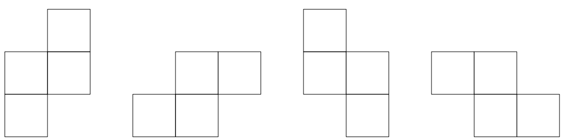
Úlohu vyriešime názorne cez obrázok. Označme si súčet v riadku, stĺpci a uhlopriečke S.



$$2S + 2S - 2S = 2S$$

Súčet čísel v prvom a poslednom riadku je potom $2S$. Podobne súčet na oboch uhlopriečkach je $2S$ a v prostredných dvoch stĺpcoch je tiež $2S$. Keď teraz zoberieme čísla v prvom a poslednom riadku, pričítame uhlopriečky a odčítame prostredné stĺpce, dostaneme súčet $2S + 2S - 2S = 2S$. V tomto súčte sme však dvakrát započítali čísla v rohoch štvorca. Takže vydelíme dvomi a dostaneme požadovaný výsledok.

6. úloha
Do šachovnice 8×8 kdosi vepsal čísla 1 až 64, každé právě jednou. Pavel si z Ruska přivezl tetrisovou kostičku tvaru S (viz obrázek), a ať ji nad šachovnicí otáčí a převrací jakkoli, vždy, když s ní přikryje čtyři políčka šachovnice, součet čísel v těchto políčkách je dělitelný čtyřmi. Existuje takové rozmístění čísel 1 až 64 do šachovnice, aby to byla pravda? Opět nezapomeňte na zdůvodnění.



Nejdříve si uvědomíme, že bude lepší pracovat pouze se zbytky $0, 1, 2, 3$ po dělení čtyřmi, místo abychom pracovali s čísly $1, 2, \ldots, 64$. Dělitelnost součtu čísel zakrytých tetrisovou kostičkou to nijak neovlivní. Máme tedy 4 skupiny zbytků, z nichž každá zahrnuje šestnáct čísel.

[15] Pickova formule dokáže spočítat obsah z počtu hran a vrcholů na obvodu.

Nejdříve navrhneme rozmístění zbytků na šachovnici, ukážeme si, že splňuje podmínky ze zadání, a nakonec ukážeme, jak se na řešení dá přijít, a jiná možná rozmístění zbytků.

Úhlopříčky ve směru $\searrow$ vyplníme střídavě nulami a dvojkami (nuly a dvojky nazveme *dobré* zbytky), zatímco úhlopříčky ve směru $\swarrow$ vyplníme střídavě jedničkami a trojkami (jedničky a trojky nazveme **špatné** zbytky).

0	**1**	*2*	**3**	*0*	**1**	*2*	**3**
1	*0*	**3**	*2*	**1**	*0*	**3**	*2*
2	**3**	*0*	**1**	*2*	**3**	*0*	**1**
3	*2*	**1**	*0*	**3**	*2*	**1**	*0*
0	**1**	*2*	**3**	*0*	**1**	*2*	**3**
1	*0*	**3**	*2*	**1**	*0*	**3**	*2*
2	**3**	*0*	**1**	*2*	**3**	*0*	**1**
3	*2*	**1**	*0*	**3**	*2*	**1**	*0*

Z postupu, jakým jsme tabulku vyplnili, snadno plyne, že každá tetrisová kostička překrývá právě dva *dobré* zbytky a právě dva **špatné** zbytky. Navíc překrývá-li kostička dva stejné *dobré* zbytky (jejich součet dá zbytek 0), pak překrývá dva různé **špatné** zbytky (jejich součet dá zbytek 0). Naopak překrývá-li kostička dva různé *dobré* zbytky (jejich součet dá zbytek 2), pak překrývá dva stejné **špatné** zbytky (jejich součet dá zbytek 2). V obou případech je ovšem celkový součet zbytků překrytých jednou kostičkou roven 0.

Každý zbytek jsme použili právě šestnáctkrát a není proto problém do tabulky rozmístit čísla $1, 2, \ldots, 64$ tak, abychom vyhověli zadání.

A jak na řešení přijít? Můžeme si například všimnout, že pokud si určíme zbytky v prostředním čtverečku 2×2, tak už jsme schopni přikládáním vhodných kostiček jednoznačně dopočítat všechny zbytky. Snadno si rozmyslíš, proč nemůžeme do čtverečku 2×2 umístit 3 nebo 4 stejné zbytky. Jiný přístup spočívá v hledání nutných vlastností tabulky. Vlastnosti hledáme tak, že položíme dvě kostičky překrývající se na třech nebo alespoň dvou políčkách, čímž objevíme spoustu nutných vztahů mezi zbytky. Nakonec je ale pokaždé potřeba dokázat vlastnost pro celou tabulku tak, jak jsme to udělali před chvílí.

Jak jsme již naznačili, existuje více správných rozmístění zbytků, některá vzniknou jen drobnou úpravou předchozího, ale jedno opravdu jiné vypadá následovně.

0	**1**	*2*	**3**	*0*	**1**	*2*	**3**
0	**1**	*2*	**3**	*0*	**1**	*2*	**3**
2	**3**	*0*	**1**	*2*	**3**	*0*	**1**
2	**3**	*0*	**1**	*2*	**3**	*0*	**1**
0	**1**	*2*	**3**	*0*	**1**	*2*	**3**
0	**1**	*2*	**3**	*0*	**1**	*2*	**3**
2	**3**	*0*	**1**	*2*	**3**	*0*	**1**
2	**3**	*0*	**1**	*2*	**3**	*0*	**1**

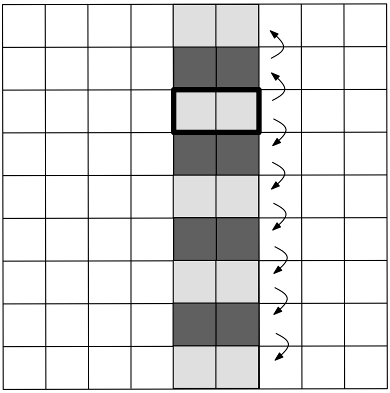
7. úloha

Miško onehdy našel ve školním skladu další zajímavou tabulku. Má rozměry 9×9 a všechna její políčka jsou obarvena buď červeně, nebo zeleně. Navíc každé políčko sousedí hranou s nejvýše jedním políčkem stejné barvy. Políčka o souřadnicích $(4, 4)$ a $(4, 9)$[16] jsou červená. Dokažte, že políčko o souřadnicích $(9, 9)$ je zelené.

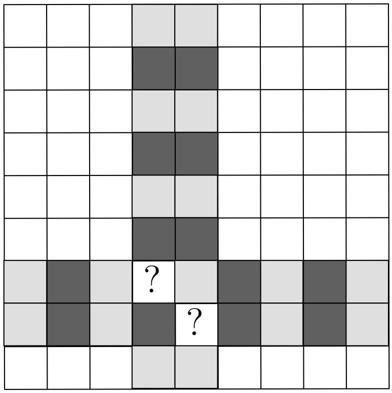
Nejprve uvažme, co se stane, vyskytnou-li se v jednom řádku vedle sebe dvě stejnobarevná políčka, dejme tomu zelená. Obě tato políčka již sousedí s jedním políčkem stejné barvy (s tím druhým z dvojice), tudíž všichni ostatní jejich sousedi musí mít barvu opačnou. Tím nám nad i pod našimi dvěma zelenými poli vzniknou opět dvojice sousedících stejnobarevných polí, tentokrát červených. Pro ty platí zase totéž, a tak se nám postupně vytvoří pás přes celé dva sloupce tabulky, v němž se střídají vodorovné červené a zelené dvojice políček (viz obr. 1). Podobně sousedí-li dvě políčka stejné barvy v nějakém sloupci, pak se v příslušných dvou řádcích tabulky střídají svislé červené a zelené dvojice políček.

Uvědomme si nyní, že v tabulce nemůže být zároveň vodorovná i svislá dvojice sousedících polí stejné barvy. Pak by se tam totiž musel vyskytovat jak svislý, tak i vodorovný pás střídajících se stejnobarevných dvojic, jak je popsáno výše, a tyto by se musely někde protnout, což ale není možné (viz obr. 2).

[16] To jest čtvrté políčko ve čtvrtém řádku a deváté políčko ve čtvrtém řádku.



obr. 1



obr. 2

Ve čtvrtém řádku naší tabulky jsou červená pole o souřadnicích $(4, 4)$ a $(4, 9)$ vzdálena o lichý počet polí. Není tedy možné řádek vybarvit tak, aby se v něm červená a zelená políčka pravidelně střídala, a někde nám vznikne vodorovná dvojice sousedících stejnobarevných polí. To znamená, že nikde v tabulce už nemůže být svislá jednobarevná dvojice a ve všech sloupcích, devátý nevyjímaje, se barvy pravidelně střídají. Políčko o souřadnicích $(4, 9)$ tedy musí být zelené.

8. úloha

Tabulka $n \times n$ je vyplněná čísly $1, 2, \ldots, n^2$, přičemž každé je použito právě jednou. Dokažte, že existují dvě hranou sousedící políčka taková, že rozdíl čísel v nich napsaných je alespoň n.

Postupujme sporem. Budeme do prázdné tabulky umísťovat čísla postupně od 1 do n^2 tak, že rozdíl čísel v každých dvou políčkách sousedících hranou je menší než n. Označme $X(k) = \{1, 2, \ldots, k\}$. Máme-li k položených čísel, označíme si dále $M(k)$ množinu všech prázdných políček sousedících s některým z již položených čísel. Udělejme nyní několik odhadů na velikost $M(k)$:

(a) Představme si, že už jsme úspěšně vyplnili celou tabulku, a podívejme se na čísla, která se umístila do políček z $M(k)$. Kdyby $|M(k)| \geq n$, potom je v políčkách z $M(k)$ alespoň jedno číslo $t \geq k + n$. Ale políčko s číslem t musí sousedit s nějakým políčkem z $X(k)$, protože $t \in M(k)$. No ale pak je rozdíl hodnot v těchto políčkách alespoň n, což je ve sporu s úspěšně vyplněnou tabulkou. Tudíž platí $|M(k)| < n$ pro každé $k \leq n^2$.

(b) Nyní najdu k takové, že $|M(k)| \geq n$. Jelikož dáváme do tabulky čísla postupně, najdeme situaci, kdy jsme vyplnili první řádek nebo sloupec (dále BÚNO řádek R). Označme poslední položené číslo l. Potom v každém sloupci kromě toho, do kterého jsme právě umístili číslo l, je alespoň jedno číslo z $M(l-1)$. To proto, že žádný z těchto sloupců není zcela zaplněn a je v něm alespoň jedno číslo z $X(l-1)$. Podíváme-li se na sloupec, do kterého jsme právě umístili číslo l, pak políčko, do kterého jsme umístili číslo l, určitě bylo v $M(l-1)$, protože zbytek řádku R je v $X(l-1)$. Tudíž v každém sloupci je alespoň jedno číslo z $M(l-1)$, tedy $|M(l-1)| \geq n$.

Z obou odhadů (a) a (b) vidíme, že $n > |M(l-1)| \geq n$, což je určitě nepravdivé tvrzení. Tudíž požadované vyplnění tabulky neexistuje.