Povídání ke druhé sérii

Milý řešiteli, milá řešitelko,

pokud ses již někdy s tětivovými čtyřúhelníky setkal či setkala, můžeš směle tento text přeskočit a vrhnout se rovnou na úlohy 2. série. Pakliže o nich ovšem mnoho nevíš, máš nyní možnost se vše důležité dozvědět.

Co je tětivový čtyřúhelník?

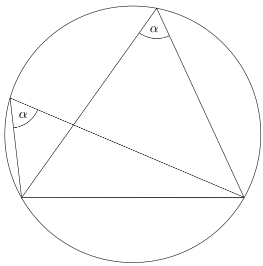
Tětivový čtyřúhelník je čtyřúhelník, jemuž lze opsat kružnici.

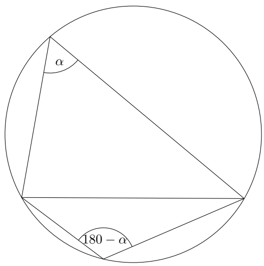
Jak poznám, že je čtyřúhelník tětivový?

Je samozřejmě možné postupovat podle definice a snažit se nalézt kružnici, na níž leží všechny jeho vrcholy. Ovšem mnohem šikovnější je použít následující dvě tvrzení. Tedy čtyřúhelník je tětivový, pokud

(i) je jedna z jeho stran vidět ze zbylých vrcholů pod stejným úhlem.
(ii) je jedna z jeho úhlopříček vidět ze zbývajících vrcholů pod úhly, jejichž součet je 180°.

Situaci ilustrují následující dva obrázky:





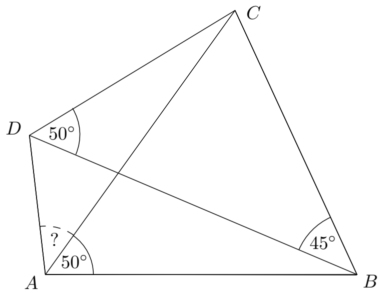
K čemu jsou tětivové čtyřúhelníky dobré?

Díky tomu, že podmínky (i) a (ii) jsou ekvivalentní s tím, že čtyřúhelník je tětivový, můžeme jejich platnost v každém takovém čtyřúhelníku využívat. A to dokonce v jejich silnější podobě, podle níž je **každá** strana ze zbylých dvou vrcholů vidět pod stejným úhlem a též označíme-li úhly při vrcholech A, B, C a D standartním způsobem, pak platí

$$\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180°.$$

Více napoví následující příklad.

Příklad. Určete úhel označený otazníkem.



Úhly $\sphericalangle BAC$ a $\sphericalangle BDC$ jsou shodné a kvůli tomu, že oba „koukají“ na úsečku BC, je čtyřúhelník $ABCD$ podle bodu (i) tětivový. To nyní využijeme. I úsečka CD musí nyní být vidět z bodů A a B pod stejným úhlem. Tedy $|\sphericalangle CAD| = |\sphericalangle CBD| = 45°$. Bez zjištění, že $ABCD$ je tětivový, bychom hodnotu onoho úhlu určit nemohli.

Do tohoto kratičkého textu se bohužel nevešly důkazy použitých tvrzení. Pokud o ně máš zájem, najdeš je ve středoškolské učebnici planimetrie nebo se můžeš zeptat své paní učitelky. Pokud obojí selže, neboj se napsat na náš mail, rádi Ti odpovíme.

2. série

Téma:	Tětivové čtyřúhelníky
Datum odeslání:	3. listopadu 2008

0. úloha (1 bod)

Pravý úhel je známá věc, ale existuje k němu do páru i levý? Víme, že když má čtyřúhelník dva protější úhly pravé, tak je tětivový. Jakpak se ale nazývá ten, co má proti sobě dva úhly levé? Fantazii ve výkladu slova levý se meze nekladou. (-:

1. úloha (3 body)

Monika má doma nádhernou sbírku tětivových čtyřúhelníků. Ta už je ovšem tak velká, že se ji Monika rozhodla protřídit. Nechala si jenom ty tětivové čtyřúhelníky, které mají obě úhlopříčky stejně dlouhé, takové se jí totiž líbí nejvíc. Ukažte, že všechny čtyřúhelníky, které Monice zůstaly, mají dvě strany rovnoběžné.

2. úloha (3 body)

V rovině leží rovnoběžník $ABCD$ a na jeho stranách AB, BC, CD a DA jsou postupně body W, X, Y a Z. Průsečík úseček WY a XZ si označíme S. Body jsou zvoleny tak šikovně, že čtyřúhelník $AWSZ$ je tětivový. Dokažte, že potom jsou tětivové i čtyřúhelníky $WBXS$, $XCYS$ a $YDZS$.

3. úloha (3 body)

Rovnostrannému trojúhelníku KLM opíšeme kružnici. Na kratším oblouku KL této kružnice si zvolíme bod Q. Pak z bodu M spustíme kolmice na přímky QK a QL a jejich paty označíme E a F. Ukažte, že trojúhelník MEF je rovnostranný.

4. ÚLOHA (5 BODŮ)

Miško si nejprve nakreslil pravidelný n-úhelník, pak si zakroužkoval tři jeho vrcholy a jimi určený trojúhelník si vystříhl. K Miškovu překvapení nebyl onen trojúhelník ledajaký, měl vnitřní úhly $24°$, $42°$ a $114°$. Pro jaké nejmenší n je to možné?

5. ÚLOHA (5 BODŮ)

Mějme čtyřúhelník $EFGH$ takový, že se dají sestrojit kružnice e, f, g a h se středy po řadě v bodech E, F, G a H tak, aby se kružnice e a g obě dotýkaly (vnějším dotykem) kružnic f a h. Ukažte, že pak body dotyku těchto kružnic tvoří tětivový čtyřúhelník.

6. ÚLOHA (5 BODŮ)

Je dána půlkružnice nad průměrem UV a její tětiva AB se středem S taková, že bod B neleží na UV. Patu kolmice z B na UV označme C. Ukažte, že úhel BCS se nemění, pokud s tětivou AB začneme pohybovat po celé polokružnici[1].

7. ÚLOHA (5 BODŮ)

Kružnice k a l mají společný střed S, ovšem l má menší poloměr. Na kružnici k zvolíme body P a Q tak, aby se přímka PQ dotýkala kružnice l v bodě T. Nyní na kružnici l najdeme body X a Y takové, aby s bodem P ležely v přímce a bod X byl blíž bodu P než bod Y. Střed úsečky PT označíme D. Bod, kde se protínají osy úseček DX a QY, označme K. Určete poměr $\frac{|PK|}{|QK|}$, víte-li, že bod K leží na přímce PQ.

8. ÚLOHA (5 BODŮ)

Kenny má svůj oblíbený pětiúhelník, který si pojmenoval $PRASE$. Platí v něm, že $|\sphericalangle RPA| = |\sphericalangle APS| = |\sphericalangle SPE|$ a $|\sphericalangle PRA| = |\sphericalangle PAS| = |\sphericalangle PSE|$. Průsečík přímek AE a RS budiž T. Dokažte, že přímka PT půlí úsečku AS.

Řešení 2. série

0. úloha

Pravý úhel je známá věc, ale existuje k němu do páru i levý? Víme, že když má čtyřúhelník dva protější úhly pravé, tak je tětivový. Jakpak se ale nazývá ten, co má proti sobě dva úhly levé? Fantazii ve výkladu slova levý se meze nekladou. (-:

Místo vzorového řešení uveřejňujeme nejzajímavější výklady levých úhlů a jimi tvořených čtyřúhelníků, které jste nám poslali. Jejich autoři se mohou těšit na čokoládu.

Karel Tesař

Pod pojmem levý úhel si představuji doplněk k úhlu pravému → úhel o velikosti $270°$. Všechny n-úhelníky, které mají levý úhel, jsou nekonvexní.

Karlovy n-úhelníky: Jmenují se tak proto, že jsem je vymyslel já a momentálně mě lepší název nenapadl (snad až někdy, až se něčím proslaví … vlastně to už budou známé jako Karlovy, tak by nemělo cenu jejich název měnit). Tak tedy Karlovy n-úhelníky: Karlovy n-helníky jsou takové

[1] Tedy tak, aby AB byla stále tětiva a její délka se neměnila. Poloha bodů S a C se samozřejmě s její polohou mění.

nekonvexní n-úhelníky, které mají naproti každému levému úhlu další levý úhel. Aby ještě hezky vypadaly, tak nesmí mít jiné nekonvexní úhly než levé a zároveň nesmí mít více levých úhlů vedle sebe.

Základní z Karlových n-úhelníků je *Karlův šestiúhelník*. Speciálním případem Karlova šestiúhelníka je šestiúhelník *rovnolevý*, který má všechny hrany, které vedou z levého úhlu, stejně dlouhé. Dalším speciálním případem je *tečno-tětivový* Karlův šestiúhelník. Takovému šestiúhelníku lze sestrojit kružnice, ve které je spojnice levých vrcholů tětivou a zbylé dvě strany jsou tečnami ke kružnici.

Další Karlovy n-úhelníky (8, 10, 12 …) mohou mít obdobné vlastnosti jako šestiúhelník. Dají se s nimi (ať už jednotlivě, nebo kombinací) vytvořit zajímavé obrazce, ale s tím už si jistě vyhrajete sami. (-:

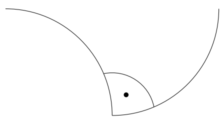
Existuje ještě mnoho speciálních případů Karlovo n-úhelníků: Například dvanáctiúhelník, který má každý třetí úhel levý a zbylé úhly pravé. Když si tento obrazec představíte, tak zjistíte, že jeho obsah tvoří takovou křižovatku. Když k tomu ještě přidáte rovnostrannost, tak získáme obyčejný kříž.

Karel Kolář

Levý úhel – to je tak zákeřný úhel, až hanba mluvit. Pokaždé má jinou velikost – když už ji člověk jednou změří, tak ji hned změní. Chová se záludně a záhadně. Nechce být přesně definovatelný a vzpouzí se i vystupovat jako proměnná, protože to je pak chvíli zákeřně konstantní a pak se zase promění. Jediná jeho zásada je vyhýbat se velikosti $k \cdot \frac{\pi}{2}$, kde $k \in \mathbb{Z}$, protože za žádnou cenu nechce mít nic společného s úhlem pravým, se kterým se tak dobře počítá.

Jiří Hadrava

Levý úhel je v podstatě pravý úhel, není však svírán dvěma polopřímkami, ale dvěma křivkami. Takto:

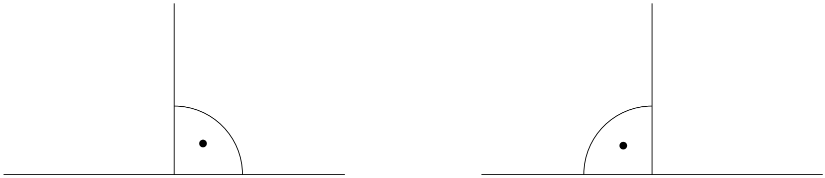


(Udělá-li se od bodu X kružnice o libovolném poloměru a bod X se spojí s oběma průsečíky kružnice s křivkami, vznikne pravý úhel.) Čtyřúhelník, který má proti sobě dva levé úhly, se nazývá čtyřúhelníkem *lukovým*. (-:

Poslední řešení, které vám přinášíme, je dílem **Jana Kotíka**. Příliš se nezabývá geometrickými vlastnostmi levých úhlů, o to zaníceněji je ale sepsáno. A ať se na pravý úhel díváte zprava nebo zleva, jistě budete souhlasit s tím, že Honzovo názvosloví podezřele připomíná chemické. (-:

Filosofické zamyšlení nad emancipací leváků

A je to tu zas! Další případ pokusu leváků o emancipaci s praváky! Jako by nestačilo, že se pro ně vyrábí speciální fotoaparáty či nůžky. Nyní se snaží i o speciální označení v oblasti matematiky! Na mušku si nevzali nic jiného než samotný pravý úhel. Copak on může za to, že se jmenuje pravý? Pokud připustíme, že značka pro pravý úhel je následující



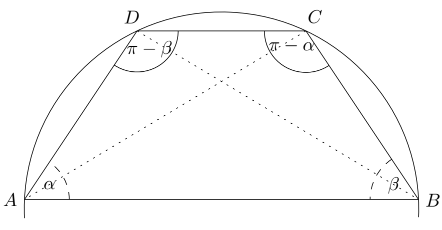
tak pro leváky to bude následující značka levého úhlu:

Pokud pro čtyřúhelník, jenž má dva protější úhly pravé, platí, že je tětivový, tak pro leváky bude mít následující název: Pro čtyřúhelník, jenž má dva protější úhly levé pohledem leváka, platí, že je ekvivalentní s tětivovým čtyřúhelníkem (pravý úhel = levý úhel z pohledu leváků) a nese název 1,2,3,4-L-tětivový čtyřúhelník. Názvosloví bylo určeno podle emancipovaných pravidel XXV. sjezdu leváků.

1. úloha

Monika má doma nádhernou sbírku tětivových čtyřúhelníků. Ta už je ovšem tak velká, že se ji Monika rozhodla protřídit. Nechala si jenom ty tětivové čtyřúhelníky, které mají obě úhlopříčky stejně dlouhé, takové se jí totiž líbí nejvíc. Ukažte, že všechny čtyřúhelníky, které Monice zůstaly, mají dvě strany rovnoběžné.

Označme vrcholy A, B, C, D a uhly α, β, γ, δ. Keďže je tento štvoruholník tetivový, musí platiť $\gamma = \pi - \alpha$ a $\delta = \pi - \beta$. Keďže uhlopriečky sú rovnaké, musí tiež platiť $\alpha = \beta$ alebo $\alpha = \delta$ (rovnako dlhým tetivám náležia rovnako veľké obvodové uhly). V oboch prípadoch bude súčet dvoch susedných uhlov π. V prvom prípade súčet uhlov β a γ a v druhom prípade súčet uhlov γ a δ. To je však postačujúca podmienka na to, aby boli dve strany rovnobežné. Prípad $\alpha = \beta$ máte na obrázku.

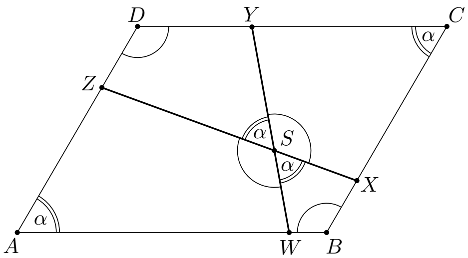


Díky stejným obvodovým úhlům nad úhlopříčkami je $\alpha = \beta$.

2. úloha

V rovině leží rovnoběžník $ABCD$ a na jeho stranách AB, BC, CD a DA jsou postupně body W, X, Y a Z. Průsečík úseček WY a XZ si označíme S. Body jsou zvoleny tak šikovně, že čtyřúhelník $AWSZ$ je tětivový. Dokažte, že potom jsou tětivové i čtyřúhelníky $WBXS$, $XCYS$ a $YDZS$.

Označme α velikost úhlu DAB.



Protože $ABCD$ je rovnoběžník, platí $|\sphericalangle BCD| = \alpha$, $|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle ADC| = 180° - \alpha$. Tedy zřejmě i $|\sphericalangle XCY| = \alpha$, $|\sphericalangle WBX| = |\sphericalangle YDZ| = 180° - \alpha$. Ze zadání navíc víme, že $AWSZ$ je tětivový čtyřúhelník, takže $|\sphericalangle WAZ| + |\sphericalangle WSZ| = 180°$ (neboli $|\sphericalangle WSZ| = 180° - \alpha$). Nakonec si uvědomíme, že $|\sphericalangle XSY| = |\sphericalangle WSZ| = 180° - \alpha$ a $|\sphericalangle WSX| = |\sphericalangle YSZ| = 180° - |\sphericalangle WSZ| = \alpha$. Odtud již snadno dostaneme trojici rovností

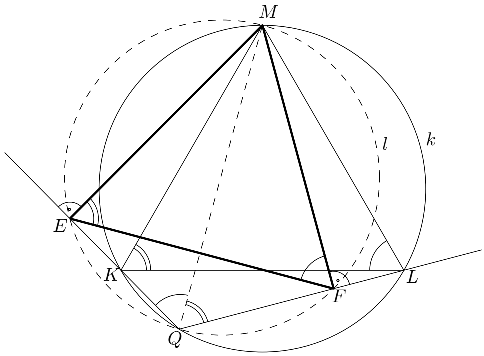
$$
\begin{aligned}
|\sphericalangle WBX| + |\sphericalangle WSX| &= 180°,\\
|\sphericalangle XCY| + |\sphericalangle XSY| &= 180°,\\
|\sphericalangle YDZ| + |\sphericalangle YSZ| &= 180°,
\end{aligned}
$$

z nichž vyplývá, že čtyřúhelníky $WBXS$, $XCYS$ a $YDZS$ jsou rovněž tětivové.

3. úloha

Rovnostrannému trojúhelníku KLM opíšeme kružnici. Na kratším oblouku KL této kružnice si zvolíme bod Q. Pak z bodu M spustíme kolmice na přímky QK a QL a jejich paty označíme E a F. Ukažte, že trojúhelník MEF je rovnostranný.

Nech k je kružnica opísaná trojuholníku KLM. Všetky body štvoruholníka $KQLM$ ležia na kružnici k, preto je tento štvoruholník tetivový. V štvoruholníku $EQFM$ je súčet protiľahlých uhlov $|\sphericalangle QEM| + |\sphericalangle QFM| = 180°$ (oba sú podľa zadania pravé), preto je tento štvoruholník tiež tetivový; nech je jeho opísaná kružnica l.



Uhly $\sphericalangle LKM$ a $\sphericalangle LQM$ sú obvodové uhly príslušné k tetive LM v kružnici k a $\sphericalangle FQM$ a $\sphericalangle FEM$ sú obvodové k tetive FM v kružnici l. Platí teda

$$|\sphericalangle LKM| = |\sphericalangle LQM| \cong |\sphericalangle FQM| = |\sphericalangle FEM| = 60^\circ.$$

Uhly $\sphericalangle KLM$ a $\sphericalangle KQM$ sú obvodové k tetive KM v kružnici k a $\sphericalangle EQM$ a $\sphericalangle EFM$ sú obvodové k tetive EM v kružnici l. Platí teda

$$|\sphericalangle KLM| = |\sphericalangle KQM| \cong |\sphericalangle EQM| = |\sphericalangle EFM| = 60^\circ.$$

V trojuholníku EFM potom platí $|\sphericalangle EFM| = |\sphericalangle FEM| = 60^\circ$, preto je tento trojuholník rovnostranný.

4. úloha

Miško si nejprve nakreslil pravidelný n-úhelník, pak si zakroužkoval tři jeho vrcholy a jimi určený trojúhelník si vystřihl. K Miškovu překvapení nebyl onen trojúhelník ledajaký, měl vnitřní úhly 24°, 42° a 114°. Pro jaké nejmenší n je to možné?

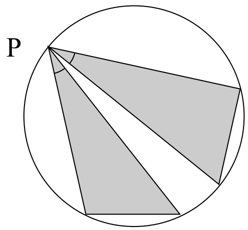
Riešenie podľa Tomáša Pavlíka:

Nakreslime si kružnicu opísanú Miškovmu n-uholníku a všetky uhlopriečky vychádzajúce z jedného jeho bodu P. Tým sa nám uhol pri P rozdelí na niekoľko menších uhlov. Dokážeme si, že všetky tieto uhly musia mať rovnakú veľkosť φ.

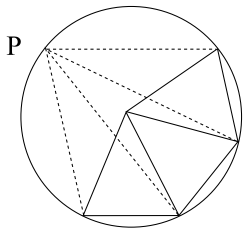
Prvý spôsob: Rovnako dlhé tetivy kružnice je z ľubovoľného bodu, ktorý leží v rovnakej polrovine určenej tetivami ako stred kružnice, vidno pod rovnakým uhlom. A to je presne náš prípad.

Druhý spôsob: Všetkým týmto uhlom prislúcha stredový uhol, ktorý je $1/n$ plného kruhu. Obvodové uhly sú polovica stredového uhlu, takže musia byť zhodné.

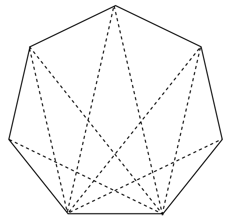
Tretí spôsob: Vezmime si v mnohouholníku pevnú jednu stranu a postupne si vyberme ľubovoľné dva iné vrcholy mnohouholníka. Uhly určené našou stranou a oboma vrcholmi musia byť rovnaké, pretože štvoruholník určený našou stranou a vrcholmi je tetivový. Teda všetky uhly tvorené vrcholmi nad touto stranou sú zhodné. Všimnime si však, že trojuholníky, ktoré nám vznikli, vieme presne preskladať do pôvodného obrázka tak, aby ich zhodné uhly ležali pri spoločnom bode.



Prvý spôsob



Druhý spôsob



Tretí spôsob

Z tohoto pozorovania je zrejmé, že nech si Miško vystrihol svoj trojuholník akokoľvek, jeho uhly musia byť takým násobkom φ, koľko strán mnohouholníka leží na protiľahlom oblúku kružnice. Počet strán Miškovho mnohouholníka sa teda musí dať rozdeliť v pomere $24 : 42 : 114$, čo je v základnom tvare $4 : 7 : 19$. Za žiadnou zo strán trojuholníka však nemôže ležať menej vrcholov, pretože ak by sme tento počet zmenšili, nevedeli by sme zachovať pomer. Preto najmenší počet strán, ktorý mohol mať Miškov mnohouholník, je $4 + 7 + 19 = 30$.

Iné riešenie:
Zakreslime si do obrázka stred S kružnice opísanej mnohouholníku. Z vety o stredovom a obvodovom uhle vieme, že uhly, z ktorých je z S vidno jednotlivé strany trojuholníka, sú dvojnásobky uhlov trojuholníka. (Trojuholník je tupouhlý, takže pozor na to, kde tie uhly budú ležať.)[2] Všetky tieto uhly však musia byť deliteľné uhlom $360°/n$, pretože úsečky z S do vrcholov delia mnohouholník na n zhodných trojuholníkov. Označme si teda jednotlivé násobky x, y, z a zostrojme rovnice:

$$x\frac{360°}{n} = 48°, \qquad y\frac{360°}{n} = 84°, \qquad z\frac{360°}{n} = 228°.$$

Po úprave:

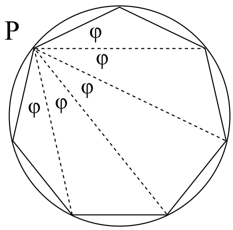
$$15x = 2n, \qquad 30y = 7n, \qquad 30z = 19n.$$

Aby sústava mohla byť splnená, zrejme n musí byť deliteľné 30. Najmenšie také n je 30 a voľbou správnych vrcholov ľahko overíme, že 30-uholník úlohe vyhovuje.

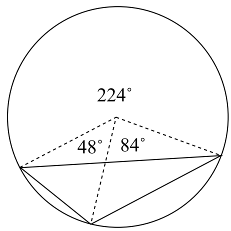
Náznak riešenia podľa Víta Musila:
Využijeme pozorovanie, že mnohouholník je symetrický na otáčanie podľa stredu S. Vezmime si z predchádzajúceho riešenia tú stranu trojuholníka, ktorú je vidno z S pod uhlom $84°$. Označme jej koncové body A_0 a A_1. Otočme teraz trojuholníkom ΔSA_0A_1 okolo bodu S tak, aby bod A_0 splynul s pôvodným bodom A_1, bod A_1 sa tým dostane na novú pozíciu A_2. Bod A_2 však tiež musí byť vrcholom mnohouholníka.

Takýmto otáčaním môžeme generovať vrcholy mnohouholníka dovtedy, kým sa nám nezačnú opakovať. Vtedy si uvedomíme, že sme dostali na obvode kružnice 30 bodov, ktoré nutne musia patriť do Miškovho mnohouholníka, pričom pôvodný trojuholník bude mať medzi nimi svoje vrcholy.

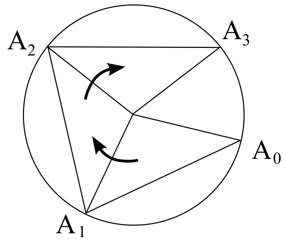
[2] Pre fajnšmekrov: Veta o stredovom a obvodovom uhle s orientovanými uhlami platí za každých podmienok, takže nie je čo rozoberať: $2\widehat{A_1VA_2} = \widehat{A_1SA_2}$.



Prvé riešenie



Druhé riešenie



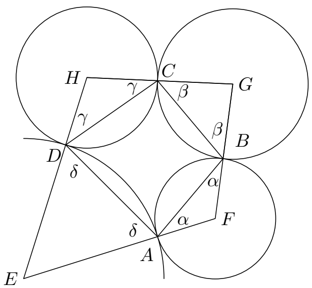
Tretie riešenie

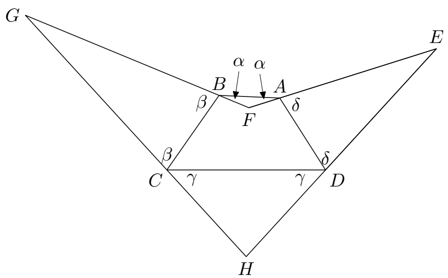
5. úloha
Mějme čtyřúhelník $EFGH$ takový, že se dají sestrojit kružnice e, f, g a h se středy po řadě v bodech E, F, G a H tak, aby se kružnice e a g obě dotýkaly (vnějším dotykem) kružnic f a h. Ukažte, že pak body dotyku těchto kružnic tvoří tětivový čtyřúhelník.

Nejprve předpokládejme, že $EFGH$ je konvexní. Označme body dotyku kružnic A, B, C, D. Trojúhelníky FAB, GBC, HCD, EAD jsou rovnoramenné, označme úhly, které svírají ramena se základnou postupně α, β, γ, δ. Teď trochu počítejme:

$$\begin{aligned}|\sphericalangle DAB| + |\sphericalangle DCB| &= 180^\circ - (\delta + \alpha) + 180^\circ - (\beta + \gamma)\\ &= 180^\circ - (\alpha + \beta) + 180^\circ - (\gamma + \delta) = |\sphericalangle ABC| + |\sphericalangle CDA|.\end{aligned}$$

Součet protějších úhlů je tedy 180°, tudíž je čtyřúhelník $ABCD$ tětivový.





Pro $EFGH$ nekonvexní se řeší úloha podobně. Zvolme stejné označení jako v konvexním případě. I teď jsou trojúhelníky FAB, GBC, HCD, EAD rovnoramenné (viz obrázek). Opět počítejme:

$$\begin{aligned}|\sphericalangle DAB| + |\sphericalangle DCB| &= [(180^\circ - \delta) + \alpha] + 180^\circ - (\gamma + \beta)\\ &= [(180^\circ - \beta) + \alpha] + 180^\circ - (\gamma + \delta) = |\sphericalangle ABC| + |\sphericalangle CDA|.\end{aligned}$$

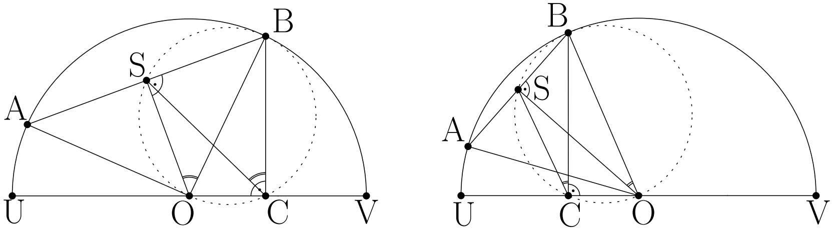
Tudíž čtyřúhelník $ABCD$ je opět tětivový.

6. úloha
Je dána půlkružnice nad průměrem UV a její tětiva AB se středem S taková, že bod B neleží na UV. Patu kolmice z B na UV označme C. Ukažte, že úhel BCS se nemění, pokud s tětivou

AB začneme pohybovat po celé polokružnici[3].

První řešení

Nejprve si dokreslíme střed půlkružnice UV a označíme ho O.



Úlohu rozdělíme na tři části dle polohy bodu C na průměru UV.

Pokud bod C leží uvnitř úsečky OV (1. obrázek), ze zadání víme, že C je pata kolmice z bodu B na průměr UV, tudíž úhel BCO je pravý. Dále S je střed tětivy AB v rovnoramenném trojúhelníku ABO, tudíž jsou OS a AB kolmé, a tedy i úhel OSB je pravý. Součet těchto pravých úhlů BCO a OSB je tedy $180°$, a proto čtyřúhelník $OCBS$, ve kterém jsou zmiňované úhly protilehlé, je tětivový a lze mu opsat kružnici. To ovšem znamená, že úhly BCS a BOS jsou stejné (pod oběma je vidět tětiva BS kružnice opsané $OCBS$). Ale také v rovnoramenném trojúhelníku OBA, kde BS je těžnice a výška, platí $2|\sphericalangle BOS| = |\sphericalangle BOA|$. Avšak teď už máme vyhráno, protože úhel AOB se při pohybu tětivy AB na půlkružnici nad UV nemění (jedná se o úhel středový, příslušný tětivě AB). Platí totiž rovnost

$$|\sphericalangle BCS| = |\sphericalangle BOS| = \frac{1}{2}|\sphericalangle BOA|,$$

která zaručuje konstantní velikost úhlu BCS při pohybu tětivy AB po dané půlkružnici.

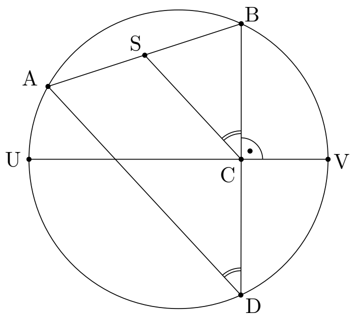
Pokud bude bod C splývat s bodem O, pak jednoduše počítáme úhly: $|\sphericalangle BCS| = |\sphericalangle BOS| = = \frac{1}{2}|\sphericalangle BOA|$. Jenže velikost úhlu BOA se už při pohybu tětivy AB nemění.

Třetí možnost bude ta, při které bude bod C ležet uvnitř úsečky UO (2. obrázek). Potom máme ze zadání pravé úhly $|\sphericalangle OCB| = \frac{\pi}{2} = |\sphericalangle OSB|$. Jenže to neznamená nic jiného než tětivovost čtyřúhelníku $COBS$ (tětiva OB lze vidět z S i z C pod pravým úhlem). Z tohoto tětivového čtyřúhelníku máme rovnost úhlů SCB a SOB, které jsou oba vidět nad tětivou SB. Ale nyní už platí $|\sphericalangle BCS| = |\sphericalangle BOS| = \frac{1}{2}|\sphericalangle BOA|$, a tudíž se velikost úhlu SCB při pohybu tětivou AB nemění ani v tomto případě.

Druhé řešení

Hlavní idea tohoto řešení spočívá v dokreslení bodu D, což bude bod osově souměrný s bodem B podle osy UV.

[3] Tedy tak, aby AB byla stále tětiva a její délka se neměnila. Poloha bodů S a C se samozřejmě s její polohou mění.



Dle tohoto označení bod D jistě leží na kružnici opsané průměru UV a bod C je středem úsečky BD. Jenže taktéž bod S je středem úsečky AB, a proto úsečka SC je střední příčkou v trojúhelníku ABD rovnoběžná se stranou AD. Pak ale $|\sphericalangle BCS| = |\sphericalangle BDA|$. Jenže při pohybu tětivou AB po půlkružnici sestrojené nad UV se úhel BDA nemění (je to obvodový úhel nad konstatntní tětivou $|AB|$), a proto se nemění ani úhel BCS.

7. úloha

Kružnice k a l mají společný střed S, ovšem l má menší poloměr. Na kružnici k zvolíme body P a Q tak, aby se přímka PQ dotýkala kružnice l v bodě T. Nyní na kružnici l najdeme body X a Y takové, aby s bodem P ležely v přímce a bod X byl blíž bodu P než bod Y. Střed úsečky PT označíme D. Bod, kde se protínají osy úseček DX a QY, označme K. Určete poměr $\frac{|PK|}{|QK|}$, víte-li, že bod K leží na přímce PQ.

Základní myšlenkou bude ukázat, že čtyřúhelník $XYQD$ je tětivový. K tomu použijeme nástroj zvaný mocnost bodu ke kružnici. Připomeňme si dvě základní tvrzení o mocnosti[4]:

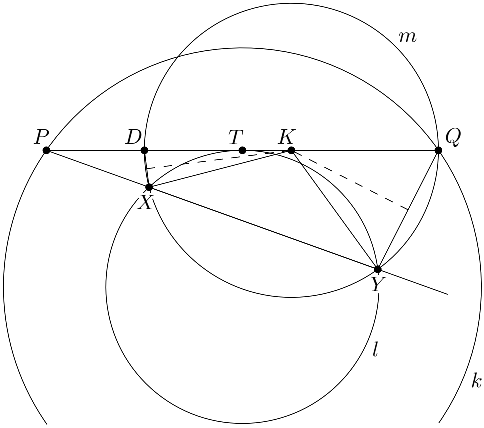
(i) Mějme kružnici k a bod P, jímž vedeme přímky p_1, p_2 protínající k v bodech A_1, B_1 a A_2, B_2, pak platí $|PA_1| \cdot |PB_1| = |PA_2| \cdot |PB_2|$ (v případě, že bychom za p_2 volili tečnu dotýkající se k v bodě T, pak platí $|PA_1| \cdot |PB_1| = |PT| \cdot |PT|$). Číslo $|PA_1| \cdot |PB_1|$ nazýváme mocnost bodu P ke kružnici k.

(ii) Mějme konvexní čtyřúhelník $A_1A_2B_1B_2$. Nechť se přímky A_1A_2, B_1B_2 protnou v bodě P a platí $|PA_1| \cdot |PA_2| = |PB_1| \cdot |PB_2|$. Potom už nutně body A_1, A_2, B_1, B_2 leží na kružnici.

Nyní již k úloze. Nejdříve použijeme tvrzení (i) a vyjádříme mocnost bodu P ke kružnici l dvěma způsoby: $|PX| \cdot |PY| = |PT| \cdot |PT|$. Dále si všimneme, že $|PT| \cdot |PT| = \left(\frac{1}{2}|PT|\right) \cdot (2|PT|) = |PD| \cdot |PQ|$. Dohromady máme $|PX| \cdot |PY| = |PD| \cdot |PQ|$ a použitím tvrzení (ii) dostaneme, že čtyřúhelník $XYQD$ (ten určitě je konvexní) je tětivový (lze mu opsat kružnici m). Protože osa tětivy DX stejně jako osa tětivy QY prochází středem kružnice m, je tímto středem bod K. Až teď využijeme, že bod K leží na přímce PQ, což nám tedy říká, že K půlí úsečku DQ. Jelikož triviálně $|DQ| = \frac{3}{4}|PQ|$, je $|KQ| = \frac{3}{8}|PQ|$ a hledaný poměr je $\frac{|PK|}{|QK|} = \frac{5}{3}$.

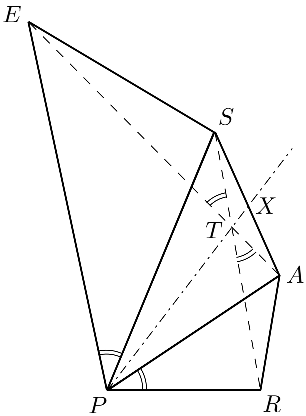
---

[4]Pokud tato tvrzení neznáš, zkus si je dokázat a nebude-li se Ti to dařit, určitě je najdeš dokázaná na internetu.



8. úloha
Kenny má svůj oblíbený pětiúhelník, který si pojmenoval $PRASE$. Platí v něm, že $|\sphericalangle RPA| = |\sphericalangle APS| = |\sphericalangle SPE|$ a $|\sphericalangle PRA| = |\sphericalangle PAS| = |\sphericalangle PSE|$. Průsečík přímek AE a RS budiž T. Dokažte, že přímka PT půlí úsečku AS.

Ze zadání víme, že trojúhelníky $\triangle PRA$, $\triangle PAS$ a $\triangle PSE$ jsou podobné. V takových případech bývá nesmírně užitečné uvážit zobrazení, které tyto podobné útvary na sebe převádí. A opravdu, pokud složíme otočení o úhel $\sphericalangle RPA$ se stejnolehlostí podle bodu P s koeficientem $\frac{|PR|}{|PA|}$, získáme zobrazení[5], které převádí $\triangle PRA$ na $\triangle PAS$ a též $\triangle PAS$ na $\triangle PSE$ (zde využíváme podobnost všech tří trojúhelníků, detaily si kdyžtak rozmysli).



Speciálně tedy převádí úsečku SR na úsečku AE. To ovšem znamená, že tyto úsečky mezi

[5]Toto zobrazení se jmenuje spirální podobnost.

sebou svírají úhel otočení (stejnolehlost zachovává úhly). Tedy víme, že

$$|\sphericalangle RTA| = |\sphericalangle RPA| \quad \text{a} \quad |\sphericalangle STE| = |\sphericalangle SPE|.$$

Odkud plyne, že čtyřúhelníky $PRAT$ a $PTSE$ jsou tětivové.

Rovnost úhlů $|\sphericalangle PRA| = |\sphericalangle PAS|$ interpretujeme jako rovnost obvodového a úsekového úhlu, což nám zaručí, že přímka AS je tečnou kružnice opsané $\triangle PRA$ ($PRAT$). Obdobně odvodíme, že přímka AS je i tečnou kružnice opsané $\triangle PSE$ ($PTSE$). Označme nyní $X = PT \cap AS$ a zapišme mocnost[6] bodu X k oběma kružnicím.

$$|XT||XP| = |XS|^2, \quad |XT||XP| = |XA|^2.$$

Ze srovnání máme $|XS|^2 = |XA|^2$ a délky úseček jsou kladná čísla, tedy $|XS| = |XA|$ a jsme hotovi.

[6]Bod X leží na spojnici průsečíků obou kružnic, této přímce se říká chordála a body na ní mají k oběma kružnicím stejnou mocnost.