Povídání ke třetí sérii

Milý řešiteli, jsou-li pro Tebe polynomy úplnou novinkou, máš nyní možnost se s nimi trochu seznámit. Nuže čti.

Co je polynom?

O funkci $f(x)$ řekneme, že je *polynomem*, jestliže je ve tvaru

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

kde číslům a_i říkáme koeficienty polynomu $f(x)$. Navíc Ti ještě povíme, že je-li $a_n \neq 0$, říkáme číslu n *stupeň polynomu*. Tedy například

$$x^2 + x + 1 \qquad x^{17} - 1 \qquad x + \sqrt{2} \qquad 1 \qquad 0$$

jsou všechno polynomy, jejichž stupně jsou po řadě čísla $2, 17, 1, 0$ a 0. Hodí se též vědět, že koeficientu a_n, tedy tomu u nejvyšší mocniny, se někdy říká *vedoucí koeficient*.

Kořeny polynomu

Další pojem, s nímž se budeš setkávat v úlohách, je *kořen polynomu*. Kořeny polynomu $P(x)$ jsou taková reálná čísla a, pro něž platí $P(a) = 0$.

Kupříkladu polynom $P(x) = x^2 + 2x$ má dva kořeny, a to čísla 0 a -2, naopak polynom $x^4 + 1$ nemá žádný kořen, protože nabývá pouze kladných hodnot.

Není těžké si uvědomit, že když řešíš kvadratickou rovnici, pak vlastně hledáš kořeny polynomu stupně 2. Dodejme, že sice existují nějaké vzorečky pro hledání kořenů polynomů stupně 3 a 4, ale jsou velmi složité a nebudeš je potřebovat[1].

Součinový tvar polynomu

Práce s kořeny polynomu úzce souvisí s takzvaným součinovým tvarem. Vezměme si například polynom $x^2 + 5x + 6$ a upravme ho do tvaru $(x + 2)(x + 3)$. Známe-li tento rozklad, je již jasné, že kořeny tohoto polynomu jsou -2 a -3.

Provádět takovéto rozklady u polynomů vyšších stupňů samozřejmě není vůbec lehké a mnohdy to ani nejde. Často nám však může součinový tvar pomoci. Více napoví příklad.

Příklad. Určete kořeny polynomu $P(x) = x^3 - x^2 - x + 1$, víte-li, že jeden z nich je 1.

Dodatečnou znalost využijeme k úpravě polynomu na součinový tvar. Pokusíme se totiž z polynomu vytknout člen $(x-1)$, který by se podle všeho měl v hledaném rozkladu objevit. Proveďme tedy úpravu

$$x^3 - x^2 - x + 1 = (x^3 - x^2) - (x - 1) = x^2(x - 1) - (x - 1) = (x^2 - 1)(x - 1).$$

Všimněte si obzvlášť prvního kroku, v němž se k sobě sdružily násobky $(x - 1)$. Nyní již rozklad podle známého vzorce dokončíme a máme

$$P(x) = (x + 1)(x - 1)^2.$$

---

[1] Pro vyšší stupně už takový vzoreček ani sestavit nelze.

A kořeny jsou tedy čísla 1 a -1.

Poučení tedy zní, že známe-li nějaký kořen a polynomu, můžeme vytknout $(x-a)$ a započít tak rozklad na kořenové činitele. Takové vytýkání lze sice provést vždy, nicméně občas může být docela namáhavé správně sdružit násobky $(x-a)$, proto existuje i jiná metoda, jak toto spolehlivě provádět. Jmenuje se dělení polynomu polynomem, a pokud ji budeš potřebovat, neboj se oslovit svou paní učitelku nebo nám napsat.

Obecně tedy nemůžeme o rozkladu polynomu na součinový tvar říci nic (jelikož nevíme, kolik má kořenů), ovšem kdykoliv víme o nějakém čísle, že je jeho kořenem, pak můžeme prohlásit, že se jeho kořenový činitel objeví v našem rozkladu. Dokonce řekne-li nám někdo, že daný polynom má třeba pět kořenů, víme pak, že součinový tvar tohoto polynomu se skládá z alespoň pěti členů. **Všeobecně platí, že práce se součinovým tvarem je velmi účinnou zbraní při řešení úloh o polynomech.**

Nyní už snadno odvodíme dvě důležitá tvrzení.

Tvrzení. *Nenulový polynom stupně n má nejvýše n kořenů.*

Takový polynom se zkrátka nedá zapsat jako součin více než n závorek stupně 1.

Tvrzení. *Víme-li o polynomu*

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

že má n reálných kořenů, které si nazveme $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$, pak můžeme psát

$$P(x) = a_n (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_n).$$

Pokud součinový tvar roznásobíme, získáme vztahy mezi kořeny a koeficienty známé též jako Viètovy vztahy. Tyto vztahy nabývají přehlednější podobu, pokud $a_n = 1$ a též spíše pro polynomy nižších stupňů. Schválně si to zkus pro polynom třetího stupně.

A na závěr přidáme jedno tvrzení o polynomech s celočíselnými koeficienty. Ještě předtím si však objasníme, že číslo $a-b$ dělí číslo $a^n - b^n$, kdykoliv a, b jsou celá čísla a n je přirozené.

Podíváme-li se na polynom proměnné a s předpisem $P(a) = a^n - b^n$, vidíme, že b je jeho kořenem, tedy člen $(a-b)$ je možné z polynomu vytknout. Takže $a-b$ vskutku dělí $a^n - b^n$.

Tvrzení. *Je-li $P(x)$ polynom s celočíselnými koeficienty, pak pro každá celá čísla a, b platí $a-b \mid P(a)-P(b)$.*

Zde stačí napsat

$$P(a) - P(b) = a_n(a^n - b^n) + a_{n-1}(a^{n-1} - b^{n-1}) + \cdots + a_1(a-b)$$

a z předchozího tvrzení vidíme, že každý člen je násobkem $a-b$, tedy i celý výraz.

3. série

Téma:	Polynomy
Datum odeslání:	1. prosince 2008

0. úloha (1 bod)

Jaký je tvůj nejoblíbenější polynom? A proč zrovna on?

1. ÚLOHA (3 BODY)

Určete všechna reálná čísla q tak, aby polynomy $P(x) = 3x + q$ a $Q(x) = x^2 + 3x + q$ měly společný kořen.

2. ÚLOHA (3 BODY)

Maje dlouhou chvíli, vymyslel si Luboš reálná čísla b, B a zjistil, že pro každé reálné x platí nerovnosti

$$x^2 + 2bx + 1 \geq 0$$

$$x^2 + 2Bx + 1 \geq 0$$

Myslí si, že pro každé reálné x bude platit i

$$x^2 + 2bBx + 1 \geq 0$$

Pomožte mu to dokázat.

3. ÚLOHA (3 BODY)

Pro která přirozená $n \geq 2$ je výraz $n^3 - n^2 + n - 1$ prvočíslo?

4. ÚLOHA (5 BODŮ)

Polynom $x^3 - 3x + 1$ má tři reálné kořeny, které označíme α, β, γ. Napište polynom třetího stupně, jehož kořeny jsou čísla $\alpha + 1, \beta + 1, \gamma + 1$, a svoji odpověď zdůvodněte.

5. ÚLOHA (5 BODŮ)

Mějme polynom $P(x)$ s celočíselnými koeficienty, o kterém navíc víme, že $P(0) = 1$. Určete, jaký je největší možný počet n navzájem různých celých čísel $x_1, x_2, \ldots, x_n$ takových, aby $P(x_1) = P(x_2) = \cdots = P(x_n) = 2008$.

6. ÚLOHA (5 BODŮ)

Pavel si napsal polynom $P(x)$ s celočíselnými koeficienty a zjistil, že má alespoň jeden celočíselný kořen. Nyní Zuzce pokaždé řekne nějaké přirozené číslo k a chce po ní, aby mezi čísly $P(0), P(1), \ldots, P(k-1)$ našla takové, které je dělitelné[2] číslem k. Dokažte, že se to Zuzce vždy podaří.

7. ÚLOHA (5 BODŮ)

Pavel s Kennym si každý vymysleli kvadratický polynom s kladným vedoucím koeficientem a všimli si, že platí ohromně zajímavá věc. Kdykoliv jeden z nich dosadí do svého polynomu reálné číslo tak, že mu vyjde druhá mocnina přirozeného čísla, pak při dosazení téhož čísla vyjde druhá mocnina přirozeného čísla i tomu druhému z nich. Dokažte, že pokud označíme $R(x)$ součin oněch dvou polynomů, pak existuje polynom $Q(x)$ takový, že platí $R(x) = Q(x)^2$.

8. ÚLOHA (5 BODŮ)

Mějme n navzájem různých celých čísel $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Dokažte, že polynom $f(x) = (x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_n) - 1$ nelze zapsat jako součin polynomů $g(x), h(x)$ s celočíselnými koeficienty, které jsou oba stupně menšího než n.

---

[2] Číslo 0 je dělitelné každým přirozeným číslem.

Řešení 3. série

0. úloha
Jaký je tvůj nejoblíbenější polynom? A proč zrovna on?

Sešlo se nám celých 15 řešení, jejichž autoři popisovali nejrůznější polynomy plné oblíbených čísel, oblíbených písmen, oblíbených vlastností, které takovému nejoblíbenějšímu polynomu v žádném případě nemohou chybět ...

Na úvod zveřejníme úžasnou ódu na kvadratický polynom složenou nadějným mladým poetou **Honzíkem Vaňharou**.

MŮJ NEJMILEJŠÍ POLYNOM
A PROČ JE TO ZROVNA ON

Kvadratický
Předčí dycky
Všecky ostatní
Bo je tak zdatný
A ta jeho chlouba
Reálných kořenů zhouba
Parabolus velký
Je nade všechny celky
Má tvar který může
Zaujmouti všechny muže
A jen někdy potká to cosi
Tu přímku x-ový osy
A tak jej řeší
Čímž on i tak trochu hřeší
Proti řádu jenž zde stvořený
Svými imaginárními kořeny
A ten můj oblíben
Lepší než být políben
Od krásné ony
Je řešit kvadratické polynomy
Protože to je on!
Ten pravý šampion

Není pochyb, že po přečtení tohoto dojemného díla většina čtenářů zamáčkne slzu v oku, přehodnotí svůj dosavadní postoj k polynomům a kvadratický polynom se rázem stane i jejich nejoblíbenějším. Přečtěte si však, co píše **Vítek Musil**.

Mým jednoznačně nejoblíbenějším polynomem je polynom Taylorův. Ptáte se proč? Protože je to mistr převleků! Bez potíží se schová za mistra Sina, jeho bratra Cosina, věrně napodobí i samotného krále Logaritma. Tím to však nekončí, přátelé! Když chce, nerozeznáte jej od prince Arcuse von Sina či sester Tangens a Cotangens. A co víc je vrcholem umění než napodobit samotnou princeznu e^x. Snadno však můžete namítat: „A co Laurent? Ten je také schopný!“ Přátelé ... neberme si imaginární vzory!

Pokročilí jistě uznají, že Taylorův polynom je důstojným soupeřem polynomů kvadratických. A vy, kteří nerozumíte, co Vítek píše, nezoufejte. Rozšíříte-li řady matfyzáků, jistě potom i vy budete schopni plně docenit zmiňovanou mistrnou maskovací schopnost Taylorova polynomu. A je-li mezi vámi někdo, kdo o studium matematiky nestojí, bude se mu jistě líbit aspoň jedinečné řešení **Karla Koláře**, ze kterého jsem se toho o polynomech dozvěděla víc než za celou svoji matfyzáckou kariéru. :)

Tato otázka je opravdu záludná a žádající si hlubší zamyšlení. Co je to vlastně takový polynom? Polynom by mělo být seskupení menších nomů. A nom je označení pro správní jednotku ve starověkém Egyptě. Rozdělení na tyto menší správní celky sahá do předdynastické doby (před rokem 3 100 př. n. l.) a zůstalo ve víceméně nezměněné podobě po celé tři tisíce let. Když bych se měl vrátit k tomu, který polynom je můj nejoblíbenější, tak musím zmínit to, že v Egyptě byly pouze dva velké správní celky (Horní Egypt (z 22 nomů) a Dolní Egypt (z 20 nomů)), které původně byly samostatné státy (i když Dolní Egypt byl možná tvořen více nezávislými městskými státy) před 3 000 lety př. n. l. Dělení na Horní a Dolní Egypt se ovšem ujalo a i dnes se stále používá (minimálně při výuce dějepisu). Takže mám na výběr ze dvou polynomů – Horního Egypta a Dolního Egypta. Vzhledem k tomu, že ve starověkém Dolním Egyptě byla taková města jako Alexandrie, Heliopolis a Memfis, tak volba jasně padá právě na Dolní Egypt. Dolní Egypt je můj nejoblíbenější polynom.

To koukáte, co? Já také. Znovu a znovu čtu tento neuvěřitelný text a přemýšlím, jak je možné, že jsem o tomto skvělém polynomu nikdy neslyšela. A nyní jsem byla obohacena. Jaký to povznášející pocit!

A představte si, že i přes to, že existuje taková spousta polynomů, které mají veškeré předpoklady k tomu, aby se staly někým oblíbené, jeden z řešitelů, **Ondra Šmíd**, stále odolává a rozhodl se nás přesvědčit o tom, že v žádném případě nemá k žádnému polynomu žádný citový vztah.

Pravdivé tvrzení je: Nemám žádný oblíbený polynom. Mnozí lidé by se mnou nemuseli souhlasit a mohli by tedy mou větu negovat. Řekli by, že existuje alespoň jeden polynom, který se mi líbí. Jejich tvrzení bych ovšem znegoval, abych jim takzvaně „oplatil" jejich metody.

Pravdivost tvrzení, které jsem vyslovil, je podložena takto: V mém mozku neprobíhají takové bilologické děje, které by spolu s určitými vnějšími podněty v určité části mozkové tkáně vyvolávaly sebemenší reflexe v podobě citových pout, zde „oblíbenosti". Zmíněné „určité" vnější podněty jsou v mém případě i získávání informací z tzv. matematických disciplín. V těchto informacích je zahrnut mimo jiné i pojem polynom.

K tomuto i jiným pojmům si má mozková tkáň nevytváří žádnou citovou vazbu v podobě elektrických napětí mezi nervovými buňkami, zde „oblíbenost".

No tedy … uznale pokyvuji hlavou, vyznáš se jako doktor a mluvíš jako právník. Vážně jsi mě přesvědčil. Ale co teď? Ještě pořád si za tím stojíš? I po zveřejnění několika nádherných polynomů včetně odůvodnění, proč je ten který nejlepší? Nebo mám nabídnout ještě nějaký? Mám jich tady slušnou zásobu. Některé dokonce úspěšně maskují to, že to ani nejsou polynomy. To vše díky spoustě přednostem, kterými zaslepili své uctivatele.

Také mi přišel jeden polynom od **Káji Rezkové**, kterážto je velká šarlatánka a jasnovidka, neboť mě oslovuje nikoli „Mé milé PraSátko", nýbrž „Milá Háňo". A její polynom je dlouhatánský, strašně barevný a vysoce obskurní. Ba co víc, ještě mi píše, že mi nepoví, čím si získal její oblibu. Mám si na to přijít sama, abych se prý nenudila. Ale říká, že si můžu od někoho nechat poradit. Škoda že v černobílé verzi by se spousta jeho obskurních vlastností ztratila. Ale bude-li mi někdo chtít pomoci, nechť se ozve, mileráda mu barevnou verzi zašlu.

A Kája si za svůj důvtip zaslouží čokoládu. Stejně tak Karel Kolář s Honzíkem Vaňharou. I když to tedy bylo velmi těžké rozhodování.

Sláva polynomům! A PraSátku. :)

1. úloha
Určete všechna reálná čísla q tak, aby polynomy $P(x) = 3x + q$ a $Q(x) = x^2 + 3x + q$ měly společný kořen.

Stačí si všimnúť, že ak majú polynómy $P(x)$, $Q(x)$ spoločný koreň a, tak $P(a) = 0$, $Q(a) = 0$, a teda aj $Q(a) - P(a) = 0$. Preto $a^2 = 0 = a$. Potom $P(a) = 3a + q = q = 0$. Jediné riešenie je teda $q = 0$ a vyhovujúcim koreňom je preňho $x = 0$.

2. úloha
Maje dlouhou chvíli, vymyslel si Luboš reálná čísla b, B a zjistil, že pro každé reálné x platí nerovnosti

$$x^2 + 2bx + 1 \geq 0$$

$$x^2 + 2Bx + 1 \geq 0$$

Myslí si, že pro každé reálné x bude platit i

$$x^2 + 2bBx + 1 \geq 0$$

Pomožte mu to dokázat.

Jelikož první nerovnost musí platit pro každé x, platí i pro $x = -b$. Tedy $(-b)^2+2b(-b)+1 \geq 0$, neboli $b^2 \leq 1$. Analogicky z druhé nerovnosti pro $x = -B$ vidíme, že $B^2 \leq 1$. Vynásobení dá $(bB)^2 \leq 1$. Platí tedy:

$$(x + bB)^2 \geq 0 \geq (bB)^2 - 1.$$

Úpravou prvního a posledního členu dostaneme dokazované $0 \leq (x + bB)^2 - (bB)^2 + 1 \leq x^2 + 2bBx + 1$.

3. úloha
Pro která přirozená $n \geq 2$ je výraz $n^3 - n^2 + n - 1$ prvočíslo?

Začneme tím, že si výraz upravíme:

$$P(n) = n^3 - n^2 + n - 1 = n^2(n - 1) + (n - 1) = (n^2 + 1)(n - 1).$$

Prvočíslo je dělitelné pouze jedničkou a samo sebou, tedy jedna ze závorek se musí rovnat 1 a druhá onomu prvočíslu. Spolu s podmínkou, že $n \geq 2$, dostáváme $(n^2 + 1) \geq (n - 1)$ pro všechna zvažovaná n. Tedy $(n - 1)$ se musí rovnat 1, z čehož plyne $n = 2$. Už zbývá jen ověřit, že pro $n = 2$ opravdu prvočíslo vyjde. Po dosazení dostaneme $P(2) = 5$, a jelikož **pětka** je prvočíslo, nezbývá než konstatovat, že jediné n vyhovující zadání je $n = 2$.

4. úloha
Polynom $x^3 - 3x + 1$ má tři reálné kořeny, které označíme α, β, γ. Napište polynom třetího stupně, jehož kořeny jsou čísla $\alpha + 1, \beta + 1, \gamma + 1$, a svoji odpověď zdůvodněte.

První řešení:
Kořeny polynomu odpovídají průsečíkům funkce $p(x) = x^3 - 3x + 1$ s osou x. Abychom získali polynom s kořeny o jedničku většími, stačí funkci „posunout doprava". Přesněji, je-li $q(x)$ hledaný polynom, pak musí platit $q(x+1) = p(x)$. No ale pak už je snadné získat polynom $q(x)$, stačí do zadaného předpisu dosadit namísto x hodnotu $x - 1$. Mnoho řešitelů se spletlo a namísto x dosazovalo $x + 1$, což je ale posun doleva (rozmysli si). Správný výsledek je tedy polynom

$$q(x) = x^3 + 3x^2 - 3$$

a všechny jeho nenulové násobky (identickou nulu nám zakazuje zadání).

Nástin druhého řešení:
Další (složitější) možností bylo řešit úlohu pomocí Vietových vzorců zmiňovaných v povídání – pro polynom třetího stupně $x^3 + p_2x^2 + p_3x + p_4$ s kořeny α, β, γ podle Vietových vztahů platí

$$\alpha + \beta + \gamma = -p_2, \tag{$\boxtimes$}$$
$$\alpha\beta + \beta\gamma + \alpha\gamma = p_3, \tag{$\boxplus$}$$
$$\alpha\beta\gamma = -p_4. \tag{$\looparrowleft$}$$

Zde konkrétně $p_2 = 0, p_3 = 3, p_4 = 3$. Máme-li získat polynom $q(x) = x^3 + q_2x^2 + q_3x + q_4$ (opět bychom mohli celý polynom násobit libovolným $n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$) s kořeny $\alpha + 1, \beta + 1, \gamma + 1$, musí pro jeho koeficienty podle právě odvozeného platit

$$(\alpha + 1) + (\beta + 1) + (\gamma + 1) = -q_2, \tag{$\barwedge$}$$
$$(\alpha + 1)(\beta + 1) + (\beta + 1)(\gamma + 1) + (\alpha + 1)(\gamma + 1) = q_3, \tag{$\rightsquigarrow$}$$
$$(\alpha + 1)(\beta + 1)(\gamma + 1) = -q_4. \tag{$\lhd$}$$

Nyní roznásobíme vztahy $(\barwedge), (\rightsquigarrow), (\lhd)$ a dosadíme do nich vztahy $(\boxtimes), (\boxplus), (\looparrowleft)$ tak, že nám zmizí všechny α, β, γ. Hledané koecienty q_2, q_3, q_4 tak dostaneme vyjádřeny pomocí p_2, p_3 a p_4 a to je konec.

5. úloha
Mějme polynom $P(x)$ s celočíselnými koeficienty, o kterém navíc víme, že $P(0) = 1$. Určete, jaký je největší možný počet n navzájem různých celých čísel $x_1, x_2, \ldots, x_n$ takových, aby $P(x_1) = P(x_2) = \cdots = P(x_n) = 2008$.

Uvažujme polynom $Q(x) = P(x) - 2008$. Q má rovněž celočíselné koeficienty, $Q(0) = -2007$ (protože $P(0) = 1$) a $P(x) = 2008$, právě když $Q(x) = 0$. Chceme tedy zjistit, jaký je největší možný počet různých celočíselných kořenů polynomu Q.

Předpokládejme, že $x_1, \ldots, x_n$ jsou všechny navzájem různé celočíselné kořeny Q. Potom můžeme psát

$$Q(x) = (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n)(a_kx^k + \cdots + a_1x + a_0), \tag{$*$}$$

kde $a_kx^k + \cdots + a_1x + a_0$ je polynom, který nemá žádné celočíselné kořeny různé od $x_1, \ldots, x_n$. Navíc platí, že všechny koeficienty $a_0, \ldots, a_k$ jsou celá čísla. Jinak by totiž existoval neceločíselný koeficient a_i takový, že všechna $a_{i+1}, \ldots, a_k$ by už byla celočíselná. Pak ale roznásobením poslední rovnosti dostaneme, že Q má u mocniny x^{i+n} koeficient (a_i + celé číslo), tj. onen koeficient je neceločíselný, což je spor.

Dosaďme nyní do rovnosti (∗) hodnotu $x = 0$. Potom $Q(0) = (-1)^n \cdot x_1 \cdot x_2 \cdots x_n \cdot a_0 = -2007$, čili $|x_1| \cdot |x_2| \cdots |x_n| \cdot |a_0| = 2007$. Protože prvočíselný rozklad $2007 = 3 \cdot 3 \cdot 223$ je nejdelší rozklad čísla 2007 na součin přirozených čísel větších než 1, mohou být mezi čísly $x_1, \ldots, x_n$ nejvýše tři různá od 1 a -1. Přidáme-li navíc 1 a -1, dostaneme $n \leq 5$. Pro $n = 5$ už odpovídající polynom snadno sestrojíme: položme $x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = 3, x_4 = -3, x_5 = 223, a_0 = 1, a_i = 0$ pro všechna $i = 1, \ldots, k$. Dostali jsme polynom

$$P(x) = (x-1)(x+1)(x-3)(x+3)(x-223) + 2008,$$

který zřejmě splňuje podmínky zadání, tedy největší možné n je rovno 5.

6. úloha

Pavel si napsal polynom $P(x)$ s celočíselnými koeficienty a zjistil, že má alespoň jeden celočíselný kořen. Nyní Zuzce pokaždé řekne nějaké přirozené číslo k a chce po ní, aby mezi čísly $P(0), P(1), \ldots, P(k-1)$ našla takové, které je dělitelné[3] číslem k. Dokažte, že se to Zuzce vždy podaří.

Vašou úlohou bolo ukázať, že medzi číslami $P(0), P(1), \ldots, P(k-1)$ je pre každé prirodzené číslo k aspoň jedno číslo deliteľné k, pričom vieme, že $P(x)$ je polynóm s celočíselnými koeficietmi, ktorý má aspoň jeden celočíselný koreň. Označme si ho písmenkom c. Keďže c je koreňom, vieme si polynóm $P(x)$ zapísať ako nasledujúci súčin:

$$P(x) = (x - c) \cdot Q(x).$$

Keďže $P(x)$ má celočíselné koeficienty, koeficient u x je 1 a c je tiež celé číslo, bude mať polynóm $Q(x)$ celočíselné koeficienty (čo ku koncu dokážeme).

To však znamená, že nám stačí dokázať, že $x - c$ je deliteľné k pre niektoré z $x \in \{0, 1, \ldots, k - - 1\}$. A to platí, pretože po dosadení dostaneme $-c, 1 - c, \ldots, k - c - 1$, čo je postupnosť k za sebou idúcich čísel. A teda medzi nimi musí byť práve jedno deliteľné k. Úloha je temer vyriešená.

Tvrdenie, že $Q(x)$ má iba celočíselné koeficienty, však nie je triviálne, a tak ho treba dokázať. Polynóm $P(x)$ má stupeň aspoň jedna, $Q(x)$ má stupeň o jeden menší a môžme zaviesť nasledujúce, mnohým známe, značenie

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0,$$
$$Q(x) = b_{n-1} x^{n-1} + b_{n-2} x^{n-2} + \cdots + b_0,$$

pričom vieme, že $a_i \in \mathbb{Z}$ pre $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Zo vzťahu

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0 = (x - c) \cdot (b_{n-1} x^{n-1} + b_{n-2} x^{n-2} + \cdots + b_0)$$

medzi $P(x)$ a $Q(x)$ si môžme odvodiť nasledujúce vzťahy medzi ich koeficientmi:

$$a_n = b_{n-1},$$
$$a_k = b_{k-1} - c b_k,$$
$$a_0 = -c b_0$$

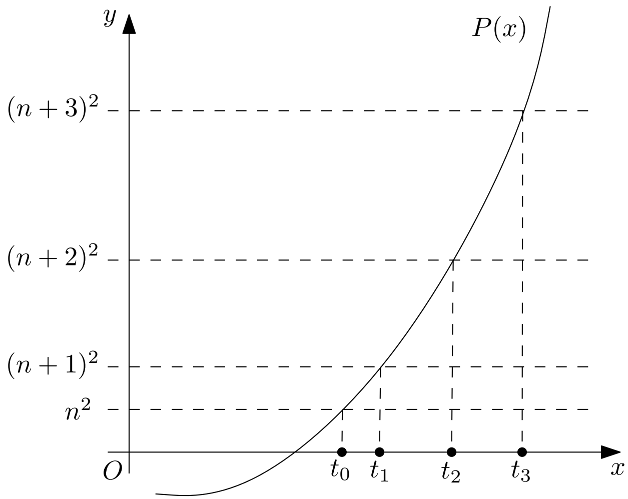
[3] Číslo 0 je dělitelné každým přirozeným číslem.

pre $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$. Z prvej rovnosti vieme usúdiť, že b_{n-1} je celé číslo. Ďalej budeme pokračovať indukčne pomocou druhej rovnosti. Ak vieme, že a_k, b_k a c sú celé čísla, musí byť potom nutne aj b_{k-1} celé a takto sestúpime až k b_0. Tým sme dokázali celočíselnosť koeficientou polynómu $Q(x)$.

7. úloha

Pavel s Kennym si každý vymysleli kvadratický polynom s kladným vedoucím koeficientem a všimli si, že platí ohromně zajímavá věc. Kdykoliv jeden z nich dosadí do svého polynomu reálné číslo tak, že mu vyjde druhá mocnina přirozeného čísla, pak při dosazení téhož čísla vyjde druhá mocnina přirozeného čísla i tomu druhému z nich. Dokažte, že pokud označíme $R(x)$ součin oněch dvou polynomů, pak existuje polynom $Q(x)$ takový, že platí $R(x) = Q(x)^2$.

Díky tomu, že Pavlův i Kennyho polynom (označme je $P(x)$ a $K(x)$) mají kladný vedoucí koeficient, existuje interval tvaru $(a, +\infty)$, $a \in \mathbb{R}$, takový, že na něm jsou oba polynomy kladné a rostoucí nade všechny meze. Všechny další úvahy již budeme provádět jen v tomto intervalu.



Uvažujme nyní reálná čísla $t_0 < t_1 < t_2 < \ldots$ (všechna z intervalu $(a, +\infty)$), v nichž polynom $P(x)$ nabývá postupně hodnot $n^2, (n+1)^2, (n+2)^2, \ldots$, tj. $P(t_0) = n^2, P(t_1) = (n+1)^2, \ldots$, kde $n \in \mathbb{N}$. Podle zadání je $K(t_0) = m^2$ pro nějaké $m \in \mathbb{N}$. Ze zadání je i $K(t_1)$ druhou mocninou přirozeného čísla. Uvědomíme si ale, že je přímo $K(t_1) = (m+1)^2$. Kdyby bylo $K(t_1) < (m+1)^2$, tak už je $K(t_1) \leq m^2 = K(t_0)$, jenže to je spor, neboť jsme na intervalu, kde $K(x)$ roste. Kdyby bylo $K(t_1) > (m+1)^2$, tak musí existovat reálné číslo $s \in (t_0, t_1)$, pro které je $K(s) = (m+1)^2$, jenže pak by musel i Pavlův polynom $P(x)$ při dosazení čísla s nabývat druhé mocniny přirozeného čísla, jenže $P(t_0) = n^2 < P(s) < (n+1)^2 = P(t_1)$, což je tedy spor. Postup můžeme libovolněkrát opakovat a dostáváme

$$P(t_i) = (n+i)^2$$
$$K(t_i) = (m+i)^2$$

pro $i = 0, 1, \ldots$. Takováto skutečnost se dá interpretovat i tak, že rovnice

$$\sqrt{P(x)} - \sqrt{K(x)} = (n+i) - (m+i) = n - m = \text{konstanta}$$

má nekonečně mnoho řešení (řešením jsou čísla $t_0, t_1, \ldots$). To už ovšem začíná být krajně podezřelé, neboť rovnice s polynomy mívají jen konečně mnoho řešení (polynomy mají totiž jen konečně mnoho kořenů). Naše rovnice sice není přímo rovnice s polynomy (vyskytují se v ní odmocniny), ovšem snadno ji umíme na takovou rovnici převést. Nyní provedeme neekvivalentní úpravu umocnění. Tím nám mohou přibýt nějaká další řešení, což nám ale nevadí. Dostaneme

$$\left(\sqrt{P(x)} - \sqrt{K(x)}\right)^2 = P(x) + K(x) - 2\sqrt{P(x)K(x)} = (n-m)^2$$

a snadnou úpravou (opět umocněním mohou přibýt nějaká řešení)

$$P(x)K(x) = \left(\frac{P(x) + K(x) - (n-m)^2}{2}\right)^2$$

Raději znovu zdůrazníme, že se pohybujeme jen v intervalu $(a, +\infty)$, takže i řešení rovnice hledáme jen v tomto intervalu. Víme však, že všechna čísla $t_0, t_1, \ldots$ jsou řešením této rovnice, ve které již vystupují pouze polynomy. To ale znamená, že na obou stranách rovnice musí být tytéž polynomy.[4] Nakonec stačí položit $Q(x) = \frac{P(x)+K(x)-(n-m)^2}{2}$ a jsme hotovi, protože máme

$$R(x) = P(x)K(x) = Q(x)^2$$

Můžeme si všimout, že jsme nikde nepotřebovali, že polynomy $P(x), K(x)$ byly kvadratické, takže snadno bychom mohli důkaz použít i pro obecnější polynomy (libovolného stupně, ale mající kladný vedoucí koeficient, protože je důležité mít interval $(a, +\infty)$, na kterém jsou oba polynomy rostoucí).

8. úloha

Mějme n navzájem různých celých čísel $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Dokažte, že polynom $f(x) = (x - a_1)(x - a_2)\cdots(x - a_n) - 1$ nelze zapsat jako součin polynomů $g(x), h(x)$ s celočíselnými koeficienty, které jsou oba stupně menšího než n.

Úlohu dokážeme sporem. Předpokládejme tedy, že existují polynomy $g(x)$ a $h(x)$ takové, že $f(x) = g(x)h(x)$. Z tvaru

$$f(x) = (x - a_1)(x - a_2)\cdots(x - a_n) - 1$$

vidíme, že

$$f(a_i) = -1 = g(a_i)h(a_i) \quad \text{pro všechna } i = 1, 2, \ldots, n.$$

[4] Pokud ti toto tvrzení nepřipadá ani zřejmé, ani známé, tady je důkaz. Vezmeme si polynom (doporučuji přísně rozlišovat mezi slovy rovnice a polynom) $\frac{1}{4}(P(x) + K(x) - (n-m)^2)^2 - P(x)K(x)$. O něm víme, že má nekonečně mnoho kořenů $t_0, t_1, \ldots$. Ovšem z povídání před sérií také víme, že nenulový polynom má nejvýše tolik kořenů, jaký je jeho stupeň. Nezbývá nic jiného, než že náš polynom $\frac{1}{4}(P(x) + K(x) - (n-m)^2)^2 - P(x)K(x)$ je nulový, tj. roven 0 pro všechna x. Z toho už ale snadnou úpravou máme rovnost dvou polynomů $P(x)K(x) = \frac{1}{4}(P(x) + K(x) - (n-m)^2)^2$.

Jenže a_i i koeficienty u $g(x)$ a $h(x)$ jsou celočíselné, tudíž i hodnoty $g(a_i)$ a $h(a_i)$ musí být celočíselné. Jejich součin je -1, a proto je buď

$$\begin{aligned}&g(a_i)=1 \text{ a } h(a_i)=-1,\\&\text{nebo}\\&g(a_i)=-1 \text{ a } h(a_i)=1 \quad \text{pro } i=1,2,\dots,n.\end{aligned}$$

Vezmeme-li polymom $p(x)=g(x)+h(x)$, dostaneme z předešlého odstavce, že $p(a_i)=0$ pro $i=1,2,\dots,n$. To ovšem znamená[5], že je polymon $p(x)$ buď konstantní, nebo má stupeň alespoň n. Rozeberme tyto případy:

Je-li $p(x)$ konstantní, potom nutně $p(x)=0$. Pak ale $g(x)=-h(x)$ a tudíž $f(x)=-(h(x))^2$, což ovšem znamená, že $f(x)\leq 0$ pro každé $x\in\mathbb{R}$. Avšak dle zadání má $f(x)$ vedoucí koeficient 1, a proto pro dostatečně velká x (například kterékoli $x>\max\{a_1,\dots,a_n\}$) bude $f(x)$ kladné. Spor.

Bude-li $p(x)$ mít stupeň alespoň n, pak ovšem $g(x)$ nebo $h(x)$ musí mít stupeň[6] alespoň n. Což je také spor s předpokladem úlohy.

Tímto jsme dokázali, že

$$f(x)=(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)-1\neq g(x)h(x)$$

pro $g(x)$, $h(x)$ s celočíselnými koeficienty.

[5]Polynom s n kořeny je buď, nula nebo je aspoň n-tého stupně.

[6]$\deg(g+h)\leq\max\{\deg(g),\deg(h)\}$