# Povídání ke čtvrté sérii

Milý řešiteli, jestliže ses ještě nesetkal s kombinatorickou geometrií, naskýtá se ti teď jedinečná možnost. Tento text by ti měl shrnout, jak taková kombinatorická geometrie vypadá a jaké jsou metody řešení úloh, přičemž si vyřešíme i jednu úložku.

### Čím se kombinatorická geometrie zabývá

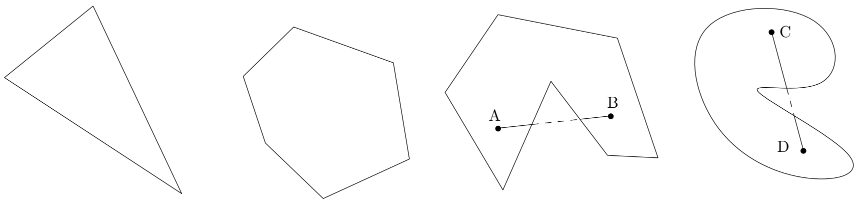
Na rozdíl od klasické geometrie, kde se často počítají úhly, kreslí obrázky a někdy i rýsuje, kombinatorická geometrie se zabývá kombinatorickými vlastnostmi geometrických objektů. To znamená, že vyšetřujeme počty průsečíků, snažíme se dokázat nějakou vlastnost nebo počítáme obsahy obrazců.

Přesné obrázky se zde kreslí velmi těžce, protože máme vetšinou daný neurčitý počet bodů nebo přímek. Ale nenech se tím odradit, i takové úlohy mohou být jednoduché. Je potřeba si vždy úlohu pořádně rozmyslet a najít nějaké chytré řešení, které bude fungovat obecně, tj. pro libovolný počet bodů či přímek.

### Konvexita

Velmi často se též setkáváme s pojmem konvexita útvaru. Jeho geometrická interpretace je následující. Objekt $O$(trojúhelník, mnohoúhelník, kružnice, ...) nazveme *konvexní*, jestliže pro každé dva jeho body $A, B \in O$ platí, že celá úsečka $AB$ leží v objektu $O$.

Jako příklad si vezměte trojúhelník. Ten je vždy konvexní. Kdežto třeba takový čtyřúhelník už může být i nekonvexní. Větší názornost hledejte na následujícím obrázku, kde první dva objekty konvexní jsou, ale další dva již ne.




### Řešení úloh

Úlohy na kombinatorickou geometrii většinou začínají *mějme n bodů v obecné poloze.* Tato formulace znamená, že žádné tři body neleží na společné přímce, popřípadě je ještě někdy potřeba dodat, že žádné čtyři body neleží na společné kružnici.

Nějaká souhrnná kuchařka, jak vyřešit úlohu, neexistuje. Skoro vždy je ale potřeba se odpoutat od klasické geometrie a použít nějakou kombinatorickou úvahu. Většinou se počítají nějaké objekty, odhaduje jejich počet, sestavují mnohoúhelníky nebo hledají vhodná rozestavení bodů. Pro složitější úlohy se může hodit i Dirichletův princip, chytré zobrazení nebo hezký invariant.

### Úloha na seznámení

**Úloha.** Najděte počet úhlopříček konvexního $n$-úhelníku, kde $n \geq 3$.

*Řešení.* Z každého bodu vychází celkem $n - 3$ úhlopříček, protože nepočítáme sousedy ani bod samotný. Celkem je $n$ bodů. Ale nesmíme zapomenout, že každou úhlopříčku jsme počítali dvakrát (za každý koncový bod jednou), takže celkem máme $\frac{n(n-3)}{2}$ úhlopříček.

*Řešení.* Ke stejnému výsledku se dá dopracovat i kombinatorickou úvahou. Úhlopříčky totiž vedou mezi každými dvěma vrcholy kromě sousedících vrcholů, kterých je $n$(stejně jako počet stran). Celkem tedy máme $\binom{n}{2} - n = \frac{n(n-1)}{2} - n = \frac{n(n-3)}{2}$ úhlopříček.

*Řešení.* Postupujme indukcí a dokažme, že úhlopříček je $u_n = \frac{n(n-3)}{2}$. Pro $n = 3$ nemáme žádnou úhlopříčku, což sedí. Pokud přidáme do $n$-úhelníku $A_1, A_2, \ldots, A_n$ jeden vrchol $V$ mezi dosavadní vrcholy $A_1$ a $A_n$, přibude nám $n-2$ úhlopříček, které jsou tvořeny přidaným vrcholem $V$ a vrcholy $A_2, A_3, \ldots, A_{n-1}$, a jedna úhlopříčka $A_1A_n$, která předtím byla stranou. Zároveň ještě stále máme $\frac{n(n-3)}{2}$ úhlopříček z indukčního předpokladu. Máme tedy celkem $u_n + (n - 2) + 1 = \frac{n(n-3)}{2} + n - 3 = \frac{n^2-n+2}{2} = \frac{(n+1)(n-2)}{2} = u_{n+1}$ úhlopříček, což jsme chtěli dokázat.

Už při prvním, letmém pohledu na zadání čtvrté série zjistíš, že je zcela neobyčejné. Jako každý rok, připravili jsme pro Tebe i letos jednu cizojazyčnou sérii. O co jde? Zadání máš k dispozici ve třech jazycích – anglicky, německy a francouzsky. Tentokrát to tedy nebudeš mít tak snadné, protože pochopit zadání v cizím jazyce pro Tebe možná bude obtížnější, než kdybychom Ti je předložili v češtině. Co pro Tebe ale bude pravděpodobně vůbec nejobtížnější (kromě samotného přemýšlení nad úlohami), je svá řešení řádně sepsat, a to jak jinak než v jednom ze tří výše uvedených jazyků. Z těch si můžeš vybrat, jaký Ti vyhovuje nejvíc. Můžeš dokonce psát různá řešení v různých jazycích (například prvních pět úloh anglicky a zbylé tři třeba francouzsky, to je jen na Tobě), v žádném případě však nepoužívej češtinu ani slovenštinu! Možná Ti sepisování řešení v cizím jazyce zabere pětkrát tolik času co obvykle, zato se toho jistě hodně naučíš … a je velmi pravděpodobné, že se Ti to bude později ještě mockrát hodit. Tak s chutí do toho!

# 4th series

| | |
|---|---|
| **Topic:** | Combinatorial geometry |
| **Date due:** | 12th JANUARY 2009 |

PROBLEM 0 (1 POINT)

Put together the best picture of the PIGlet from $n$-gons only. You can choose whichever $n$ you want, but it has to be the same for the whole picture.

PROBLEM 1 (3 POINTS)

Try to find 6 points on the circle, so that any triangle with its vertices in these points will be obtuse.

PROBLEM 2 (3 POINTS)

A square with the area of 5 hugglehuffs is given. Into this square we draw 9 polygons, each with the area of one hugglehuff. Prove that we can find a pair of polygons, intersection of which is at least $\frac{1}{9}$ hugglehuffs.

PROBLEM 3 (3 POINTS)

For any natural number $n \geq 4$ find a convex hexagon which can be cut up into $n$ identical triangles.

PROBLEM 4 (5 POINTS)

Is it possible to slice up a convex hexagon into 13 convex pentagons, so that no three vertices of any pentagons lie on a single line?

PROBLEM 5 (5 POINTS)

We draw several diagonals into an $n$-gon, so that no two diagonals intersect and every region circumscribed by the sides of the polygon and drawn diagonals is a triangle. If two sides of such a triangle are sides of the polygon, we call this triangle *strange*. If, however, no side of such a triangle coincides with the side of the polygon, we call this triangle *weird*. Prove that there are two more strange triangles than weird triangles.

PROBLEM 6 (5 POINTS)

Let $A_1A_2 \dots A_{2n}$ be a convex $2n$-gon and let $P$ be an inner point of it. We draw $2n$ lines $PA_1, PA_2, \dots, PA_{2n}$. Prove that there is a side of the polygon[1] which is not intersected in its inner point by any of these lines.

PROBLEM 7 (5 POINTS)

In a plane there are $n$ polygons given, such that any two of them have a non-empty intersection. Prove that for any point $A$ in the plane, we can find $r > 0$ such that circle with the center in $A$ and the radius $r$ intersects each of these polygons.[2]

PROBLEM 8 (5 POINTS)

There are $2n + 1$ points given in a plane in general positions.[3] A circle $k$, which goes through three of these points, we call "blue", if number of the remaining points lying outside of $k$ and inside of it are the same. Prove that the number of blue circles has the same parity as $n$.

# Serie N. 4

| | |
|---|---|
| **Thema:** | Kombinatorische Geometrie |
| **Datum des Poststempels:** | 12. Januar 2009 |

AUFGABE N. 0 (1 PUNKT)

Bilde das schönste Prasátko-Bild aus $n$-Ecken. Dabei kann $n$ beliebig sein, aber dasselbe für das ganze Bild.

AUFGABE N. 1 (3 PUNKTE)

Versucht, 6 Punkte auf der Kreislinie zu finden, so dass jede beliebiges Dreieck mit Ecken in diesen Punkten stumpfwinklig wird.

AUFGABE N. 2 (3 PUNKTE)

Das Inhalt eines Quadrats ist 5 Füfner. Wir zeichnen 9 Vielecke in dieses Quadrat, jedes mit Inhalt von einem Füfner. Zeigt, dass man immer zwei Vielecken finden kann, so dass ihr Durchschnitt mindestens $\frac{1}{9}$ Füfner ist.

---

[1] line segment

[2] Those who want, can try to find a line, going through $A$, which intersects all these polygons.

[3] It means that no three points lie on a single line and no four points lie on a single circle.

Aufgabe n. 3 (3 punkte)
Sei $n \geq 4$ eine natürliche Zahl. Findet ein konvexes Sechseck, das zu $n$ kongruente Dreiecke zerschnitten werden kann.

Aufgabe n. 4 (5 punkte)
Kann man aus 13 konvexen Fünfecken ein konvexes Sechseck bilden, so dass keine Drei Eckpunkte beliebiger Fünfecken auf einer Gerade liegen?

Aufgabe n. 5 (5 punkte)
In ein regelmäßiges $n$-Eck zeichnen wir einige Eckenlinien, so dass keine zwei sich schneiden und jede von diesen Eckenslinien einbeschränkte Fläche ein Dreieck ist. Sind zwei Seiten so eines Dreieckes gleichzeitig auch Seiten des $n$-Eckes, nennen wir das Dreieck *baggerisch*. Hat der Dreieck jedoch keine Seite mit den Seiten des $n$-Eckes gemeinsam, nennen wir das Dreieck *kombineisch*. Beweist, dass es mindestens um zwei mehr baggerische als kombineische Dreiecke gibt.

Aufgabe n. 6 (5 punkte)
Stellen wir uns ein konvexes Vieleck $A_1A_2\ldots A_{2n}$ auf $2n$ Ecken und ein Innenpunkt $P$ diseses Vielecks vor. Durch diesen Punkt führen wir $2n$ Geraden $PA_1, PA_2, \ldots, PA_{2n}$. Beweist, dass es mindestens eine Seite[4] des Vielecks gibt, deren Innenpunkte von keine der Geraden geschnitten werden.

Aufgabe n. 7 (5 punkte)
Seien $n$ Vielecke in der Ebene gegeben, so dass jede zwei einen nichtleeren Durchschnitt haben. Beweist, dass für jeden Punkt $A$ der Ebene kann man so ein $r > 0$ finden, dass die Kreislinie mit der Mitte in $A$ und Radius $r$ jedes der gegebenen Vielecke durchschneidet[5].

Aufgabe n. 8 (5 punkte)
Seien $2n + 1$ Punkte in der Ebene in der allgemeiner Lage[6] gegeben. Eine Kreislinie $k$, die diese drei Punkte durchläuft, soll *blau* genannt werden, wenn außerhalb und innerhalb von $k$ dieselbe Anzahl der übrig gebliebenen Punkte liegt. Beweist, dass die Anzahl der blauen Kreislinien dieselbe Parität wie $n$ hat.

# La 4^e^ série

**Sujet:** Géometrie combinatoire

**Date d'expedition:** le 12 janvier 2009

problème 0 (1 point)
Composez la plus belle image d'un cochonet utilisant seulement $n$-gons[7]. C'est à vous choisir $n$, mais il doit rester le même en toute image.

[4] d.h. eine Strecke

[5] Ihr könntet auch versuchen, eine Gerade zu finden, die $A$ durchläuft und alle Vielecke schneidet.

[6] d.h. keine drei auf einer Gerade liegen und keine für auf einer gemeinsamen Kreislinie liegen

[7] polygons d'ordre $n$

PROBLÈME 1 (3 POINTS)
Essayez de trouver 6 points sur un cercle, tels que chaque triangle qui a les sommets entre ces points est obtusangle.

PROBLÈME 2 (3 POINTS)
Considéront un carré qui a l'aire 5 foufniques. Dessinons 9 polygons dans ce carré, chacun de l'aire 1 foufnique. Montrez que nous pouvons trouver deux polygons, tels que leur intersection a l'aire $\frac{1}{9}$ de foufnique.

PROBLÈME 3 (3 POINTS)
Soit $n \geq 4$ un nombre naturel. Trouvez un hexagone convexe qu'on peut découper en $n$ triangles congrus.

PROBLÈME 4 (5 POINTS)
Est-ce que c'est possible de découper un hexagone convexe en 13 pentagones convexes, de sorte qu'on n'existe pas trois sommets de ces pentagons qui se retrouvent sur la même droite?

PROBLÈME 5 (5 POINTS)
Dans $n$-gon régulier, dessinons quelques diagonales, qui ne se coupent pas entre eux et chaque surface crée par les côtés du polygon et des diagonales dessinés est un triangle. Considéront un tel triangle. Si deux de ses côtés sont aussi les côtés du polygon, on l'appelle le triangle *bizzare*. S'il n'a pas de côté commun avec le polygon, on l'appelle le triangle *étrange*. Démontrez que le nombre des triangles bizzares est égale au nombre des triangles étranges augmenté de 2.

PROBLÈME 6 (5 POINTS)
Imaginez un polygon convexe $A_1A_2 \ldots A_{2n}$ d'ordre $2n$, un point $P$ à son intérieur et $2n$ droites $PA_1, PA_2, \ldots, PA_{2n}$. Prouvez qu'il existe un côté du polygon[8] qu'aucun des droites ne coupe en point intérieur.

PROBLÈME 7 (5 POINTS)
Dans le plan, il y a $n$ polygons, tels que l'intersection de chaque couple n'est pas vide. Montrez que pour chaque point A du plan on peut trouver $r > 0$, tel que le cercle de centre $A$ et de rayon $r$ coupe chacun des polygons[9].

PROBLÈME 8 (5 POINTS)
Dans le plan, il y a $2n + 1$ points en position génerale[10]. Un cercle $k$ passant trois des points donnés est *bleu* si le nombre des points à son intérieur est égale au nombre des points à son extérieur. Démontrez que le nombre des cercles bleus a la même parité que $n$.

# Řešení 4. série

[8] c'est-à-dire un segment

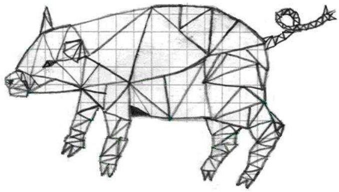
[9] Si tu es curieux, tu peux aussi trouver la droite passant par le point $A$ qui coupe tous les polygons.

[10] C'est-à-dire aucuns trois points points ne se retrouvent sur la même droite et aucuns quatre points ne se retrouvent sur le même cercle.

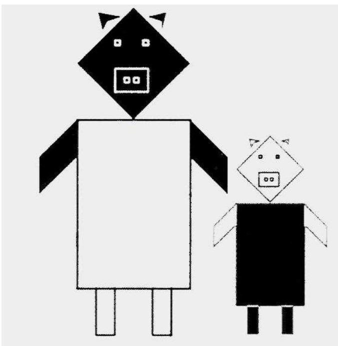
**0. úloha**

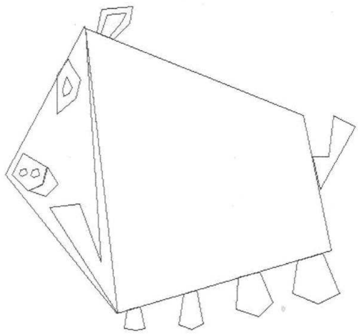
Put together the best picture of the PIGlet from $n$-gons only. You can choose whichever $n$ you want, but it has to be the same for the whole picture.
Bilde das schönste Prasátko-Bild aus $n$-Ecken. Dabei kann $n$ beliebig sein, aber dasselbe für das ganze Bild.
Composez la plus belle image d'un cochonet utilisant seulement $n$-gons[11]. C'est à vous choisir $n$, mais il doit rester le même en toute image.

Milí řešitelé, obdrželi jsme od vás celých třináct krásných zpracování nulté úlohy. Nebudu vás dlouho napínat a rovnou vám prozradím, že čokoládu posíláme **Lucce Skrčené**, **Matějovi Hudcovi** a **Helče Brandejské**. Celková úroveň všech došlých řešení mě příjemně překvapila, očekával jsem totiž i nevydařené obrázky, které ovšem nedorazily. Sešla se zde vzácná prasátka z mnoha různých tvarů a nejrůznějšího ražení.



Nejklasičtějším tvarem pro kreslení prasátek je samozřejmě trojúhelník. Zvolilo si ho hned šest řešitelů. Velkou radost mi udělala typická obálková prasátka, která mi připomněla naše logo ze starších časů, které ještě občas z nostalgie používáme. Několik řešitelů si pak vyhrálo s nějakým konkrétním, například rovnostranným, trojúhelníkem a z něj vytvořili prasátka velice netradičního vzhledu. K otištění jsem nakonec vybral pouze ručně kreslené prasátko od **Lucky Skrčené**, protože bylo zcela nepodobné jiným řešením a nabývalo skutečně prasečích tvarů :)





Ostatní řešitelé nakreslili natolik roztodivné bytosti, že je musím rozdělit do zvláštních kategorií. K divokému pětiúhelníkovému prasátku **Matěje Hudce**, které jsme otiskli, snad není třeba

[11] polygons d'ordre $n$

nic psát. Dále k nám dorazilo sladké prasátko-medvídek z pravidelných růžových pětiúhelníků od **Dariny Fedorové**. **Gabča Kubíčková** si zvolila čtyřúhelníky a poslala nám dvě krásná prasátka, která jsou tak milá, že jsme je otiskli i pro vás. Jediné šestiúhelníkové prasátko, zaznamenané s jedním uchem nakřivo a sladkým úsměvem, přišlo od **Zuzky Šrollerové**. Opravdu vzácnými exempláři pak byla řešení od **Martina Bucháčka** a **Verči Paštykové**. Ta se skládala z konkávních čtyřúhelníků a bezúhelníků, neboli oblouků a elips. Tato prasátka však byla příliš odvážná a netypická, takže otisknout je by mohlo vyvolat vlnu paniky u všech chovatelů $n$-úhelníkových prasat.

Nakonec zmíním řešení od **Helči Brandejské**. Ta nám poslala krásné prasátko z barevných čtverečků poskládaných do čtvercové sítě. Jedná se opravdu o nejroztomilejší došlé řešení. Tohle prasátko sice vypadalo skoro jak fotka uložená na počítači, ale já věřím, že ho Helča nakreslila sama a že si čokoládu po právu zaslouží.

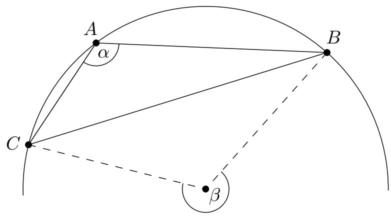
**1. úloha**

Try to find 6 points on the circle, so that any triangle with its vertices in these points will be obtuse.

Versucht, 6 Punkte auf der Kreislinie zu finden, so dass jede beliebiges Dreieck mit Ecken in diesen Punkten stumpfwinklig wird.

Essayez de trouver 6 points sur un cercle, tels que chaque triangle qui a les sommets entre ces points est obtusangle.

Z vlastností středového a obvodového úhlu plyne, že každé tři body ležící na jedné polokružnici (pro jistotu ji uvažujme bez krajních bodů) tvoří tupoúhlý trojúhelník – viz obrázek.




Neboli obvodovému úhlu $\alpha$ odpovídá středový úhel $\beta$, a pokud $\beta > 180°$, pak $\alpha > 90°$, a proto je $\triangle BAC$ je tupoúhlý.

Tedy nám stačí umístit všech šest bodů na jednu polokružnici a každý jimi tvořený trojúhelník již bude nutně tupoúhlý. Ještě si můžeme povšimnout, že řešení není nikterak závislé na čísle šest a funguje i pro libovolný počet bodů.

**2. úloha**

A square with the area of 5 hugglehuffs is given. Into this square we draw 9 polygons, each with the area of one hugglehuff. Prove that we can find a pair of polygons, intersection of which is at least $\frac{1}{9}$ hugglehuffs.

Das Inhalt eines Quadrats ist 5 Füfner. Wir zeichnen 9 Vielecke in dieses Quadrat, jedes mit Inhalt von einem Füfner. Zeigt, dass man immer zwei Vielecken finden kann, so dass ihr Durchschnitt mindestens $\frac{1}{9}$ Füfner ist.

Considéront un carré qui a l'aire 5 foufniques. Dessinons 9 polygons dans ce carré, chacun de l'aire 1 foufnique. Montrez que nous pouvons trouver deux polygons, tels que leur intersection a l'aire $\frac{1}{9}$ de foufnique.

Celková plocha $n$-uholníkov, ktoré sú nakreslené vo štvorci, je 9 fufníkov, ale plocha štvorca je len 5 fufníkov. To znamená, že minimálne plocha 4 fufníky musí byť pokrytá viacerými $n$-uholníkmi. Inak povedané, súčet všetkých prienikov musí byť minimálne 4 fufníky.

Maximálny počet prienikov vieme vypočítať ako

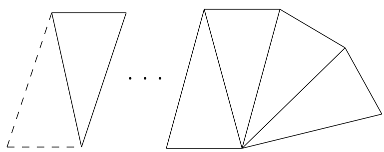
$$\binom{9}{2} = 36.$$

Z Dirichletovho princípu vyplýva, že ak máme plochu minimálne 4 fufníky rozdeliť medzi maximálne 36 prienikov, aspoň jeden z nich bude minimálne $\frac{1}{9}$ fufníku.

**3. úloha**

For any natural number $n \geq 4$ find a convex hexagon which can be cut up into $n$ identical triangles.
Sei $n \geq 4$ eine natürliche Zahl. Findet ein konvexes Sechseck, das zu $n$ kongruente Dreiecke zerschnitten werden kann.
Soit $n \geq 4$ un nombre naturel. Trouvez un hexagone convexe qu'on peut découper en $n$ triangles congrus.

Konstrukcí je celá řada. Jedna z možností je vzít si šestiúhelník na obrázku a rozdělit jej, jak je naznačeno (čárkovaný trojúhelník přidáme podle potřeby).

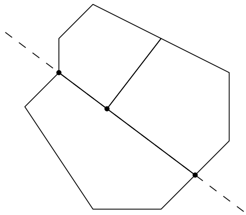



Velikosti vnitřních úhlů každého trojúhelníku jsou 30°, 75°, 75°. Velikosti vnitřních úhlů šestiúhelníku nezávisí na počtu trojúhelníků, ze kterých je tento šestiúhelník složen. Stačí proto například pro $n = 4$ ověřit, že šestiúhelník je konvexní.

**4. úloha**

Is it possible to slice up a convex hexagon into 13 convex pentagons, so that no three vertices of any pentagons lie on a single line?
Kann man aus 13 konvexen Fünfecken ein konvexes Sechseck bilden, so dass keine Drei Eckpunkte beliebiger Fünfecken auf einer Gerade liegen?
Est-ce que c'est possible de découper un hexagone convexe en 13 pentagones convexes, de sorte qu'on n'existe pas trois sommets de ces pentagons qui se retrouvent sur la même droite?

Předpokládejme, že existuje rozdělení šestiúhelníku na 13 konvexních pětiúhelníků splňující zadání. Všimněme si, že libovolná strana libovolného pětiúhelníku je buď stranou původního šestiúhelníku, nebo je obsažena právě ve dvou pětiúhelnících. Kdyby tomu tak nebylo, leží minimálně tři vrcholy pětiúhelníků na přímce.



Celkový počet stran je tedy $(13 \cdot 5 - 6)/2$. To ovšem není celé číslo, což dává spor.

**5. úloha**

We draw several diagonals into an $n$-gon, so that no two diagonals intersect and every region circumscribed by the sides of the polygon and drawn diagonals is a triangle. If two sides of such a triangle are sides of the polygon, we call this triangle *strange*. If, however, no side of such a triangle coincides with the side of the polygon, we call this triangle *weird*. Prove that there are two more strange triangles than weird triangles.

In ein regelmäßiges $n$-Eck zeichnen wir einige Eckenlinien, so dass keine zwei sich schneiden und jede von diesen Eckenslinien einbeschränkte Fläche ein Dreieck ist. Sind zwei Seiten so eines Dreieckes gleichzeitig auch Seiten des $n$-Eckes, nennen wir das Dreieck *baggerisch*. Hat der Dreieck jedoch keine Seite mit den Seiten des $n$-Eckes gemeinsam, nennen wir das Dreieck *kombineisch*. Beweist, dass es mindestens um zwei mehr baggerische als kombineische Dreiecke gibt.

Dans $n$-gon régulier, dessinons quelques diagonales, qui ne se coupent pas entre eux et chaque surface crée par les côtés du polygon et des diagonales dessinés est un triangle. Considéront un tel triangle. Si deux de ses côtés sont aussi les côtés du polygon, on l'appelle le triangle *bizzare*. S'il n'a pas de côté commun avec le polygon, on l'appelle le triangle *étrange*. Démontrez que le nombre des triangles bizzares est égale au nombre des triangles étranges augmenté de 2.

Budeme používať pojmy z anglického zadania. Pre $n = 3$ zadanie nemá zmysel, takže ďalej budeme predpokladať $n > 3$.

Máme $n$-uholník, ktorý je rozdelený na určitý počet trojuholníkov. Dokážme, že počet týchto trojuholníkov je vždy $n-2$, a teda nezávisí na rozmiestnení uhlopriečok. Keďže vrcholy trojuholníkov sú umiestnené len vo vrcholoch $n$-uholníka, súčet vnútorných uhlov v $n$-uholníku sa rovná súčtu všetkých vnútorných uhlov všetkých trojuholníkov. Ďalej vieme, že súčet vnútorných uhlov v trojuholníku je $180°$ a súčet vnútorných uhlov v $n$-uholníku je $(n-2) \cdot 180°$. A teda z toho už máme, že počet trojuholníkov je práve $n - 2$. Keďže pracujeme s $n > 3$, nemôže nastať prípad, že všetky tri strany trojuholníka sú zároveň stranami $n$-uholníka, a preto okrem strange a weird trojuholníkov (ich počet si po rade označme $s$ a $w$) existujú už len trojuholníky, ktoré majú práve jednu zo svojích strán takú, že je zároveň stranou $n$-uholníka. Počet takýchto trojuholníkov si označme $l$ (tieto trojuholníky budú lame). Keďže poznáme počet všetkých trojuholníkov, máme prvú rovnicu:

$$s + w + l = n - 2$$

Druhú rovnicu si vytvoríme pomocou počtu strán, ktoré jednotlivé typy trojuholníkov majú spoločné so stranami $n$-uholníka. Máme $n$ strán, pričom na každý strange trojuholník z nich pripadajú dve, na každý lame trojuholník jedna a na každý weird trojuholník nula. Zapísané v rovnici:

$$2 \cdot s + 1 \cdot l + 0 \cdot w = n$$

Odčítaním týchto dvoch rovníc získame $s - w = 2$, čo je dokazované tvrdenie.

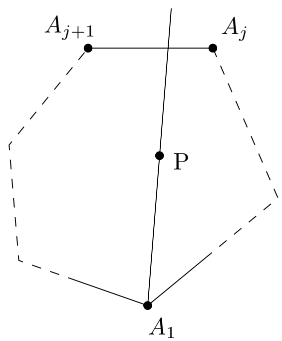
**6. úloha**

Let $A_1A_2 \dots A_{2n}$ be a convex $2n$-gon and let $P$ be an inner point of it. We draw $2n$ lines $PA_1, PA_2, \dots, PA_{2n}$. Prove that there is a side of the polygon[12] which is not intersected in its inner point by any of these lines.

Stellen wir uns ein konvexes Vieleck $A_1A_2 \dots A_{2n}$ auf $2n$ Ecken und ein Innenpunkt $P$ diseses Vielecks vor. Durch diesen Punkt führen wir $2n$ Geraden $PA_1, PA_2, \dots, PA_{2n}$. Beweist, dass es mindestens eine Seite[13] des Vielecks gibt, deren Innenpunkte von keine der Geraden geschnitten werden.

Imaginez un polygon convexe $A_1A_2 \dots A_{2n}$ d'ordre $2n$, un point $P$ à son intérieur et $2n$ droites $PA_1, PA_2, \dots, PA_{2n}$. Prouvez qu'il existe un côté du polygon[14] qu'aucun des droites ne coupe en point intérieur.

Tvrzení dokážeme sporem. Nechť existuje uvnitř $2n$-úhelníku $A_1A_2 \dots A_{2n}$ bod $P$ takový, že přímky $A_kP$, $k = 1, 2, \dots, 2n$, protínají všechny strany mnohoúhelníku ve vnitřních bodech. Protože uvažujeme konvexní mnohoúhelník, žádná z přímek $A_kP$ nemůže protínat dvě strany $2n$-úhelníku, a proto každou stranu musí protínat právě jedna přímka $A_kP$. Načrtněme si nyní přímku $A_1P$, která protíná stranu $A_jA_{j+1}$:




Označme počet vrcholů $2n$-úhelníku v pravé polorovině vyťaté přímkou $A_1P$ hodnotou $p$. V levé polorovině nám tedy zbylo $q = 2n - 1 - p$ vrcholů (právě jeden vrchol je na přímce $A_1P$). Všimněme si, že parity $p$ a $q$ se liší, protože $p + q = 2n - 1$, a proto i $p \neq q$. Tudíž nepočítáme-li stranu $A_jA_{j+1}$, počet stran $2n$-uhelníka v pravé a levé polorovině je také roven číslům $p$ a $q$.

Jenže protože $P$ je vnitřní bod, každá přímka $A_kP$ pro $k < j$ (tj. vedená z vrcholu $2n$-úhelníku na pravé straně $A_1P$) musí protínat stranu, která leží v levé polorovině vyťaté $A_1P$. Jestli tedy každá strana $A_iA_{i+1}$ má být proťata právě jednou přímkou $A_kP$, potom počet přímek $A_kP$ vedených z vrcholu $A_k$ na pravé straně $A_1P$ musí být roven počtu stran $2n$-úhelníku na levé straně $A_1P$, což není nic jiného než $p = q$.

To je ale spor s předchozím výsledkem, a tedy existuje strana $2n$-úhelníku, kterou neprotíná ani jedna přímka $A_kP$.

---

[12] line segment

[13] d.h. eine Strecke

[14] c'est-à-dire un segment

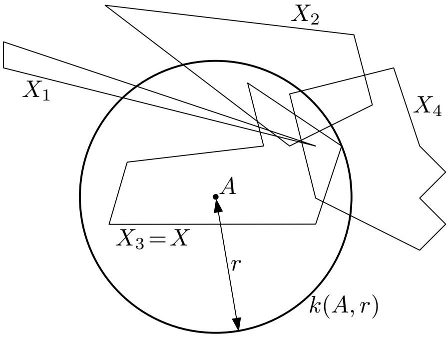
**7. úloha**

In a plane there are $n$ polygons given, such that any two of them have a non-empty intersection. Prove that for any point $A$ in the plane, we can find $r > 0$ such that circle with the center in $A$ and the radius $r$ intersects each of these polygons.[15]

Seien $n$ Vielecke in der Ebene gegeben, so dass jede zwei einen nichtleeren Durchschnitt haben. Beweist, dass für jeden Punkt $A$ der Ebene kann man so ein $r > 0$ finden, dass die Kreislinie mit der Mitte in $A$ und Radius $r$ jedes der gegebenen Vielecke durchschneidet[16].

Dans le plan, il y a $n$ polygons, tels que l'intersection de chaque couple n'est pas vide. Montrez que pour chaque point A du plan on peut trouver $r > 0$, tel que le cercle de centre $A$ et de rayon $r$ coupe chacun des polygons[17].

Označme jednotlivé mnohoúhelníky $X_1$ až $X_n$ a vyberme libovolný bod $A$. Vezměme dále nejmenší možný poloměr $r$ takový, že kruh $k(A, r)$ obsahuje aspoň jeden z mnohoúhelníků.




S takto zvoleným $r$ pro kružnici $k(A, r)$ platí, že aspoň jeden z mnohoúhelníků, řekněme mnohoúhelník $X$, nezasahuje z kružnice $k$ ven a jeden z jeho vrcholů na ní leží (jinak bychom mohli $r$ ještě zmenšit). Žádný z ostatních mnohoúhelníků neleží celý vně kružnice $k$, protože by neměl společný bod s mnohoúhelníkem $X$, a neleží ani celý uvnitř, protože bychom mohli $r$ opět zmenšit. I všechny ostatní mnohoúhelníky tedy nutně protínají naši kružnici a tím jsme našli, co jsme hledali.

**8. úloha**

There are $2n + 1$ points given in a plane in general positions.[18] A circle $k$, which goes through three of these points, we call "blue", if number of the remaining points lying outside of $k$ and inside of it are the same. Prove that the number of blue circles has the same parity as $n$.

Seien $2n + 1$ Punkte in der Ebene in der allgemeiner Lage[19] gegeben. Eine Kreislinie $k$, die diese drei Punkte durchläuft, soll *blau* genannt werden, wenn außerhalb und innerhalb von $k$ dieselbe

---

[15] Those who want, can try to find a line, going through $A$, which intersects all these polygons.

[16] Ihr könntet auch versuchen, eine Gerade zu finden, die $A$ durchläuft und alle Vielecke schneidet.

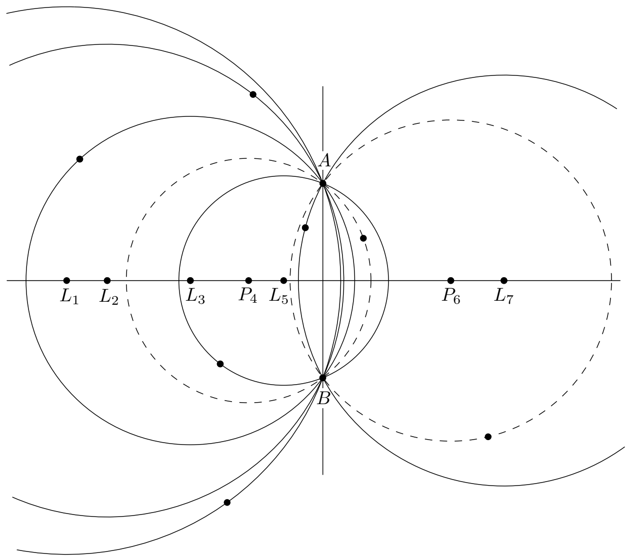
[17] Si tu es curieux, tu peux aussi trouver la droite passant par le point $A$ qui coupe tous les polygons.

[18] It means that no three points lie on a single line and no four points lie on a single circle.

[19] d.h. keine drei auf einer Gerade liegen und keine für auf einer gemeinsamen Kreislinie liegen

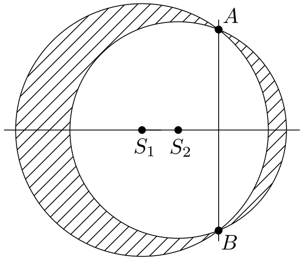
Anzahl der übrig gebliebenen Punkte liegt. Beweist, dass die Anzahl der blauen Kreislinien dieselbe Parität wie $n$ hat.
Dans le plan, il y a $2n+1$ points en position génerale[20]. Un cercle $k$ passant trois des points donnés est *bleu* si le nombre des points à son intérieur est égale au nombre des points à son extérieur. Démontrez que le nombre des cercles bleus a la même parité que $n$.

Z daných $2n+1$ bodů vybereme dva, které označíme $A$, $B$. Rovinu si nyní bez újmy na obecnosti můžeme pootočit tak, aby spojnice $AB$ byla svislá. Budeme si tedy rozumět, když poloroviny vytvořené spojnicí $AB$ pojmenujeme levá a pravá a když budeme mluvit o bodech vlevo a vpravo (na spojnici podle zadání žádný bod neleží). Uvažujme všechny kružnice procházející body $A$, $B$ a nějakým ze zadaných bodů. Jejich středy leží na jedné přímce (na ose úsečky $AB$) a podle zadání žádné dva středy nejsou totožné (body jsou v obecné poloze). Můžeme proto středy očíslovat zleva doprava indexy $1, 2, \ldots, 2n-1$. Navíc si každý střed označíme písmenem $L$, pokud příslušná kružnice prochází bodem v levé polorovině a písmenem $P$, prochází-li bodem v pravé polorovině (viz obrázek – kružnice procházející body v pravé polorovině jsou pro přehlednost značeny čárkovaně). Budeme rozlišovat kružnice typu $L$ a kružnice typu $P$.




Postupně si uvědomíme dvě klíčová pozorování. Nejdříve se podíváme, jak se mění počty bodů uvnitř kružnic, jdeme-li zleva doprava. Počet bodů uvnitř kružnice se středem $S_i$ budeme značit $u(i)$ (ať už se jedná o kružnici typu $L$ či $P$) a zdůrazněme, že počítáme jen body uvnitř, nikoliv bod na hranici. Vezměme si dva sousední středy $S_i$, $S_{i+1}$. Budeme-li uvažovat bod $T$ pohybující se po úsečce $S_iS_{i+1}$ a kreslit kružnice o středu $T$ a poloměru $|TA| = |TB|$, pak stopa, kterou za sebou kružnice zanechají, bude odpovídat oblasti vyšrafované na obrázku.

[20]C'est-à-dire aucuns trois points points ne se retrouvent sur la même droite et aucuns quatre points ne se retrouvent sur le même cercle.




Je tedy zřejmé, že uvnitř vyšrafované oblasti se nenachází žádný bod, protože jsme vzali sousední středy. Podle typu středů ($P$ nebo $L$) tedy rozhodneme, jak se mění čísla $u(i)$, $u(i+1)$, jdeme-li zleva doprava.

| | |
|---|---|
| P, P | $+1$ |
| L, P | 0 |
| P, L | 0 |
| L, L | $-1$ |

Toto pozorování nám říká, že posloupnost $u(1), u(2), \ldots, u(2n-1)$ může klesat jen na středech typu $L$ (a to jen na některých – konkrétně jsou-li dva za sebou) a růst může jen na (některých) středech typu $P$. Takže kdykoliv jsou středy s indexy $i, k$, $i < k$, stejného typu a jejich kružnice obsahují stejný počet bodů ($u(i) = u(k) = t$), pak existuje střed opačného typu s indexem $j$, $i < j < k$, jehož kružnice obsahuje tentýž počet bodů ($u(i) = u(j) = u(k) = t$). Toto pozorování budeme posléze aplikovat na modré kružnice, tedy pro $t = n - 1$.

Druhé pozorování je, že ze zbývajících $2n - 1$ bodů (máme teď na mysli zadané body, nikoliv středy kružnic) jich nemůže být stejně vlevo i vpravo – bez újmy na obecnosti jich je více v levé polorovině, a to alespoň $n$. Vezměme kružnici se středem typu $L$ s nejmenším indexem, který označíme $L_{\min}$, analogicky označíme $L_{\max}$ střed s největším indexem. Je-li $\min > 1$, pak všechny kružnice se středy $P_1, \ldots, P_{\min-1}$ obsahují celou část kružnice se středem $L_{\min}$, která leží v levé polorovině. Je proto $u(i) \geq n$ pro každé $i = 1, \ldots, \min - 1$, takže žádná kružnice se středem $P_1, \ldots, P_{\min-1}$ není modrá. Naprosto analogicky zjistíme, že žádná z kružnic se středem napravo od $L_{\max}$ není modrá (tyto kružnice neobsahují ani jeden bod z levé poloroviny a ani bod, kterým procházejí, tedy $u(i) \leq (2n - 1) - n - 1 = n - 2$ pro každé $i = \max + 1, \ldots, 2n - 1$).

S těmito pozorováními se konečně dostáváme k cíli. Jelikož $u(\min) \geq n - 1 \geq u(\max)$, nějaká modrá kružnice existuje a střed té modré kružnice, který je nejvíce vlevo, je nutně typu $L$. Stejně tak i střed modré kružnice, který je nejvíce vpravo, je nutně typu $L$. Tudíž dostáváme, že je-li počet modrých kružnic typu $L$ roven $p$, pak počet modrých kružnic typu $P$ je $p-1$, což je celkem $2p - 1$, a tedy počet modrých kružnic, které procházejí vybranými body $A$,$B$, je lichý.

Abychom spočítali úplně všechny modré kružnice, musíme postupně vzít všechny možné dvojice $A$,$B$, těch je $\binom{2n+1}{2} = \frac{(2n+1)\cdot 2n}{2!} = (2n+1)\cdot n$. Počet modrých kružnic procházejících dvojicí $A$,$B$ si označme $l_{A,B}$, což je liché číslo. Každou modrou kružnici započítáme přesně třikrát (pro dané tři body $A, B, C$ určující modrou kružnici ji započítáme pro dvojice $\{A, B\}$, $\{B, C\}$, $\{C, A\}$), takže pro počet $m$ modrých kružnic dostáváme

$$3m = \sum_{A,B} l_{A,B},$$

kde sčítáme přes všechny dvojice bodů. Napravo máme $(2n + 1) \cdot n$ lichých sčítanců, takže součet je lichý pro $n$ liché a sudý pro $n$ sudé, což jsme chtěli dokázat.