Povídání k páté sérii

Milý řešiteli,

tento úvodní text by Ti měl nejen pomoci při řešení úloh 5. série, ale zároveň také osvětlit metodu někdy též zvanou přihrádkový princip. V literatuře se též můžeš setkat s pojmy jako jsou princip holubníku nebo Dirichletův princip.

Přihrádkový princip

Všechny tyto termíny však pouze popisují jednu selskou úvahu:

Věta. (Přihrádkový princip – slabá verze) *Jestliže umístíme $n+1$ objektů do n krabic, potom bude existovat krabice, ve které jsou alespoň dva objekty.*

Nebo její zobecnění:

Věta. (Přihrádkový princip – silnější verze) *Jestliže umístíme $kn+1$ objektů do n krabic, potom bude existovat krabice, ve které je alespoň $k+1$ objektů.*

Úloha na sblížení

V typických úlohách jde vždy o to najít „krabice“ a objekty. Pak stačí jen aplikovat princip. Návodem budiž následující úloha:

Úloha. Dokažte, že z daných $n+1$ různých přirozených čísel $a_1, a_2, \dots, a_{n+1}$ se dá vybrat k čísel po sobě jdoucích takových, že n dělí jejich součet.

Řešení. Zkoumejme nejprve součet skupin po sobě jdoucích čísel začínajících číslem a_1. Proto si označíme $b_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_k$ pro $k = 1, 2, \dots, n$. Tato čísla b_k si rozdělme do n přihrádek podle toho, jaký dávají zbytek po dělení číslem n (tj. $0, 1, \dots, n-1$). Jenže jelikož máme n čísel a_k, máme též n čísel b_k, a tudíž musí nutně dvě čísla b_k, označme je b_p a b_q, kde $0 < p < q < n+1$, dávat po dělení n stejný zbytek. Odečteme-li od sebe tato dvě čísla b_q a b_p, dostáváme číslo dělitelné n. Avšak když si rozepíšeme rozdíl $b_q - b_p$, dostáváme:

$$n \mid b_q - b_p = a_{p+1} + a_{p+2} + \cdots + a_q \qquad 0 < p < q < n+1$$

A nalezli jsme tedy hledanou skupinu po sobě jdoucích čísel dělitelnou n.

Další zdroje

Pokud byste se chtěli dozvědět víc, hledejte na našich stránkách `www.mks.mff.cuni.cz` v sekci *knihovna* nebo se nás neostýchejte zeptat na e-mailu `mks@mff.cuni.cz`.

5. série

Téma:	Přihrádkový princip
Datum odeslání:	16. února 2009

0. úloha (1 bod)

Napiš povídku o tom, jak vypadá obyčejný den holuba v Dirichletově přihrádce.

1. ÚLOHA (3 BODY)

Alča si neví rady s jedním matematickým problémem. Kenny, Miško nebo Jarda jí mohou poradit, ale protože je honí mlsná, rozhodli se, že to nebude zadarmo. Kenny za dobrou radu vyžaduje 15 gumových medvídků, ale jí jen červené, Miško je skromnější, stačí mu 11 medvídků, zato však jen těch nejlepších – zelených. Jarda není žádný troškař, chce 17 medvídků, a to jedině žlutých. Jak velké balení (s kolika nejméně medvídky) musí Alča koupit, aby měla jistotu, že jí někdo poradí? V každém balení jsou v náhodném (neznámém) poměru namícháni jen červení, zelení a žlutí medvídci a obal je neprůhledný, takže Alča nevidí dovnitř.

2. ÚLOHA (3 BODY)

Franta letos nebyl spokojen se svým adventním kalendářem, a tak se po Vánocích rozhodl, že si na příští rok vyrobí lepší. Chce, aby měl 24 okýnek uspořádaných do obdélníku a aby je mohl vyjídat esteticky, to jest tak, že nebude mít v žádném řádku ani sloupci vyjedená dvě okýnka. Dokažte, že ať vyrobí kalendář jakkoli, nejpozději pátý den se mu to stejně pokazí a jeho estetické cítění utrpí.

3. ÚLOHA (3 BODY)

Na soustředění hraje n PraSátek turnaj ve foukbale systémem každý s každým. Turnaj probíhá tak, že vždy dva soupeří a všichni ostatní fandí. A tak se pěkně popořadě odehrají všechny zápasy. Dokažte, že v každém okamžiku turnaje existují dva hráči, kteří mají stejný počet odehraných zápasů.

4. ÚLOHA (5 BODŮ)

Zuzanka zorganizovala velkolepou narozeninovou oslavu. Předem naplánovala zasedací pořádek hostů kolem velikého otočného kulatého stolu a umístila na něj cedulky se jmény. Příchozím se to však nezamlouvalo a na protest si všichni záměrně sedli na špatné místo. Dokažte, že může Zuzanka otočit stůl tak, aby aspoň dva hosté seděli na svém místě.

5. ÚLOHA (5 BODŮ)

Je dán čtverec a 9 přímek. Každá z těchto přímek dělí čtverec na dva čtyřúhelníky takové, že poměr jejich obsahů je $\frac{2}{3}$. Dokažte, že alespoň tři z těchto přímek procházejí jedním bodem.

6. ÚLOHA (5 BODŮ)

Na přímce p leží 6 úseček $u_1, u_2, \dots, u_6$ o délkách po řadě $d_1, d_2, \dots, d_6$, které se vzájemně nepřekrývají[1]. Sestrojme body $S_1, S_2, \dots, S_6$ takové, že všechny leží ve stejné polorovině s hraniční přímkou p a každý bod S_i tvoří spolu s dvěma krajními body úsečky u_i $(i = 1, 2, \dots, 6)$ rovnostranný trojúhelník. Uvažme 6 kruhů se středy v bodech $S_1, S_2, \dots, S_6$ o poloměrech $d_1, d_2, \dots, d_6$. Dokažte, že těchto 6 kruhů nemá společný bod.

7. ÚLOHA (5 BODŮ)

Miro si vymyslel šestnácticiferné číslo. Ukažte mu, že z něj umíte vybrat několik[2] po sobě jdoucích cifer tak, že když je mezi sebou vynásobí, dostane druhou mocninu celého čísla.

8. ÚLOHA (5 BODŮ)

Pavel si napsal na papír $n^2 + 1$ přirozených čísel, která se mu líbila, a všiml si, že kdykoli vybere

[1] ani v krajních bodech

[2] to znamená aspoň jednu

nějakých $n+1$ z nich, najde mezi nimi dvě čísla a, b taková, že $a \mid b$. Dokažte, že některých $n+1$ z Pavlových čísel – označme je $a_1, \ldots, a_{n+1}$ – má tu vlastnost, že $a_1 \mid a_2, a_2 \mid a_3, \ldots, a_n \mid a_{n+1}$.

Řešení 5. série

0. úloha
Napiš povídku o tom, jak vypadá obyčejný den holuba v Dirichletově přihrádce.

Ako zvyčajne k nultej úlohe namiesto vzorového riešenia uvádzame tie najzaujímavejšie riešenia od vás. Tentokrát prišlo dokopy 13 zaujímavých poviedok. Z toho asi päť bolo o tom, ako holub nerobí nič iné, než že trávi celý deň (a hlavne noc) s holubicami. Zaujímavé je, že všetky z nich nám poslali dievčatá :)

Vybrať tie najlepšie však vôbec nebolo ľahké, keďže každá poviedka vynikala v niečom inom. Nakoniec sladkú odmenu posielame týmto dielam:

Darina Fedorová
„Uáááh, to jsem se dnes dobře vyspal!“ zaradoval se mladý holub, když ráno otevřel oči a vykoukl ven z holubníku. „Co je dnes vlastně za den, když tak krásne svítí sluníčko?“ pomyslel si. Podíval se do trhacího kalendáře s obrázky laškovných hrdliček a zbělel hrůzou. „Ale ne! Dneska jsem na řadě!“ Nálada mu rázem klesla na bod mrazu. V jejich velkém holubníku byla spousta komůrek, ale problém byl v tom, že jejich majitel neuměl spočítat holuby, a tak má o jednoho holuba víc než přihrádek. Ale chytří holubi zavedli řád, kdy sepsali všechny holuby a jednou za čas museli spát dva holubi v jedné komůrce. Pro takového holuba to není nic příjemného, to mi věřte.

No a právě dnes byla řada na našem holubovi. „Božínku okřídlenej, to já se zas dneska nevyspím. Budu se tlačit kdoví s kým a ráno budu víc ospalý než večer!“ Mladý holub se rozhodl, že se zaletí podívat na rozpis a zjistí, s kým že to bude dnes trávit noc. Nálada se mu vrátila ihned poté, co zjistil, že v jeho komůrce přespí krásná hrdlička Bílonožka, která se mu už dlouho líbila a měl podezření, že on jí také není lhostejný.

Po tomto zjištění se den táhl strašně pomalu. Tak moc se těšil na Bílonožku. Lítal tam a sem a představoval si krásnou noc.

Konečne zapadlo slunce a mladý holub se vydal zpět do holubníku. Ještě než dorazil domů, zdáli uviděl, že se něco děje. „Co je? Co se stalo?“ vyzvídal. „Starej holub natáhl brka.“ pošeptal mu kdosi. „Cože? To není možné, ještě ráno byl fit.“ „Jenže po poledním ho málem zadávila kočka od sousedů a on tak tak vyvázl. Nicméně ho potom ranila mrtvice a my jsme mu už nedokázali pomoct. To k životu prostě patří. Ale pro tebe to znamená, že budeš mít komůrku jenom pro sebe. Byl jsi dneska na řadě, že? S kým si měl být?“

Mladý holub zalapal po dechu a celý zrudl. Bylo mu líto starého holuba, ale ještě více litoval sebe. Jen s obtížemi ze sebe vysoukal: „S Bílonožkou.“

Kristýna Onderková
Holub se probudil a při pokusu o protažení křídel narazil do dalšího holuba. Ten se neklidně zavrtěl, čímž spustil řetězovou reakci. Pomalu se všichni holubi probouzeli. A to znamená co? Že se budou přesouvat. Proč by jinak byli vyrušeni?

Začali se připravovat na obřad Přemístění a nedočkavě vyčkávali. Když si stoupnou, každý na své místo, každý postupně zazpívá, jejich víra snad bude vyslyšena a Bránou přijde Velký pařát, který je odnese do krásné nové čisté Klece, která je plna zrní. Každý se snaží zpívat co nejlépe, aby právě on byl vybrán do té největší klece s nejvíc zrním a neskončil někde namačkán s dalšími smolaři, kteří dostatečně nezpívali. Občas jsou někde slyšet zvěsti, že při tajných rituálech se mohou dostat do Obrovské přihrádky, kde není vidět na strop, kde je snad i více druhů zrní...

Vybral si dobrou přihrádku, je velká a plná ptactva dychtivého Přemístění. Zhluboka se nadechl, jak se odhodlával k činu, a roztáhl křídla. „Vrkůůů“ upoutal na sebe veškerou pozornost. Přihrádkou zašuměla křídla a holubi natočili oko k narušiteli pořádku.

„Bratři slyšte,“ začal „povím Vám pravdu o bohyni Zrní, bohu Zdí i bohu Stropu, povím vám, odkud se bere Velký pařát. Řeknu Vám i o bozích Sena, Chodeb i Velkých očí. Ale co je důležité, dozvíte se pravdu o Přemístění a Obrovské přihrádce.“ Všichni tiše naslouchali a kouleli svým ptačím okem, hledícím na řečníka.

„Bratři, Ti bohové, které jsem vyjmenoval – neexistují! Bůh je pouze jeden a jeho jméno je ... Dirichlet!“ vzbudil v přihrádce čilý ruch, křidýlka klepala o sebe, ale za chvíli ho přerušil. Mluvil dál „Velký pařát je součást našeho jediného boha – Dirichleta a nezáleží na tom, jak moc se snažíte zpívat, jde pouze o náhodu. Bůh mezi námi nečiní rozdíly, podle Něj jsme si všichni podobní. Používá nás ke Vyšším výpočtům, jejichž smysl možná mnozí z Vás nepochopí. Ale pravda je ... že jestliže nás alespoň v jedné přihrádce nebude aspoň $k + 1$ ... důsledky si ani neumíte představit!“ jeho hlas nabíral na hlasitosti, až dosáhl svých hranic.

Všichni mlčeli a pozorovali, jak zatímco mluví, otevírá se Brána a přibližuje se Velký pařát. Stihne ho spravedlivý trest. Když se pařát dotkl jeho šedivého peří, poprvé si ho všiml, ale už byl tažen pryč.

„Nezapomeňte, možná se s některými z Vás setkám v další přihrádce!“

Jan Vaňhara

Probudil ji hluk budíku. Zvonil hlasitěji než řvoucí tygr a tak nebylo divu, že ji vzbudil. Okamžitě otevřela oči a sklopila je směrem k budíku.

„Cože? Půl osmé? To snad ne! Vstávat, vstávat lenoši. Okamžitě vstaňte je půl osmé. Za chvilku vám začíná škola.“

Poslední dvě věty už skoro křičela jako by se snažila překřičet budík, který vzápětí zaklapla. A už to šlo ráz naráz. Děti vyskočili z postelí, popadli tašky a vyběhli ven. Tedy spíše vyletěli jak z holubníku ačkoliv oni v holubníku bydleli. Tedy spíše v Dirichletově přihrádce přestavěné na holubník. No, oni to vlastně... byli holubi. A jejich matka, to je ta, co je okamžitě po probuzení vyhnala z postelí, byla holubice. Žádný div, že po té co vyletěli, se trošku nasnídala a dala se hned do uklízení.

„Tady je to jak v holubníku“ pomyslela si a v duchu se zasmála. „No, ale než se děti vrátí, tak to tu dám aspoň trochu do pořádku.“ A tak celé dopoledne uklízela. Když už bylo skoro poledne, kdosi zaklepal na dveře. Holubice šla samozřejmě otevřít A za dveřmi nebyl nikdo jinší než samotný pan Dirichlet.

„Co nám nesete sousede?“ optala se, ale pan Dirichlet se jen usmál pod vousy a odpověděl: „Spíš si něco odnesu drahá sousedko. To víte, je konec měsíce, činže volá.“ „Á tak“ došlo holubici a šla dozadu ke skříňce, ve které měla peníze určené na činži. Před odchodem se na ni obrátil ještě pan Dirichlet s inteligentní otázkou: „Že Vás tady bydlí aspoň 8?“ „No přesněji 10 je nás.“ Odpověděla mu a on se na ni překvapeně podíval. „Tak to musím mít někde chybu“ usmál se a odešel. Holubice jen zakroutila hlavou a šla si dál uklízet Ve tři hodiny se rázem rozletěli dveře a nimi se dovnitř nahrnulo celé její dětské osazenstvo a všechno co tak pracně několik hodin uklízela bylo za pět minut zase zpátky ve svém nepořádku. A to už se rozčílila. „Buď to tu všechno uklidíte nebo nedostanete večeři.“ A děti jakoby rázem zmlkli. Podívali se na mamku jestli to myslí vážně a jelikož měla v očích ještě zlobné jiskřičky, tak se raději pustili do uklízení. Než to vše uklidili uběhla jenom chvilka a tak si šli hrát ven, protože vevnitř by dělali jen nepořádek. A tak si holubice mohla nachvilku sednout a přečíst si její oblíbený časopis Hobby s přílohou o chovu holubů. Potom se pustila do vaření večeře. Chvilku než měla uvařeno zavolala na děti ať se jdou umýt a k večeře. Dětem samozřejmě ze všech her vytrávilo a tak se při večeři podrbávali i pod křídly. A jelikož už se rychle smrákalo poslala je mamka spát A sama si šla také lehnout. A tak tam tak žili v Dirichletově přihrádce do skonání věků.

1. úloha

Alča si neví rady s jedním matematickým problémem. Kenny, Miško nebo Jarda jí mohou poradit, ale protože je honí mlsná, rozhodli se, že to nebude zadarmo. Kenny za dobrou radu vyžaduje 15 gumových medvídků, ale jí jen červené, Miško je skromnější, stačí mu 11 medvídků, zato však jen těch nejlepších – zelených. Jarda není žádný troškař, chce 17 medvídků, a to jedině žlutých. Jak velké balení (s kolika nejméně medvídky) musí Alča koupit, aby měla jistotu, že jí někdo poradí? V každém balení jsou v náhodném (neznámém) poměru namícháni jen červení, zelení a žlutí medvídci a obal je neprůhledný, takže Alča nevidí dovnitř.

Řešení takové úlohy je třeba rozdělit na dvě části: V první si uvědomíme, kolik medvídků ještě nestačí, tj. ani jeden z chlapců v balení nebude mít požadovaný počet, tj. $(17-1)+(11-1)+(15-1)=40$. Toto si můžeme představit jako tři přihrádky o kapacitách 16, 10 a 14. Při 40 medvídcích mohou být všechny naplněny právě po okraj. To je to nejsmolnější rozložení, jaké by Alča mohla v sáčku zjistit, ale stát se to může.

V druhé části ukážeme, že jakýkoliv sáček s 41 medvídky stačí na to, aby Alča radu dostala. Naše tři přihrádky mají celkovou kapacitu 40 medvídků, takže podle Dirichletova principu musí jeden medvídek přebýt a Alča bude mít pro jednoho z chlapců požadovaný počet. Aby Alča zaručila, že jí někdo za daných podmínek poradí, potřebuje balení s alespoň 41 medvídky.

2. úloha

Franta letos nebyl spokojen se svým adventním kalendářem, a tak se po Vánocích rozhodl, že si na příští rok vyrobí lepší. Chce, aby měl 24 okýnek uspořádaných do obdélníku a aby je mohl vyjídat esteticky, to jest tak, že nebude mít v žádném řádku ani sloupci vyjedená dvě okýnka. Dokažte, že ať vyrobí kalendář jakkoli, nejpozději pátý den se mu to stejně pokazí a jeho estetické cítění utrpí.

Připusťme, že Franta může adventní kalendář vyjídat esteticky pět dní. Kdyby měl jeho kalendář méně než 5 řádků nebo méně než 5 sloupců, pak by (podle přihrádkového principu) nejpozději pátý den musel Franta v některém řádku nebo sloupci vyjíst čokoládu už z druhého okýnka. Jeho kalendář má tedy aspoň 5 řádků a aspoň 5 sloupců, čili nejméně $5\times 5=25$ okýnek, což je spor. Proto nejpozději 5. prosince utrpí Frantovo estetické cítění.

3. úloha

Na soustředění hraje n PraSátek turnaj ve foukbale systémem každý s každým. Turnaj probíhá tak, že vždy dva soupeří a všichni ostatní fandí. A tak se pěkně popořadě odehrají všechny zápasy. Dokažte, že v každém okamžiku turnaje existují dva hráči, kteří mají stejný počet odehraných zápasů.

V každém okamžiku turnaje můžeme roztřídit soutěžící PraSátka do přihrádek podle počtu odehraných zápasů. Každé z n PraSátek jich mohlo odehrát $0, 1, \ldots, n-1$. Máme tedy celkem n přihrádek, všimněme si však, že vždy první nebo poslední je prázdná. Nemůže totiž nastat situace, že někdo již bude mít odehraných všech $n-1$ zápasů, zatímco někdo jiný ještě žádný. Čili máme n PraSátek v $n-1$ přihrádkách, proto existují aspoň dvě PraSátka, která odehrála stejný počet zápasů.

4. úloha

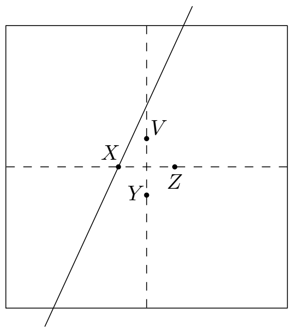
Zuzanka zorganizovala velkolepou narozeninovou oslavu. Předem naplánovala zasedací pořádek hostů kolem velikého otočného kulatého stolu a umístila na něj cedulky se jmény. Příchozím se to však nezamlouvalo a na protest si všichni záměrně sedli na špatné místo. Dokažte, že může Zuzanka otočit stůl tak, aby aspoň dva hosté seděli na svém místě.

Zuzka může otočit stůl n způsoby. Jeden z nich je, že stůl neotočí a v něm není na svém místě žádný host. Zbývá $n-1$ způsobů. Protože každý host je právě při jednom otočení na svém místě a hostů je n, tak podle přihrádkového principu existuje otočení, kde jsou aspoň dva hosté na svém místě.

5. úloha

Je dán čtverec a 9 přímek. Každá z těchto přímek dělí čtverec na dva čtyřúhelníky takové, že poměr jejich obsahů je $\frac{2}{3}$. Dokažte, že alespoň tři z těchto přímek procházejí jedním bodem.

Čtyřúhelníky, na které přímky čtverce rozdělují, jsou zřejmě lichoběžníky. Střední příčka menšího lichoběžníka má délku $\frac{2}{5}a$, kde a je délka strany čtverce. (Obsah lichoběžníka se spočte jako $s \cdot v$, kde s je délka střední příčky a v jeho výška. Jelikož výška je u obou lichoběžníků rovna a, je poměr jejich obsahů roven poměru délek středních příček.) Každá přímka tedy prochází některým z bodů X, Y, Z, V, které leží na středních příčkách čtverce a dělí je v poměru $2:3$ (resp. $3:2$).



Jelikož je přímek 9, tak dle přihrádkového principu alespoň 3 z nich procházejí některým z bodů X, Y, Z, V.

6. úloha

Na přímce p leží 6 úseček $u_1, u_2, \dots, u_6$ o délkách po řadě $d_1, d_2, \dots, d_6$, které se vzájemně nepřekrývají[3]. Sestrojme body $S_1, S_2, \dots, S_6$ takové, že všechny leží ve stejné polorovině s hraniční přímkou p a každý bod S_i tvoří spolu s dvěma krajními body úsečky u_i $(i = 1, 2, \dots, 6)$

[3] ani v krajních bodech

rovnostranný trojúhelník. Uvažme 6 kruhů se středy v bodech $S_1, S_2, \ldots, S_6$ o poloměrech $d_1, d_2, \ldots, d_6$. Dokažte, že těchto 6 kruhů nemá společný bod.

Označení je jako v zadání, tedy na přímce p máme úsečky u_i, dále máme kruhy k_i se středy S_i, jejichž tětivy jsou u_i, $i = 1, 2, \ldots, 6$. Tvrzení dokažme sporem: předpokládejme, že existuje bod X ležící uvnitř[4] všech kruhů k_i. Uvažme tři možné polohy bodu X:

Bod X leží na přímce p: Průniky kruhů k_i s přímkou p jsou právě úsečky u_i. Ty však nemají společný bod, tudíž X nemůže být uvnitř všech kruhů k_i. Spor.

Bod X leží v opačné polorovině než středy S_i: Zde opět bod X může ležet maximálně v jednom z kruhů k_i, neboť každý z kruhů k_i v této polorovině obsahuje pouze body, které jsou „nad" úsečkou u_i (tj. mezi kolmicemi na p v krajních bodech u_i). Spor.

Bod X leží ve stejné polorovině jako středy S_i: Zde užijeme přihrádkový princip. Označme $u_i = A_iB_i$ a $\alpha_i = |\sphericalangle A_iXB_i|$. Protože X leží v jedné polorovině dané p a úhly α_i se nepřekrývají (protože u_i jsou disjunktní), máme $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_6 < 180°$. Tudíž dle přihrádkového principu jeden z úhlů α_i je menší než $30°$, označme ho α_j. Ovšem jelikož k_j má střed S_j a tětivu A_jB_j se středovým úhlem $60°$, musí každý bod Z kruhu k_j mít úhel $|\sphericalangle A_jZB_j| \geq 30°$, což plyne z věty o středovém a obvodovém úhlu. A proto X nemůže být vnitřní bod kruhu k_j. Spor.

Takový bod X, který by byl uvnitř všech kruhů k_i, tedy neexistuje.

7. úloha

Miro si vymyslel šestnácticiferné číslo. Ukažte mu, že z něj umíte vybrat několik[5] po sobě jdoucích cifer tak, že když je mezi sebou vynásobí, dostane druhou mocninu celého čísla.

Pokud se v Mirově čísle vyskytuje číslice $0, 1, 4$ nebo 9, máme dokázáno, neb stačí vybrat onu číslici a ta je sama o sobě čtverec.

Dále se tedy budeme zabývat jen čísly složenými z číslic $2, 3, 5, 6, 7, 8$.

Všimneme si, že 8 se chová stejně jako 2, neboť $8 = 2 \cdot 4 = 2 \cdot 2^2$. A 2^2 můžeme z osmičky „vyškrtnout" jelikož nijak neovlivňuje, zda celkový součin bude čtverec. Všechny osmičky tedy můžeme nahradit dvojkou.

Ještě si uvědomíme, že 6 se v prvočíselném rozkladu projeví stejně jako 2 a 3, tedy budeme-li zkoumat pouze prvočíselný rozklad, je nám úplně jedno, jestli v původním čísle byla 6 nebo 2 a 3.

Nyní uvažujme 16 čísel $a_1, a_2, \ldots, a_{16}$ takových, že a_i je součin všech cifer od první až do i-té. Každé a_i si zapíšeme pomocí prvočíselného rozkladu $a_i = 2^{\alpha_2} \cdot 3^{\alpha_3} \cdot 5^{\alpha_5} \cdot 7^{\alpha_7}$ (jiná prvočísla se v prvočíselném rozkladu nevyskytnou) a rozdělíme do šestnácti přihrádek podle parity[6] mocnin $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_5$ a α_7. Přihrádek je $16 = 2^4 =$ počet možností, jak mohou být parity nakombinovány. Je-li nějaké číslo ve škatulce odpovídající sudým mocninám u všech prvočísel, máme vyhráno, neboť takové číslo je čtverec.

V případě, že je přihrádka sudých exponentů prázdná, rozdělujeme 16 čísel do 15 různých přihrádek a podle Dirichletova principu budou alespoň v jedné přihrádce (alespoň) dvě čísla, označme je a_m a a_n, $m < n$. Vzhledem k tomu, jak byla čísla a_m, a_n vytvořena, je $a_n = Q \cdot a_m$ pro nějaké Q. Přesněji Q je součin cifer na $(m+1)$-té až n-té pozici. Pro toto Q navíc platí, že už má všechny exponenty $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_5, \alpha_7$ z prvočíselného rozkladu sudé (exponenty u prvočísla 2 v číslech a_n a a_m měly stejnou paritu a nový exponent v Q vznikl jejich odečtením, proto

[4] Tady slovem *uvnitř* myslíme uvnitř i na hranici.

[5] to znamená aspoň jednu

[6] Parita = určení, zda je číslo sudé nebo liché.

je nutně sudý – exponenty u 3, 5, 7 jsou sudé ze stejného důvodu). Q je tedy hledaná druhá mocnina. Ještě se sluší poznamenat, že úsek tvořící součin Q je vždy neprázdný, neboť mezi a_m a a_n je vždy alespoň 1 cifra.

8. úloha

Pavel si napsal na papír n^2+1 přirozených čísel, která se mu líbila, a všiml si, že kdykoli vybere nějakých $n+1$ z nich, najde mezi nimi dvě čísla a, b taková, že $a \mid b$. Dokažte, že některých $n+1$ z Pavlových čísel – označme je $a_1, \dots, a_{n+1}$ – má tu vlastnost, že $a_1 \mid a_2, a_2 \mid a_3, \dots, a_n \mid a_{n+1}$.

Ke každému číslu c přiřadíme největší možnou délku $l(c)$ posloupnosti čísel $c, d_2, d_3, \dots, d_{l(c)}$ takových, že $c \mid d_2 \mid d_3 \mid \cdots \mid d_{l(c)}$ (tím máme na mysli $c \mid d_2$, $d_2 \mid d_3$, atd.). Klíčové je uvědomit si, kolika různým prvkům můžeme přiřadit tutéž hodnotu l. Ukážeme, že tutéž hodnotu l můžeme přiřadit nejvýše n prvkům. Pro spor předpokládejme, že existují čísla $s_1, s_2, \dots, s_m$, $m \geq n+1$ taková, že $l(s_1) = l(s_2) = \cdots = l(s_m) = l$. Potom si z nich můžeme vybrat libovolných $n+1$ a dle zadání je mezi nimi dvojice a, b taková, že $a \mid b$. Označme ji s_i, s_j. Pak ale před nejdelší možnou posloupnost přiřazenou prvku s_j, která byla $s_j \mid d_2 \mid d_3 \mid \cdots \mid d_l$, je možné umístit číslo s_i a dostaneme tak posloupnost $s_i \mid s_j \mid d_2 \mid \cdots \mid d_l$ délky $l+1$, což je spor s maximalitou (neboť jsme předpokládali, že $l(s_i) = l$).

Nyní čísla rozdělíme do přihrádek podle přidělené hodnoty l. Do každé přihrádky se ale vleze nejvýše n čísel, takže pro n^2+1 čísel potřebujeme alespoň $n+1$ přihrádek. Existuje proto číslo a_1 takové, že $l(a_1) \geq n+1$, tedy existuje posloupnost $a_1 \mid a_2 \mid \cdots \mid a_{n+1} \mid \cdots \mid a_{l(a_1)}$, kterou jsme hledali.