7. série

Téma: Nerovnosti bez AG

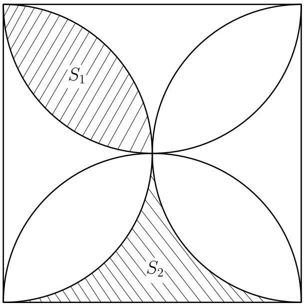
Datum odeslání: 14. dubna

0. úloha (1 bod)

Čokoládou budou odměněni ti, kteří nám pošlou číslo z intervalu $(0, 42)$, jež bude nejblíže harmonickému průměru všech došlých řešení.

1. úloha (3 body)

Monika se pokusila nakreslit si kytičku. Kytička se jí sice moc nepovedla, ale zato jí začalo hrozně moc zajímat, která z vyšrafovaných oblastí má větší obsah. Dokážete Monice poradit a svoji odpověď zdůvodnit?[1]



2. úloha (3 body)

V závislosti na přirozeném čísle n určete počet celočíselných řešení soustavy nerovnic pro neznámou x:

$$|x| < n$$
$$|x - n| > n$$

3. úloha (3 body)

Jsou dána kladná reálná čísla a, b, přičemž $a < b$. Rozhodněte, který ze zlomků

$$\frac{a^{2009}}{a^{2009} + a^{2008} + \cdots + a + 1} \quad \text{a} \quad \frac{b^{2009}}{b^{2009} + b^{2008} + \cdots + b + 1}$$

je větší. Svoji odpověď zdůvodněte.

4. úloha (5 bodů)

Mějme kladná reálná čísla x, y splňující $x + y = 2$. Dokažte nerovnost

$$x^2y^2(x^2 + y^2) \le 2$$

[1] Monika kreslí kytičky do čtverce a lístky dělá z půlkružnic.

5. ÚLOHA (5 BODŮ)

Posloupnost $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ splňuje vztahy $a_1 = 0$ a $|a_{i+1}| = |a_i + 1|$ pro každé $i \in \mathbb{N}$. Dokažte, že potom pro každé přirozené číslo n platí

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geq -\frac{1}{2}$$

6. ÚLOHA (5 BODŮ)

Jsou dána čísla a, b, c z intervalu $\langle 0, 1\rangle$. Dokažte nerovnosti

$$1 \leq 3abc + 4(1-a)(1-b)(1-c) + (a+b+c) \leq 6$$

7. ÚLOHA (5 BODŮ)

Lenka si vymyslela kladná reálná čísla $x_1, \dots x_n$, jejichž součet je 1. Pak si na papír napsala čísla

$$\frac{x_1}{1+x_1}, \frac{x_2}{1+x_1+x_2}, \frac{x_3}{1+x_1+x_2+x_3}, \dots, \frac{x_n}{1+x_1+\cdots+x_n}.$$

To největší z nich si označila M. Určete nejmenší možnou hodnotu M.

8. ÚLOHA (5 BODŮ)

Kladná čísla $a_1, \dots a_n$ splňují vztah

$$\frac{1}{1+a_1} + \frac{1}{1+a_2} + \cdots + \frac{1}{1+a_n} = 1.$$

Dokažte, že platí

$$\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2} + \cdots + \sqrt{a_n} \geq (n-1)\left(\frac{1}{\sqrt{a_1}} + \frac{1}{\sqrt{a_2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{a_n}}\right).$$

Řešení 7. série

0. úloha

Čokoládou budou odměněni ti, kteří nám pošlou číslo z intervalu $(0, 42)$, jež bude nejblíže harmonickému průměru všech došlých řešení.

Připomeneme-li si, jak je harmonický průměr definován, tedy

$$H(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}},$$

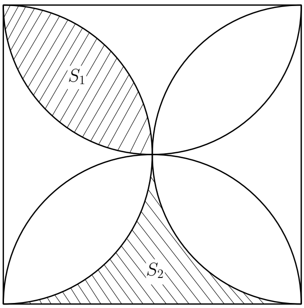
můžeme si uvědomit, že jeho hodnota bude pod průměrovanými čísly. Představ si, že někdo odevzdá velmi malé číslo. Ale opravdu hodně malé číslo. Pak $1/x_i$ bude velikánské, takže H bude $1/\mathit{hodn}ě$, čili něco, co bude tak malé, že to bude žádná celá a spousta nul (zhruba přes celé komentáře a ještě mnohem dál) a pak možná něco. A přesně k tomu došlo v řešení této úlohy, bo přišli hoši s velkými děly, jako je třeba Ackermannova funkce:

$$\begin{aligned} m = 0 \quad \& \quad n \geq 0 &: A(0, n) = n + 1; \\ m > 0 \quad \& \quad n = 0 &: A(m, 0) = A(m - 1, 1); \\ m > 0 \quad \& \quad n > 0 &: A(m, n) = A(m - 1, A(m, n - 1)). \end{aligned}$$

Ta roste rychleji než cokoli, co si dokážeš představit. Teď vezmi třeba $A(42, 42)$ nebo rovnou dosazuj dovnitř jiné hodnoty Ackermanna. Pak $1/\mathit{výsledek}$ odešli a máš šanci se vyrovnat třem nejbrutálnějším, kterými byli *Pepa Tkadlec*, *Šavlík* a *Vejtek Musil.* Ale bez záruky, protože při manipulaci s čísly, která nejde vyčíslit, je snadné udělat chybku.

1. úloha

Monika se pokusila nakreslit si kytičku. Kytička se jí sice moc nepovedla, ale zato jí začalo hrozně moc zajímat, která z vyšrafovaných oblastí má větší obsah. Dokážete Monice poradit a svoji odpověď zdůvodnit?[2]



Početní řešení:

Stranu čtverce si označíme $2r$. Poloměr kružnic z obrázku je tedy r.

$$\begin{aligned} 2S_1 + S_2 &= \frac{\pi r^2}{2} && \text{(obsah půlkruhu)} \\ 2S_2 &= (2r)^2 - \pi r^2 && \text{(obsah čtverce – 2 půlkruhy)} \\ S_2 &= \frac{r^2(4 - \pi)}{2} \\ S_1 &= \frac{r^2(\pi - 2)}{2} \end{aligned}$$

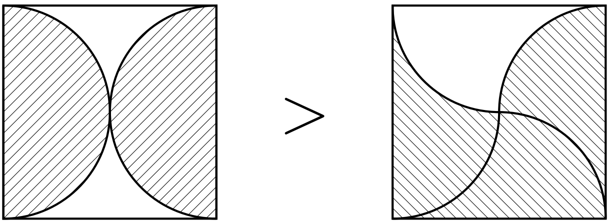
Pro porovnání S_1 a S_2 začneme fikaně od něčeho, co jistě platí, a ekvivalentními úpravami dojdeme k závěru:

[2] Monika kreslí kytičky do čtverce a lístky dělá z půlkružnic.

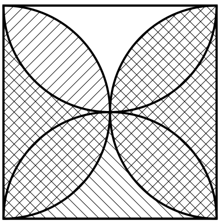
$$
\begin{aligned}
\pi &> 3 \\
2\pi &> 6 \\
\pi - 2 &> 4 - \pi \\
\frac{r^2(\pi - 2)}{2} &> \frac{r^2(4 - \pi)}{2} \\
S_1 &> S_2
\end{aligned}
$$

Pro obsahy jsme dostali závěr $S_1 > S_2$.

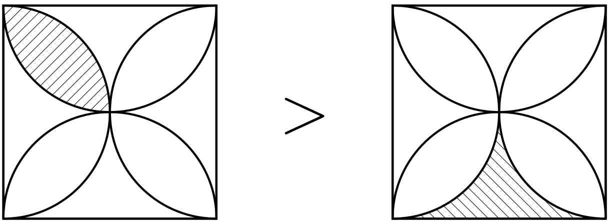
Grafické řešení podle Mirka Olšáka:
Poloměr půlkružnic označíme 1, takže čtverec, který kytičku ohraničuje, má délku strany 2. Vyjdeme ze známého faktu $\pi > 3$, takže obsah dvou půlkružnic o poloměru jedna (obsah $= 2 \cdot \frac{\pi \cdot 1^2}{2} = \pi$) je větší než obsah tří čtvrtin onoho čtverce o straně 2 (obsah $= \frac{3}{4} \cdot 2^2 = 3$).



Když tyto dva obrázky překryjeme, dostaneme:



Oblast, kde se oba typy šrafování překrývají, od obou stran nerovnice odečteme:



Závěr: $S_1 > S_2$.

2. úloha

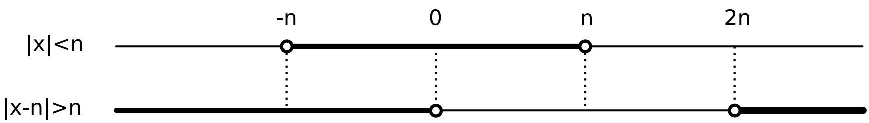
V závislosti na přirozeném čislu n určete počet celočíselných řešení soustavy nerovnic pro neznámou x:

$$|x| < n$$
$$|x-n| > n$$

Prvé riešenie:

Na absolútnu hodnotu výrazu $|a-b|$ sa môžeme pozerať ako na vzdialenosť čísel a a b na číselnej osi. Z prvej nerovnice potom máme, že vzdialenosť x od 0 je ostro menšia než n, teda $x \in (-n, n)$.[3] Z druhej nerovnice zistíme, že vzdialenosť x od n je ostro väčšia než n, takže $x \in (-\infty, 0) \cup (2n, \infty)$. Obe rovnice sú teda splnené práve vtedy, keď x patrí do oboch množín, takže spravíme prienik: $x \in (-n, 0)$.

Neznáma x je však zo zadania celé číslo, takže už len stačí spočítať počet celých čísel v tomto intervale. Sú to čísla $-1, -2, \dots, -(n-1)$, ktorých je dokopy $n-1$.



Druhé riešenie:

Absolútna hodnota mení svoje „správanie“ podľa toho, či je výraz vnútri kladný alebo záporný. Ak je a kladné, tak $|a| = a$, ak je záporné, tak $|a| = -a$ a pri nule je to nula.

Úlohu si teda môžeme rozdeliť na 3 intervaly tak, aby sa na každom z týchto intervalov správanie oboch absolútnych hodnôt nemenilo. Hraničné body budú zrejme tie, kde je niektorá absolútna hodnota nulová. Z prvej nerovnice je to bod $x = 0$ a z druhej $x = n$. Nezabudnime, že do rozoberania musíme zahrnúť aj tieto hraničné body:

(i) $x \leq 0$. Vnútro prvej absolútnej hodnoty je záporné, z čoho $-x < n \Rightarrow -n < x$. Vnútro druhej tiež, takže platí $-x + n > n \Rightarrow x < 0$. Počiatočné obmedzenie $x \leq 0$ už nič nové nehovorí, takže $x \in (-n, 0)$.

(ii) $0 < x \leq n$. Z prvej nerovnice máme $x < n$ a z druhej $-x + n > n \Rightarrow x < 0$, čo je ale v spore s predpokladom $0 < x \leq n$, takže v tomto intervale žiadne riešenia byť nemôžu.

(iii) $n < x$. Z prvej nerovnice máme $x < n$, čo už nemôže platiť, takže ani v tomto intervale riešenia nie sú.

Celkový počet riešení je teda počet celých čísel v intervale $(-n, 0)$, a tých je $n-1$, ako sme už zistili.

3. úloha

Jsou dána kladná reálná čísla a, b, přičemž $a < b$. Rozhodněte, který ze zlomků

$$\frac{a^{2009}}{a^{2009} + a^{2008} + \cdots + a + 1} \quad \text{a} \quad \frac{b^{2009}}{b^{2009} + b^{2008} + \cdots + b + 1}$$

[3] Zo zadania je n prirodzené, takže tento a aj nasledujúce intervaly sú korektné. (Napríklad pre $n = -3$ by sme mohli dostať $(3, -3)$, čo nie je interval.)

je větší. Svoji odpověď zdůvodněte.

Riešenie podľa Mirka Olšáka:
Keďže $a < b$, platí $1/a > 1/b$ a tiež $1/a^2 > 1/b^2,\ 1/a^3 > 1/b^3 \dots\ 1/a^{2009} > 1/b^{2009}$. Takže platí

$$1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} + \cdots + \frac{1}{a^{2009}} > 1 + \frac{1}{b} + \frac{1}{b^2} + \cdots + \frac{1}{b^{2009}}.$$

Jednotlivé zlomky upravíme na spoločného menovateľa

$$\frac{a^{2009} + a^{2008} + \cdots + a + 1}{a^{2009}} > \frac{b^{2009} + b^{2008} + \cdots + b + 1}{b^{2009}}.$$

A na záver prevrátením zlomkov dostaneme riešenie tejto úlohy

$$\frac{a^{2009}}{a^{2009} + a^{2008} + \cdots + a + 1} < \frac{b^{2009}}{b^{2009} + b^{2008} + \cdots + b + 1}.$$

4. úloha
Mějme kladná reálná čísla x, y splňující $x + y = 2$. Dokažte nerovnost

$$x^2y^2(x^2 + y^2) \leq 2$$

První řešení:
Položme $x = 1 + z,\ y = 1 - z$, kde $z \in (-1, 1)$. Upravujme levou stranu dokazované nerovnosti:

$$\begin{gathered} x^2y^2(x^2 + y^2) = (1 + z)^2(1 - z)^2\left((1 + z)^2 + (1 - z)^2\right) = \\ = (1 - z)^2(2 + 2z)^2 = 2(1 - z^2)(1 - z^2)(1 + z^2) = 2(1 - z^2)(1 - z^4). \end{gathered}$$

Jelikož $z \in (-1, 1)$, z^2 i z^4 jsou z intervalu $\langle 0, 1)$, výrazy $(1 - z^2)$ a $(1 - z^4)$ jsou kladné a menší nebo rovny jedné, tedy i jejich součin je kladný a menší nebo roven jedné. Platí tedy

$$2(1 - z^2)(1 - z^4) \leq 2,$$

což jsme chtěli dokázat.

Řešení podle Roberta Romera:[4]
Ze vztahu $x + y = 2$ vyjádřeme $y = 2 - x$, víme, že obě hodnoty x, y jsou kladné. Dokažme[5], že platí nerovnost $xy \leq 1$. Definujme funkci $f(x) = xy = x(2 - x) = 2x - x^2$. Je to parabola, která svého maxima nabývá ve vrcholu, tj. v bodě $x = 1$. Funkční hodnota je v tomto bodě 1, tedy $xy = f(x) \leq 1$.

[4] Neuvádíme doslovné řešení, spíš jen hlavní myšlenky.
[5] Mnozí z vás toto dokázali pomocí AG nerovnosti.

Jelikož $(x+y)^2 = 4$, máme $x^2 + y^2 = 4 - 2xy = 2(2 - xy)$. Upravme zadanou nerovnost:

$$x^2y^2(x^2 + y^2) = 2x^2y^2(2 - xy) = 2xy(2xy - (xy)^2).$$

Toto můžeme shora odhadnout dvojkou, protože $xy \leq 1$ a výraz $(2xy - (xy)^2)$ umíme odhadnout pomocí funkce f, neboť $f(xy) = 2xy - (xy)^2 \leq 1$.

Tímto jsme dokázali požadovanou nerovnost $x^2y^2(x^2 + y^2) = 2xy(2xy - (xy)^2) \leq 2$.

5. úloha

Posloupnost $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ splňuje vztahy $a_1 = 0$ a $|a_{i+1}| = |a_i + 1|$ pro každé $i \in \mathbb{N}$. Dokažte, že potom pro každé přirozené číslo n platí

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geq -\frac{1}{2}$$

První řešení:

Ukážeme, že pokud jsou v naší posloupnosti dva po sobě jdoucí členy, z nichž první je nezáporný a druhý záporný, pak tyto členy můžeme odebrat a dostaneme opět posloupnost vyhovující zadání (splňující vztah $|a_{i+1}| = |a_i + 1|$, který nazývejme podmínka z). Navíc bude součet odebraných členů roven -1, což přesně potřebujeme.

Je-li a_1 nezáporné (což je vždy, protože $a_1 = 0$) a a_2 záporné (v tom případě $a_2 = -1$), pak $a_3 = 0$, a tedy a_1, a_2 můžeme z posloupnosti vyjmout. Předpokládejme nyní, že a_i je nezáporné a a_{i+1} záporné pro nějaké $i > 1$. Protože $|a_{i+1}| = |a_i + 1|$, musí platit $a_{i+1} = -a_i - 1$. Pokračujme:

$$|a_{i+2}| \overset{z}{=} |a_{i+1} + 1| = |-a_i - 1 + 1| = |a_i| \overset{z}{=} |a_{i-1} + 1|.$$

Díky výsledné rovnosti $|a_{i+2}| = |a_{i-1} + 1|$ můžeme členy a_i, a_{i+1} vypustit i v tomto případě.

Zvolme n přirozené a z prvních n členů původní posloupnosti postupně odebírejme dvojice popsané výše. Po určitém počtu kroků se dostaneme do situace, kdy už žádné další odebrání nebude možné. V tom případě jsme buď vypustili všech n členů, nebo zbylé členy tvoří začátek nově vzniklé posloupnosti (která opět splňuje podmínky ze zadání). Protože ale prvním členem této posloupnosti je 0, musí být všechny členy, které jsme nemohli odebrat, nezáporné. Ještě si všimněme, že součet členů v každé z vynechaných dvojic je -1. Tedy součet $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ je větší nebo roven počtu odebraných dvojic krát -1, a protože těchto dvojic mohlo být nejvýše $n/2$, dostáváme

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n \geq -\frac{n}{2},$$

z čehož po vydělení číslem n plyne kýžená nerovnost.

Druhé řešení:

Rovnost $|a_{i+1}| = |a_i + 1|$ můžeme ekvivalentně napsat jako $a_{i+1}^2 = (a_i + 1)^2$. Odtud dostáváme $a_i = (a_{i+1}^2 - a_i^2 - 1)/2$. Sečteme-li tyto rovnosti přes všechna $i = 1, 2, \ldots, n$ (pro dané n přirozené), dostaneme

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + \cdots + a_n &= \frac{1}{2}\Big[(a_2^2 - a_1^2 - 1) + (a_3^2 - a_2^2 - 1) + \cdots + (a_{n+1}^2 - a_n^2 - 1)\Big], \\ &= \frac{1}{2}(a_{n+1}^2 - a_1^2 - n) = \frac{1}{2}(a_{n+1}^2 - n) \geq -\frac{n}{2}. \end{aligned}$$

6. úloha

Jsou dána čísla a, b, c z intervalu $\langle 0, 1\rangle$. Dokažte nerovnosti

$$1 \leq 3abc + 4(1-a)(1-b)(1-c) + (a+b+c) \leq 6$$

S danou nerovností se dalo vypořádat hned několika různými způsoby, nebudu zdržovat a rovnou vám je vyložím. Ještě předtím si však výraz $3abc + 4(1-a)(1-b)(1-c) + (a+b+c)$ označíme jako V, abychom se s ním nemuseli všude vypisovat.

První řešení (asi nejčastější):

Prvně dokážeme „levou“ nerovnost $1 \leq V$. Upravíme si pravou stranu nerovnice prostým roznásobením a poté si šikovně přeskupíme členy k sobě.

$$\begin{aligned} V &= 4 - 3a - 3b - 3c + 4ab + 4bc + 4ac - abc \\ &= 3(1 - a - b - c + ab + ac + bc - abc) + ab + ac + bc + abc + abc + 1. \end{aligned}$$

Závorka na posledním řádku je rovna $(1-a)(1-b)(1-c)$, tedy můžeme psát:

$$\begin{aligned} 1 &\leq 3(1-a)(1-b)(1-c) + ab + ac + bc + abc + abc + 1, \\ 0 &\leq 3(1-a)(1-b)(1-c) + ab + ac + bc + abc + abc. \end{aligned}$$

Na pravé straně sčítáme šest nezáporných čísel (ze zadání víme, že $a, b, c \geq 0$) a navíc $a, b, c \leq 1$, a tedy i $(1-a), (1-b), (1-c) \geq 0$, čímž je první nerovnost dokázána.

Nyní druhá nerovnost, $V \leq 6$. Uvědomíme si, že pro všechna $a, b, c \in \langle 0, 1\rangle$ platí nerovnosti $abc \leq a$ a $(1-a)(1-b)(1-c) \leq (1-a)$.[6] Použitím těchto nerovností a následným roznásobením dostáváme

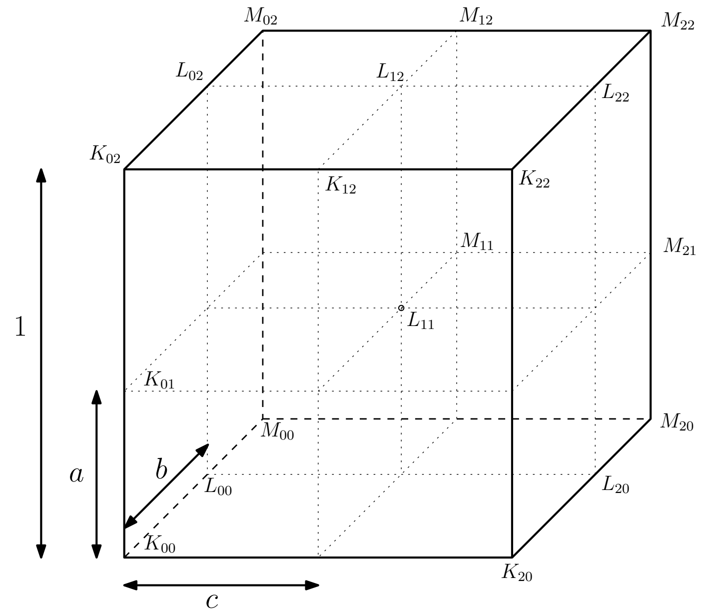
$$V = 3abc + 4(1-a)(1-b)(1-c) + (a+b+c) \leq 3a + 4(1-a) + (a+b+c) = 4 + b + c \leq 6,$$

kde poslední nerovnost platí díky tomu, že $b, c \leq 1$. Dokázáno jest.

Řešení podle Myrega Klimoše:

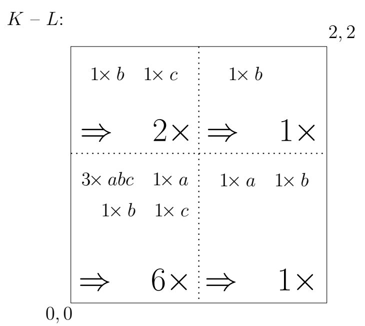
Mějme jednotkovou krychli, vzdálenosti a, b, c vynesme z bodu K_{00} na hrany. Body označme schematicky podle obrázku.

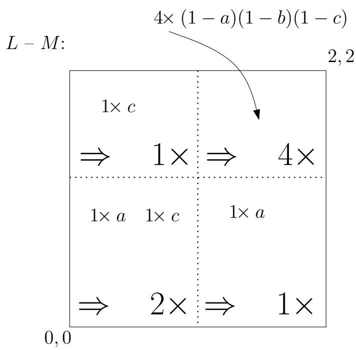
[6] Je-li a, resp. $(1-a)$, rovno nule, platí nerovnosti triviálně, a pokud je a, resp. $(1-a)$, kladné, můžeme jím nerovnost vydělit beze změny nerovnítka a pak už je to vidět. (-:



abc	je objem kvádru	s protějšími vrcholy	K_{00}	L_{11}
$(1-a)(1-b)(1-c)$	je objem kvádru		L_{11}	M_{22}
$a \cdot 1 \cdot 1 = a$	je objem kvádru		K_{00}	M_{21}
$b \cdot 1 \cdot 1 = b$	je objem kvádru		K_{00}	L_{22}
$c \cdot 1 \cdot 1 = c$	je objem kvádru		K_{00}	M_{12}

Kolikrát jsme ve výrazu V počítali každý z osmi malých kvádrů? Zapišme po vrstvách.





Celkový objem je větší než objem krychle (což je 1), neboť každý podkvádr jsme započítali alespoň jednou. Tedy

$$1 \leq 3abc + 4(1-a)(1-b)(1-c) + (a+b+c).$$

Rovnost nastane pro $a = b = 0$ a $c = 1$. Hodnoty je možno cyklicky zaměnit.

Žádnou z částí jsme nezapočítali více než šestkrát, tedy jejich celkový objem je menší nebo roven objemu šesti krychlí, čili

$$3abc + 4(1-a)(1-b)(1-c) + (a+b+c) \leq 6.$$

Rovnost nastane pro $a = b = c = 1$.

Řešení podle Mirka Olšáka:

Nerovnici upravím na

$$\frac{1}{6} \leq \frac{abc}{6} + \frac{abc}{6} + \frac{abc + (1-a)(1-b)(1-c)}{6} + \frac{a + (1-a)(1-b)(1-c)}{6} +$$
$$+ \frac{b + (1-a)(1-b)(1-c)}{6} + \frac{c + (1-a)(1-b)(1-c)}{6} \leq 1.$$

Interval $\langle 0, 1\rangle$ vybízí k odvolávání se na pravděpodobnost. Dejme tomu, že máme mince A, B a C (každá má dvě strany, pannu a orla), přičemž pravděpodobnost, že na určité minci padne panna je rovna příslušné neznámé. Hodíme si těmito mincemi a jednou pravou nefalšovanou šestistěnnou kostkou. Budeme se snažit dosáhnout pravděpodobnosti výhry, která bude rovna prostřednímu členu nerovnosti.

Pokud na kostce padne jednička nebo dvojka, vyhrajeme jen za předpokladu, že na všech mincích padne panna.[7] Pokud na kostce padne trojka, vyhrajeme, pokud na všech třech mincích padne stejný symbol.[8] Pokud na kostce padne čtyřka, chceme, aby na kostce A padla panna, a když už na ní padne orel, chceme, aby padl orel i na dalších dvou mincích. Podobně když na kostce padne pětka, chceme, aby na všech mincích padl orel nebo na minci B padla panna (o ostatní mince se v tu chvíli nezajímám), a když na kostce padne šestka, chceme, aby padla panna na minci C nebo aby všude padl orel.

Je to poněkud krkolomné, ale funguje to. Jelikož je prostřední člen nerovnice pravděpodobností, leží jeho hodnota v intervalu $\langle 0, 1\rangle$, takže pravá nerovnice platí.

Platnost levé nerovnice můžeme dokázat tak, že nám šťastný hod kostkou může zaručit výhru při jakémkoliv rozhozu mincí. Když na minci A padne panna, vyhrajeme tak, že na kostce padne 4, když na minci B padne panna, vyhrajeme tak, že na kostce padne 5, a když na minci C padne panna, vyhrajeme tak, že nám na kostce padne 6. Pokud ani jedna z těchto možností není splněna, tedy na všech mincích je orel, zajistí nám výhru, hodíme-li kostkou číslo větší než 2.

7. úloha

Lenka si vymyslela kladná reálná čísla $x_1, \ldots x_n$, jejichž součet je 1. Pak si na papír napsala čísla

$$\frac{x_1}{1+x_1}, \frac{x_2}{1+x_1+x_2}, \frac{x_3}{1+x_1+x_2+x_3}, \ldots, \frac{x_n}{1+x_1+\cdots+x_n}.$$

---

[7] To je přesně to, co říkají první dva sčítance prostředního členu nerovnosti, neboť abc jako součin pravděpodobností je pravděpodobnost, že nastanou všechny tři jevy zároveň, tedy všude padne panna.

[8] To říká pro změnu třetí sčítanec, jelikož abc je pravděpodobnost, že všude padla panna, a $(1-a)(1-b)(+-c)$ je pravděpodobnost, že všude padl orel. Navíc tyto jevy nikdy nenastanou zároveň, a tedy jejich pravděpodobnosti můžeme bez obav sečíst. Podobně lze „vyložit“ i další sčítance.

To největší z nich si označila M. Určete nejmenší možnou hodnotu M.

Přepišme Lenčina čísla na

$$1-\frac{1}{1+x_1},\ 1-\frac{1+x_1}{1+x_1+x_2},\ 1-\frac{1+x_1+x_2}{1+x_1+x_2+x_3},\ \ldots,\ 1-\frac{1+x_1+\ldots+x_{n-1}}{1+x_1+\ldots+x_n}.$$

Dále označme $a_i = 1 + x_1 + \ldots + x_i$. Lenčina čísla nabudou tvarů

$$1-\frac{a_0}{a_1},\ 1-\frac{a_1}{a_2},\ 1-\frac{a_2}{a_3},\ \ldots,\ 1-\frac{a_{n-1}}{a_n}.$$

Ukažme teď, že jedno z čísel a_i/a_{i+1} je větší nebo rovno $2^{-1/n}$ (to nám pomůže v následném odhadnutí M). Postupujme sporem: Nechť pro všechna a_i/a_{i+1} platí $a_i/a_{i+1} < 2^{-1/n}$. Potom je

$$\frac{a_0}{a_1}\cdot\frac{a_1}{a_2}\cdot\frac{a_2}{a_3}\cdots\frac{a_{n-1}}{a_n} < \left(2^{-1/n}\right)^n = \frac{1}{2}.$$

To je první výsledek sloužící pro spor, postupujme dále. Po vykrácení se součin zjednoduší na

$$\frac{a_0}{a_n} = \frac{1}{1+x_1+x_2+\ldots+x_n}.$$

Protože součet čísel x_i je 1, je výraz $1/(1 + x_1 + x_2 + \ldots + x_n)$ roven $1/2$. To je spor s předchozím výsledkem.

Dostali jsme tak $M \geq 1 - 2^{-1/n}$. Zbývá ověřit, že této hodnoty M pro nějaká x_i opravdu nabývá. To ověříme vhodným[9] dosazením. Dosaďme $x_i = (2^{1/n})^i - (2^{1/n})^{i-1}$. Lenčina čísla jsou pak

$$1-\frac{1+x_1+\ldots+x_{i-1}}{1+x_1+\ldots+x_i} = 1-\frac{(2^{1/n})^{i-1}}{(2^{1/n})^i} = 1-2^{-1/n}.$$

Čísla x_i jsou takto zřejmě kladná a jejich součet je $(2^{1/n})^n - (2^{1/n})^0 = 1$.

Nejmenší možná hodnota M je tedy $1 - 2^{-1/n}$.

8. úloha

Kladná čísla $a_1, \ldots a_n$ splňují vztah

$$\frac{1}{1+a_1}+\frac{1}{1+a_2}+\cdots+\frac{1}{1+a_n} = 1.$$

Dokažte, že platí

$$\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}+\cdots+\sqrt{a_n} \geq (n-1)\left(\frac{1}{\sqrt{a_1}}+\frac{1}{\sqrt{a_2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{a_n}}\right).$$

Ještě než se pustíme do samotného řešení, připomeneme si jednu známou nerovnost.

---

[9] Na vhodné dosazení přijdeme tak, že vyřešíme rovnosti $1 - \frac{1+x_1+\cdots+x_{i-1}}{1+x_1+\cdots+x_i} = 1 - 2^{-1/n}$, které plynou z předchozí části důkazu.

Tvrzení. (Čebyševova nerovnost) *Nechť jsou dána reálná čísla* $x_1 \le x_2 \le x_3 \le \ldots \le x_n$ *a* $y_1 \le y_2 \le y_3 \le \ldots \le y_n$. *Pak platí*

$$n(x_1y_n+x_2y_{n-1}+\cdots+x_ny_1) \le (x_1+x_2+\cdots+x_n)(y_1+y_2+\cdots+y_n) \le n(x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n).$$

Přejděme nyní k samotnému řešení. Nerovnost nejprve ekvivalentně upravíme na tvar

$$\left(\sqrt{a_1}+\frac{1}{\sqrt{a_1}}\right)+\left(\sqrt{a_2}+\frac{1}{\sqrt{a_2}}\right)+\cdots+\left(\sqrt{a_n}+\frac{1}{\sqrt{a_n}}\right) \ge n\left(\frac{1}{\sqrt{a_1}}+\frac{1}{\sqrt{a_2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{a_n}}\right)$$

a následně s využitím zadané vazební podmínky upravíme do podoby, s níž budeme dále pracovat

$$\left(\frac{1+a_1}{\sqrt{a_1}}+\cdots+\frac{1+a_n}{\sqrt{a_n}}\right)\left(\frac{1}{1+a_1}+\cdots+\frac{1}{1+a_n}\right) \ge n\left(\frac{1}{\sqrt{a_1}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{a_n}}\right).$$

Všimněme si, že tento tvar již téměř odpovídá Čebyševově nerovnosti. Abychom podobnost ještě zesílili, využijeme symetrii zadané nerovnosti a čísla a_i si bez újmy na obecnosti seřadíme. Nechť tedy $a_1 \le a_2 \ldots \le a_n$. Tím jsme seřadili i čísla $1/(1+a_i)$, a to pro změnu sestupně (od největšího).

Nyní bychom chtěli, aby čísla $(1+a_i)/\sqrt{a_i}$ byla uspořádána vzestupně (od nejmenšího). Kdyby například byla funkce $f(x)=(1+x)/\sqrt{x}=\sqrt{x}+1/\sqrt{x}$ rostoucí pro $x>0$, měli bychom vzestupné uspořádání zaručeno a úloha by byla vyřešena (splnili bychom předpoklady Čebyševovy nerovnosti).

Ovšem f je rostoucí pouze na intervalu $(1,+\infty)$, jak se lze přesvědčit přímým výpočtem, pohledem na graf či užitím derivací. Budeme muset své úvahy zjemnit. Díky vazební podmínce můžeme říct, že pouze číslo a_1 může ležet mimo interval $(1,+\infty)$ (důkladně si rozmysli!). Stále chceme ukázat, že i přes „špatnou“ polohu čísla a_1 platí

$$f(a_1) \le f(a_2) \le \ldots \le f(a_n).$$

K tomu nám stačí ukázat nerovnosti $f(a_1) \le f(a_i)$ pro $i=2,\ldots,n$, neb ty ostatní jsou již zaručeny tím, že čísla $a_2, a_3, \ldots, a_n$ již leží v intervalu, kde f roste. Dokažme tuto nerovnost například pro $i=2$. To je ovšem už snadné, víme totiž (opět s využitím vazebné podmínky), že $1/(1+a_2) < 1 - 1/(1+a_1) = a_1/(1+a_1)$, což po roznásobení dá klíčový vztah

$$a_2 > \frac{1}{a_1}.$$

Teď už si jen uvědomíme, že číslo $1/a_1$ leží opět ve „správném“ intervalu, a s ohledem na platnost vztahu $f(x)=f\left(\frac{1}{x}\right)$ můžeme říci, že

$$f(a_2) > f\left(\frac{1}{a_1}\right) = f(a_1)$$

a úloha je vyřešena.