1. podzimní série

Téma: Zlomky

Datum odeslání: 5. října 2009

1. ÚLOHA (3 BODY)

Třem malým PraSátkům, Myregovi, Vejtkovi a Šavlíkovi, se zjevil sáček plný bonbonů. Dohodli se, že si je rozdělí, a všichni štěstím spokojeně usnuli. V noci se první vzbudil Myreg. Když rozdělil bonbony na tři stejné hromádky, jeden bonbon zbyl. Vzal si jednu hromádku a zbytek do sáčku vrátil. Potom se vzbudil Vejtek. Nevěda o Myregovi rozdělil obsah sáčku též na třetiny, i jemu jeden bonbon přebýval, vzal si svou třetinu a zbytek vrátil. Poslední vstal chudák Šavlík, a nemaje o mlsnosti ostatních ani potuchy, vzal si nejprve jen třetinu (tentokrát žádný bonbon nepřebýval). Protože měl ale po chvilce cumlání všechny své bonbony fuč, snědl nakonec i těch šest zbývajících. Kolik bonbonů se na začátku malým PraSátkům zjevilo?

2. ÚLOHA (3 BODY)

V růžovém království si po smrti krále začalo 20 synů dělit jeho majetek. Nejstarší z nich (a zároveň nejpomalejší) zaváhal a nechal se přeskočit. Druhý nejstarší si pohotově vzal polovinu králova majetku. Třetí si uzmul třetinu toho, co po druhém zbylo. Čtvrtý si naplnil kapsy čtvrtinou zbytku a tak dál, až si dvacátý pro sebe oddělil dvacetinu zbytku. Pak se teprve probral první syn a vzal si vše, co zůstalo. Víte, jaká část království to byla?

3. ÚLOHA (3 BODY)

Nalezněte všechny trojice přirozených čísel (a, b, c), pro něž platí

$$a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c}} = \frac{10}{7}.$$

4. ÚLOHA (5 BODŮ)

Určete, pro která $n \in \mathbb{N}$ je zlomek

$$\frac{2^n + 1}{2^{n-1} + 1}$$

v základním tvaru.

5. ÚLOHA (5 BODŮ)

Ukažte, že platí

$$\cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{2009}}}}}} + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{2009}}}}}} = 1.$$

6. ÚLOHA (5 BODŮ)
Jardovi se zdálo o přirozeném číslu n (jež bylo ve snu pevně dané) a teď by ho zajímalo, která $k \in \mathbb{N}$ se dají zapsat jako

$$k = \frac{1}{a_1} + \frac{2}{a_2} + \cdots + \frac{n}{a_n},$$

kde $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ jsou přirozená čísla, která si může zvolit, jak chce. Pomozte mu to zjistit.

7. ÚLOHA (5 BODŮ)
Zjistěte, pro která $x, y, z \in \mathbb{N}$ platí

$$\frac{x}{2^x} + \frac{y}{2^y} = \frac{z}{2^z}.$$

8. ÚLOHA (5 BODŮ)
Buď $P(x)$ polynom[1] stupně 2009 takový, že platí

$$P(k) = \frac{1}{k}, \quad \text{pro } k \in \{1, 2, \ldots, 2010\}.$$

Určete $P(2011)$.

Řešení 1. podzimní série

1. úloha
Třem malým PraSátkům, Myregovi, Vejtkovi a Šavlíkovi, se zjevil sáček plný bonbonů. Dohodli se, že si je rozdělí, a všichni štěstím spokojeně usnuli. V noci se první vzbudil Myreg. Když rozdělil bonbony na tři stejné hromádky, jeden bonbon zbyl. Vzal si jednu hromádku a zbytek do sáčku vrátil. Potom se vzbudil Vejtek. Nevěda o Myregovi rozdělil obsah sáčku též na třetiny, i jemu jeden bonbon přebýval, vzal si svou třetinu a zbytek vrátil. Poslední vstal chudák Šavlík, a nemaje o mlsnosti ostatních ani potuchy, vzal si nejprve jen třetinu (tentokrát žádný bonbon nepřebýval). Protože měl ale po chvilce cumlání všechny své bonbony fuč, snědl nakonec i těch šest zbývajících. Kolik bonbonů se na začátku malým PraSátkům zjevilo?

Budeme postupovat odzadu. Šavlík snědl jednu třetinu zbývajících bonbonů a zbylo mu jich ještě 6 (tj. dvě třetiny), které potom také snědl. Označme x počet bonbonů, které snědl Šavlík. Potom platí $\frac{2}{3}x = 6$ a z toho $x = 9$. Víme nyní, že po Vejtkovi zbylo 9 bonbonů, což odpovídá $2y+1$, kde y je počet bonbonů, které snědl Vejtek (víme, že po rozdělení na tři části jeden bonbon zbyl a Vejtek jednu část snědl). Tedy $2y + 1 = 9$ a odtud $y = 4$. Před nájezdem Vejtka zbývalo $3y + 1 = 13$ bonbonů. Použijeme stejnou úvahu jako v předešlém případě: $13 = 2z + 1$, kde z je počet bonbonů, které snědl Myreg. Snadno dopočítáme $z = 6$. Počet bonbonů na začátku lze vyjádřit jako $x + y + z = 19$. Toto je jediné řešení úlohy.

2. úloha
V růžovém království si po smrti krále začalo 20 synů dělit jeho majetek. Nejstarší z nich (a zároveň nejpomalejší) zaváhal a nechal se přeskočit. Druhý nejstarší si pohotově vzal polovinu

[1] Polynom stupně 2009 je výraz tvaru $a_{2009} \cdot x^{2009} + a_{2008} \cdot x^{2008} + \cdots + a_1 \cdot x^1 + a_0$, kde a_1 až a_{2009} jsou reálná čísla, $a_{2009} \neq 0$, a x je proměnná.

králova majetku. Třetí si uzmul třetinu toho, co po druhém zbylo. Čtvrtý si naplnil kapsy čtvrtinou zbytku a tak dál, až si dvacátý pro sebe oddělil dvacetinu zbytku. Pak se teprve probral první syn a vzal si vše, co zůstalo. Víte, jaká část království to byla?

Pokud si n-tý princ odebral jednu n-tinu z části království, kterou ještě nezabavili jeho starší bratři, zanechal následujícímu princi $(n-1)/n$ z této části majetku. Úkon každého prince můžeme tedy chápat jako vynásobení zlomku, který udává, jaká část králova bohatství aktuálně zbývá, číslem $(n-1)/n$ (jde-li o n-tého prince). Tak vznikne nový zlomek, který vypovídá o tom, jaká část království zbyde poté, co si i příslušný princ odnese svůj díl. Druhý princ tedy vynásobí jedničku (odpovídající zatím kompletnímu majetku) číslem $(2-1)/2$, třetí pak vzniklý zlomek násobí číslem $(3-1)/3$, a tak dále, až dvacátý princ násobí číslem $(20-1)/20$. Hledaný zlomek je pak

$$\frac{2-1}{2} \cdot \frac{3-1}{3} \cdots \frac{20-1}{20} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdots \frac{19}{20} = \frac{1}{20}.$$

Po dvacátém synovi zbyla 1/20 království a to je bohatství, které si odnesl první syn.

3. úloha

Nalezněte všechny trojice přirozených čísel (a, b, c), pro něž platí

$$a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c}} = \frac{10}{7}.$$

Nejprve si uvědomme, že pro $b, c \in \mathbb{N}$ je zlomek $1/(b + 1/c)$ nutně kladný. Dále víme, že

$$1 < a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c}} < 2.$$

Protože i $a \in \mathbb{N}$, dostáváme pro a jedinou možnost, a to $a = 1$. Po dosazení a úpravě řešíme $b + 1/c = 7/3$. Opět odhadneme zlomek, tentokrát je $1/c \leq 1$ a $2 < b + 1/c < 3$. Odtud b může být jedině 2. Snadno již dopočítáme, že $c = 3$. Úloha tak má jediné řešení $(a, b, c) = (1, 2, 3)$, zkoušku provádět nemusíme.

4. úloha

Určete, pro která $n \in \mathbb{N}$ je zlomek

$$\frac{2^n + 1}{2^{n-1} + 1}$$

v základním tvaru.

Pokud má být zlomek v základním tvaru, musí být jeho čitatel a jmenovatel nesoudělná čísla. Zadaný zlomek je v základním tvaru pro každé $n \in \mathbb{N}$. To lze dokázat několika způsoby.

1. možnost

Pokud mají čísla $2^n + 1$ a $2^{n-1} + 1$ nějakého společného dělitele většího než jedna, určitě ho mají i čísla $2^n + 1$ a $2(2^{n-1} + 1) = 2^n + 2$. Ta se ale liší pouze o jedničku, takže nemohou být obě dělitelná stejným prvočíslem.[2]

[2] Dva sousední násobky libovolného prvočísla p jsou od sebe vzdáleny vždy p. A protože nejmenší prvočíslo $p = 2$, jsou dvě po sobě jdoucí čísla vždy nesoudělná.

2. možnost

Označme si jmenovatele zlomku $a = 2^{n-1} + 1$. Čitatele potom lze zapsat jako $2a - 1$, a tedy celý zlomek můžeme napsat jako $(2a-1)/a$. Každým prvočíslem, kterým je dělitelný jmenovatel zlomku a, je pak dělitelný i výraz $2a$. Takže čitatel $2a - 1$ jím být dělitelný nemůže. Proto jsou čitatel a jmenovatel nesoudělní.

3. možnost

Pokud jsou dvě čísla (označme si je a, b) dělitelná nějakým číslem d, pak je jejich rozdíl také dělitelný d.[3] Můžeme psát $a = a_1 d$ a $b = b_1 d$, $(a_1, b_1) = 1$.[4] Pro jejich rozdíl pak platí $a - b = a_1 d - b_1 d = d(a_1 - b_1)$, což je násobek d.

V našem případě tedy $(2^n + 1, 2^{n-1} + 1) = (2^{n-1}, 2^{n-1} + 1) = (2^{n-1}, 1) = 1$. Největším společným dělitelem čitatele a jmenovatele je jednička, jsou tedy nesoudělní.

5. úloha

Ukažte, že platí

$$\cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{2009}}}}}} + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{2009}}}}}} = 1.$$

Všimneme si, že zlomky jsou asi od třetího patra stejné, a zavedeme substituci

$$A = \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{2009}}}}}.$$

Dostaneme rovnici ve tvaru

$$\frac{1}{2 + A} + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + A}} = 1.$$

Úpravami levé strany rovnice dostáváme

$$\frac{1}{2 + A} + \frac{1 + A}{2 + A} = \frac{2 + A}{2 + A} = 1.$$

[3]Tomuto postupu se říká Eukleidův algoritmus. Více se o něm můžeš dočíst například v loňském seriálu.

[4]Symbol (k, l) značí největšího společného dělitele čísel k, l.

Tento výsledek pro nás znamená, že rovnost platí pro libovolnou hodnotu proměnné A, pro kterou mají zlomky smysl. Je tedy potřeba ověřit, že pro naše konkrétní (těžko vyčíslitelné) A žádný jmenovatel není nulový, neboli že A se nerovná -1 ani -2. To je zřejmé, jelikož A je kladné číslo, a původní rovnost je dokázána.

6. úloha
Jardovi se zdálo o přirozeném číslu n (jež bylo ve snu pevně dané) a teď by ho zajímalo, která $k \in \mathbb{N}$ se dají zapsat jako

$$k = \frac{1}{a_1} + \frac{2}{a_2} + \cdots + \frac{n}{a_n},$$

kde $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ jsou přirozená čísla, která si může zvolit, jak chce. Pomozte mu to zjistit.

Mějme dáno n. Nejprve určíme, jaké největší k umíme dostat. Protože je $a_1 \in \mathbb{N}$, máme $a_1 \geq 1$. Podle zadání je $a_1 < a_2$, tedy určitě $a_2 > 1$, neboli $a_2 \geq 2$. Stejně tak $a_3 > a_2 \Rightarrow a_3 \geq 3$, obecně tedy $a_i \geq i$ pro $i = 1, 2, \ldots, n$, z čehož plyne $i/a_i \leq 1$. Odtud dostáváme odhad

$$k = \frac{1}{a_1} + \frac{2}{a_2} + \cdots + \frac{n}{a_n} \leq \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{n \text{ jedniček}} = n.$$

Přitom $k = n$ vyjádříme snadno: stačí volit $a_i = i$ pro $i = 1, 2, \ldots, n$. Jedničku zase umíme dostat pro jakékoliv n volbou $a_i = n \cdot i$, a to je zřejmě nejmenší možné k (žádné menší přirozené číslo neexistuje).

Jakékoliv další k ($1 < k < n$) můžeme vyjádřit následujícím způsobem:

$$k = \frac{1}{1} + \frac{2}{2} + \cdots + \frac{k-1}{k-1} + \frac{k}{k(n-k+1)} + \frac{k+1}{(k+1)(n-k+1)} + \cdots + \frac{n}{n(n-k+1)}.$$

Je zjevné, že prvních $k-1$ zlomků, které mají všechny hodnotu 1, dá v součtu $k-1$, zatímco součet zbývajících $n-k+1$ zlomků o hodnotě $1/(n-k+1)$ je 1, celkem nám tedy vyjde přesně k.

Zbývá ještě ověřit, že platí $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$. Jistě $a_1 < a_2 < \cdots < a_{k-1}$, protože jde o po sobě jdoucí přirozená čísla. Stejně tak platí i $a_k < a_{k+1} < \cdots < a_n$, protože zde jsou jmenovatelé opět po sobě jdoucí čísla, jen vynásobená kladným číslem $n-k+1$. Nakonec $a_{k-1} < a_k$, tj. $k-1 < k(n-k+1)$, protože $k-1 < k$ a $n-k+1 \geq 1$.

7. úloha
Zjistěte, pro která $x, y, z \in \mathbb{N}$ platí

$$\frac{x}{2^x} + \frac{y}{2^y} = \frac{z}{2^z}.$$

Nejdříve si všimněme, že posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ definovaná předpisem $a_n = n/2^n$ je klesající kromě prvních dvou členů, pro které platí $a_1 = a_2$. Pro $n > 1$ totiž platí $2n > n+1$ a z toho plyne $n/2^n > (n+1)/2^{n+1}$. Rovněž vidíme, že každý člen této posloupnosti je kladný.

Musí tedy platit, že $z/2^z > x/2^x$, a tedy $z < x$. Analogicky odvodíme vztah $z < y$. Vzhledem k symetrii rovnice v proměnných x a y v zadání můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že platí $x \leq y$.

Zaměřme se nejdříve na případ, že $z > 4$. Upravme nerovnost:

$$\frac{z+1}{2^{z+1}} + \frac{z+2}{2^{z+2}} < \frac{z}{2^z}.$$

Po vynásobení obou stran rovnice výrazem 2^{z+2} dostáváme:

$$2(z+1)+(z+2)<4z,$$
$$4<z.$$

Vidíme, že pro $z>4$ platí

$$\frac{z+1}{2^{z+1}}+\frac{z+2}{2^{z+2}}<\frac{z}{2^z}.$$

Kdyby bylo $y \geq z+2$, pak také $x \geq z+1$ a

$$\frac{x}{2^x}+\frac{y}{2^y} \leq \frac{z+1}{2^{z+1}}+\frac{z+2}{2^{z+2}}<\frac{z}{2^z}.$$

Tedy pro tato y nemáme žádná řešení. Jediná možnost je $y=z+1$, a protože $y \geq x$, tak i $x=z+1$. Dosadíme do původní rovnice a dostaneme:

$$\frac{z+1}{2^{z+1}}+\frac{z+1}{2^{z+1}}=\frac{z}{2^z},$$
$$(z+1)+(z+1)=2z.$$

Tato rovnice nemá žádné řešení, tj. zadaná rovnice nemá řešení pro $z>4$.

Zbývá nám postupně rozebrat možnosti $z=1,2,3,4$. Jelikož platí $a_1=a_2$, stačí nám uvažovat pouze hodnoty $2,3,4$.

Neboť $x \leq y$, $a_x \geq a_y$ a musí platit

$$2\frac{x}{2^x} \geq \frac{x}{2^x}+\frac{y}{2^y}=\frac{z}{2^z}.$$

Pravá strana je nejmenší pro největší možné z, tj. $z=4$. Potom z této nerovnosti a toho, že posloupnost a_n je klesající, dostaneme omezení na x: $a_x \geq \frac{1}{8}$, tedy $x<6$. Dále nezapomeňme, že $x>z$. Zbývá nám tedy probrat šest možností, pro které spočteme $a_y=a_z-a_x$. Pro přehlednost si ještě uvedeme několik prvních hodnot a_n (nezapomeň, že posloupnost je klesající, takže další členy jsou ještě menší).

$$a_1=\frac{1}{2},\ a_2=\frac{1}{2},\ a_3=\frac{3}{8},\ a_4=\frac{1}{4},\ a_5=\frac{5}{32},\ a_6=\frac{3}{32},\ a_7=\frac{7}{128},\ \ldots$$

(i) $z=1,2$ a $x=3$. Pak $a_y=\frac{1}{8}$, tedy $5<y<6$, což není řešení.
(ii) $z=1,2$ a $x=4$. Pak $a_y=\frac{1}{4}$, tedy $y=4$ a máme dvě řešení $(x,y,z)=(4,4,1),(4,4,2)$.
(iii) $z=1,2$ a $x=5$. Pak $a_y=\frac{11}{32}$, tedy $3<y<4$. Nemá řešení.
(iv) $z=3$ a $x=4$. Pak $a_y=\frac{1}{8}$, tedy $5<y<6$. Nemá řešení.
(v) $z=3$ a $x=5$. Pak $a_y=\frac{7}{32}$, tedy $4<y<5$. Nemá řešení.
(vi) $z=4$ a $x=5$. Pak $a_y=\frac{3}{32}$, tedy $y=6$ a máme dvě řešení ze symetrie $(x,y,z)= =(5,6,4),(6,5,4)$.

Úloha má 4 řešení – $(x,y,z) \in \{(4,4,1),(4,4,2),(5,6,4),(6,5,4)\}$.

8. úloha

Buď $P(x)$ polynom[5] stupně 2009 takový, že platí

$$P(k)=\frac{1}{k}, \quad \text{pro } k \in \{1,2,\ldots,2010\}.$$

[5]Polynom stupně 2009 je výraz tvaru $a_{2009} \cdot x^{2009}+a_{2008} \cdot x^{2008}+\cdots+a_1 \cdot x^1+a_0$, kde a_1 až a_{2009} jsou reálná čísla, $a_{2009} \neq 0$, a x je proměnná.

Určete $P(2011)$.

Podmínka ze zadání nás nabádá k následující substituci

$$Q(x) = x \cdot P(x) - 1.$$

Polynom $Q(x)$ má zjevně stupeň 2010, a navíc byl zvolen tak, aby čísla $1, 2, \ldots, 2010$ byla jeho kořeny. Součinový tvar tohoto polynomu je díky předchozímu kroku vymezen na

$$Q(x) = a \cdot (x-1)(x-2)\cdots(x-2010) \quad \text{pro nějaké } a \in \mathbb{R}.$$

Číslo a nebude problém určit, víme totiž, že $Q(0) = -1$. Pišme tedy

$$-1 = Q(0) = a \cdot (-1) \cdot (-2) \cdots (-2010),$$

a jelikož je minusů na pravé straně sudý počet, můžeme vyjádřit $a = -1/(2010!)$. K určení $P(2011)$ jistě stačí spočítat $Q(2011)$, což je ovšem snadné, když už je polynom $Q(x)$ jasně určen.

$$Q(2011) = -\frac{2010 \cdot 2009 \cdots 1}{2010!} = -1 \quad \Rightarrow \quad P(2011) = 0.$$

Úloha je vyřešena.