1. seriálová série

Téma: Nerovnosti

Datum odeslání: 7. prosince 2009

1. ÚLOHA (5 BODŮ)

Buďte a, b, c kladná čísla, jejichž součin je roven 1. Dokažte nerovnost

$$a^5b + b^5c + c^5a \geq \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}.$$

Určete všechny případy, v nichž nastává rovnost.

2. ÚLOHA (5 BODŮ)

Buď $n \in \mathbb{N}$ a mějme kladná čísla $a_1, a_2, \dots, a_n$, $b_1, b_2, \dots, b_n$ a $c_1, c_2, \dots, c_n$. Dokažte následující nerovnost

$$(a_1b_1c_1 + a_2b_2c_2 + \cdots + a_nb_nc_n)^3 \leq (a_1^3 + a_2^3 + \cdots + a_n^3)(b_1^3 + b_2^3 + \cdots + b_n^3)(c_1^3 + c_2^3 + \cdots + c_n^3)$$

a určete, kdy nastává rovnost.

3. ÚLOHA (5 BODŮ)

Ukažte, že pro kladná čísla a, b, c splňující $a + b + c = 1$ platí

$$\frac{a}{1+bc} + \frac{b}{1+ca} + \frac{c}{1+ab} \geq \frac{9}{10}$$

a určete, kdy nastává rovnost.

Řešení 1. seriálové série

1. úloha

Buďte a, b, c kladná čísla, jejichž součin je roven 1. Dokažte nerovnost

$$a^5b + b^5c + c^5a \geq \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}.$$

Určete všechny případy, v nichž nastává rovnost.

Podle AG nerovnosti platí

$$11a^5b + 2b^5c + 8c^5a \geq 21\sqrt[21]{a^{63} \cdot b^{21} \cdot c^{42}} = 21a^3bc^2$$

a sečtením dalších dvou cyklicky získaných nerovností dostaneme

$$21(a^5b + b^5c + c^5a) \geq 21(a^3bc^2 + b^3ca^2 + c^3ab^2).$$

Protože však podle zadání $abc = 1$, můžeme všechny členy na pravé straně vydělit výrazem $(abc)^2 = 1$ a dostaneme

$$a^5b + b^5c + c^5a \geq \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}.$$

Rovnost nastává v případě, že jsme do AG mašinky vložili stejná čísla, tj. $a^5b = b^5c = c^5a$. Vzhledem k cykličnosti těchto rovnic můžeme předpokládat, že a je největší. Je-li však ostře větší než jedno ze zbývajících čísel, je $a^5b > b^5c$, tudíž nutně $a = b = c$, což vzhledem k podmínce $abc = 1$ znamená, že $a = b = c = 1$.

Předvedené řešení je kompletní a zapsáno ve směru co z čeho vyplývá. Samozřejmě, že když jsme na něj chtěli přijít, postupovali jsme opačně. Nejdříve jsme zadanou nerovnost zhomogenizovali vynásobením pravé strany výrazem $(abc)^2$, čímž jsme nerovnost přichystali pro AG mašinku. Koeficienty $11, 2, 8$ byly nalezeny tak, že jsme chtěli, aby

$$xa^5b + yb^5c + zc^5a \geq \sqrt[x+y+z]{a^{5x+0y+1z} \cdot b^{1x+5y+0z} \cdot c^{0x+1y+5z}} = a^3bc^2.$$

Porovnáním exponentů dostaneme soustavu tří rovnic o třech neznámých, jejímž řešením jsou (například) čísla $11, 2, 8$.

2. úloha

Buď $n \in \mathbb{N}$ a mějme kladná čísla $a_1, a_2, \ldots, a_n$, $b_1, b_2, \ldots, b_n$ a $c_1, c_2, \ldots, c_n$. Dokažte následující nerovnost

$$(a_1b_1c_1 + a_2b_2c_2 + \cdots + a_nb_nc_n)^3 \leq (a_1^3 + a_2^3 + \cdots + a_n^3)(b_1^3 + b_2^3 + \cdots + b_n^3)(c_1^3 + c_2^3 + \cdots + c_n^3)$$

a určete, kdy nastává rovnost.

Všimneme si, že nerovnost je homogenní jak v proměnných $a_1, \ldots, a_n$, tak v proměnných $b_1, \ldots, b_n$ a dokonce i v proměnných $c_1, \ldots, c_n$ (ve všech třech případech se jedná o homogenitu stupně 3). Lze proto přejít k proměnným $d_1, \ldots, d_n$, $e_1, \ldots, e_n$, $f_1, \ldots, f_n$ takovým, že $d_1^3 + \cdots + d_n^3 = 1$, $e_1^3 + \cdots + e_n^3 = 1$, $f_1^3 + \cdots + f_n^3 = 1$ a dokazovat nerovnost jen pro ně. Tím nám zbude dokázat nerovnost

$$(d_1e_1f_1 + \cdots + d_ne_nf_n)^3 \leq 1,$$

v níž je vynechání třetí mocniny ekvivalentní úprava. Z AG nerovnosti ovšem pro každé $i \in \{1, \ldots, n\}$ plyne

$$d_ie_if_i \leq \frac{d_i^3 + e_i^3 + f_i^3}{3}$$

a sečtením všech těchto nerovností dostaneme

$$\sum_{i=1}^{n} d_ie_if_i \leq \frac{1}{3}\left(\sum_{i=1}^{n} d_i^3 + \sum_{i=1}^{n} e_i^3 + \sum_{i=1}^{n} f_i^3\right) = \frac{1}{3}(1 + 1 + 1) = 1.$$

Rovnost nastane, právě když pro každé $i \in \{1, \ldots, n\}$ platí $d_i = e_i = f_i$, což v řeči původních proměnných znamená, že existují kladné konstanty λ, μ takové, že $a_i = \lambda b_i = \mu c_i$ pro každé $i \in \{1, \ldots, n\}$.

3. úloha

Ukažte, že pro kladná čísla a, b, c splňující $a + b + c = 1$ platí

$$\frac{a}{1 + bc} + \frac{b}{1 + ca} + \frac{c}{1 + ab} \geq \frac{9}{10}$$

a určete, kdy nastává rovnost.

Úloha nabádá k použití CS zlomkobijce. Rozšiřme tedy zlomky tak, abychom v čitatelích vytvořili druhé mocniny a odhadněme levou stranu

$$L = \frac{a^2}{a+abc} + \frac{b^2}{b+abc} + \frac{c^2}{c+abc} \geq \frac{(a+b+c)^2}{a+b+c+3abc} = \frac{1}{1+3abc},$$

přičemž v poslední rovností jsme využili podmínku $a+b+c=1$. Zbývá ověřit zda platí

$$\frac{1}{1+3abc} \geq \frac{9}{10} = P.$$

Tato nerovnost je ekvivalentní (po krátké úpravě) nerovnosti $1 \geq 27abc$, tu zpětně homogenizujeme dosazením $1 = (a+b+c)^3$ a bryskně upravíme do ekvivalentní podoby

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc},$$

která je ovšem pouhou AG nerovností pro 3 prvky. Nerovnost tedy platí.

Pokud pro nějakou trojici čísel platí v nerovnosti rovnost, musí pro ni rovnost platit v každém z dílčích odhadů. Speciálně při použití AG nerovnosti pro prvky a, b, c, v níž rovnost nastává pouze pro $a = b = c$. Jediným kandidátem na rovnost je tedy trojice $a = b = c = \frac{1}{3}$, pro níž snadno ověříme, že rovnost skutečně nastane.

2. seriálová série

Téma:	Nerovnosti
Datum odeslání:	15. února 2010

4. úloha (5 bodů)

Pro $a, b, c > 0$ taková, že $abc = 1$ ukažte

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{a^3}{(1+a)(1+b)} \geq \frac{3}{4}.$$

5. úloha (5 bodů)

Buďte a, b, c strany trojúhelníka a α, β, γ jeho vnitřní úhly (standardně značené). Ukažte, že platí

$$a \cdot \cos\frac{\alpha}{2} + b \cdot \cos\frac{\beta}{2} + c \cdot \cos\frac{\gamma}{2} \leq \frac{\sqrt{3}(a+b+c)}{2}.$$

6. úloha (5 bodů)

Kladná čísla a, b, c splňují $ab + bc + ca \geq 3$. Dokažte nerovnost

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{a}{\sqrt{a+b}} \geq \frac{3}{\sqrt{2}}.$$

Řešení 2. seriálové série

4. úloha
Pro $a, b, c > 0$ taková, že $abc = 1$ ukažte

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{a^3}{(1+a)(1+b)} \geq \frac{3}{4}.$$

Použijeme AG nerovnost tak, jak bylo popsáno v kapitole *AG a zlomky*. Každý zlomek z levé strany prostě sečteme s výrazy v jeho jmenovateli tak, aby rovnost nastávala právě v případě $a = b = c = 1$, v němž evidentně nastává rovnost i v dokazované nerovnosti. Podle AG nerovnosti pro tři prvky tedy platí

$$\left(8 \cdot \frac{a^3}{(1+b)(1+a)}\right) + (1+a) + (1+b) \geq 3 \cdot \sqrt[3]{8a^3} = 6a.$$

Sečtením tří takových nerovností po vydělení osmi získáme

$$\sum_{cyc} \frac{a^3}{(1+b)(1+a)} \geq \frac{a+b+c}{2} - \frac{3}{4},$$

přičemž nerovnost, kterou nám nyní stačí dokázat je ekvivalentní s $a + b + c \geq 3$. Tu ale snadno dokážeme AG nerovností

$$a + b + c \geq 3 \cdot \sqrt[3]{abc} = 3.$$

V poslední použité nerovnosti nastává rovnost pouze v případě $a = b = c = 1$ a rovnost v celé nerovnosti pak nastává jedině tehdy. Tím je úloha vyřešena.

5. úloha
Buďte a, b, c strany trojúhelníka a α, β, γ jeho vnitřní úhly (standardně značené). Ukažte, že platí

$$a \cdot \cos\frac{\alpha}{2} + b \cdot \cos\frac{\beta}{2} + c \cdot \cos\frac{\gamma}{2} \leq \frac{\sqrt{3}(a+b+c)}{2}.$$

Nejdříve si rozmyslíme, že trojice (a, b, c), (α, β, γ) jsou souhlasně uspořádané. Jinými slovy chceme ukázat, že proti největšímu úhlu je nejdelší strana. To nahlédneme ze sinové věty. Předpokládejme, že trojúhelník je ostroúhlý, tj. $\alpha, \beta, \gamma \in (0, \frac{\pi}{2})$. Protože na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$ je sinus rostoucí, ze sinové věty

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

plyne, že trojice (a, b, c), (α, β, γ) jsou souhlasně uspořádané. V případě tupoúhlého trojúhelníku můžeme búno[1] předpokládat, že $\alpha \geq \beta \geq \gamma$ (jinak trojúhelník přeznačíme). Díky rovnosti $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ platí $\alpha \geq \pi - \alpha \geq \beta \geq \gamma$ a navíc zřejmě $\pi - \alpha, \beta, \gamma \in (0, \frac{\pi}{2})$. Použitím sinové věty ve tvaru

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{a}{\sin(\pi-\alpha)} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

[1] Bez újmy na obecnosti.

dostáváme, že $a \geq b \geq c$.

Protože kosinus je na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$ klesající, jsou trojice (a, b, c), $(\cos\frac{\alpha}{2}, \cos\frac{\beta}{2}, \cos\frac{\gamma}{2})$ opačně uspořádané, a proto má Čebyševova nerovnost tvar

$$a\cos\frac{\alpha}{2} + b\cos\frac{\beta}{2} + c\cos\frac{\gamma}{2} \leq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)\left(\cos\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\beta}{2} + \cos\frac{\gamma}{2}\right).$$

Použitím Jensenovy nerovnosti pro funkci $\cos(x)$, která je konkávní na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$, s vahami $\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}$ dostáváme

$$\frac{1}{3}\cos\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{3}\cos\frac{\beta}{2} + \frac{1}{3}\cos\frac{\gamma}{2} \leq \cos\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

a spojením posledních dvou nerovností plyne dokazovaná nerovnost. Rovnost v Jensenově nerovnosti nastává jen v případě $\alpha = \beta = \gamma$, protože $\cos(x)$ je na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$ ryze konkávní, a v tomto případě nastává rovnost i v Čebyševově nerovnosti.

Druhé řešení (volně podle *Anh Dung Le*):
Myšlenkou tohoto řešení je použít místo Jensenovy nerovnosti známý vztah

$$\cos x + \cos y = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right).$$

Zaměříme se proto už jen na důkaz nerovnosti $\cos\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\beta}{2} + \cos\frac{\gamma}{2} \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$. Protože pro úhly v trojúhelníku je zřejmě $\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{4}\right) > 0$, platí nerovnost

$$\cos\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\beta}{2} = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{4}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{4}\right) \leq 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{4}\right).$$

Proč by zrovna tato nerovnost měla vést k cíli? Protože přeci víme (letmým pohledem), že rovnost má nastat pro $\frac{\alpha}{2} = \frac{\beta}{2} = \frac{\gamma}{2} = \frac{\pi}{6}$ a v tomto případě nastává rovnost i v uvedené nerovnosti. Protože levá strana dokazované nerovnosti obsahuje jen tři sčítance, ale nám by se více hodil sudý počet, jeden si přidáme. Při přidávání ale bereme zřetel na to, že víme, kdy nastává rovnost. Proto k oběma stranám dokazované nerovnosti přičteme $\cos\frac{\pi}{6}$. Dále už stačí jen sledovat

$$\left(\cos\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\beta}{2}\right) + \left(\cos\frac{\gamma}{2} + \cos\frac{\pi}{6}\right) \leq 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{4}\right) + 2\cos\left(\frac{\gamma+\frac{\pi}{3}}{4}\right) \leq$$
$$\leq 4\cos\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma+\frac{\pi}{3}}{8}\right) \leq 4\cos\frac{\pi}{6} = 3\cos\frac{\pi}{6} + \cos\frac{\pi}{6} = \frac{3\sqrt{3}}{2} + \cos\frac{\pi}{6}.$$

Všimněte si, že tato myšlenka je vlastně úplně stejná jako myšlenka v seriálu v sekci *AG a zlomky*, kde se rovněž přidávají členy a bere se přitom zřetel na případ rovnosti.

6. úloha
Kladná čísla a, b, c splňují $ab + bc + ca \geq 3$. Dokažte nerovnost

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{a}{\sqrt{a+b}} \geq \frac{3}{\sqrt{2}}.$$

V prvním kroku se zbavíme odmocnin pomocí Jensenovy nerovnosti[2] pro konvexní funkci $1/\sqrt{x}$ s váhovými koeficienty $\frac{a}{a+b+c}$, $\frac{b}{a+b+c}$, $\frac{c}{a+b+c}$. Máme tedy

$$\frac{L}{a+b+c} = \sum_{cyc} \left(\frac{a}{a+b+c} \cdot \frac{1}{\sqrt{a+b}} \right) \geq \sqrt{\frac{a+b+c}{\sum_{cyc} (a^2+ab)}}.$$

Po úpravě a umocnění na druhou (v kladných číslech ekvivalentním) nám zbývá dokázat

$$\frac{(a+b+c)^3}{(a+b+c)^2 - (ab+bc+ca)} \geq \frac{9}{2}.$$

Rozmysleme si, že nyní můžeme člen $ab+bc+ca$ díky vazební podmínce (a ve správném směru) odhadnout trojkou. V nerovnosti, jež nám nyní stačí dokázat, můžeme zasubstituovat $(a+b+c) = S$, roznásobit a vzniklou polynomickou nerovnost hbitě upravit do tvaru

$$(S-3)^2(2S+3) \geq 0,$$

z něhož je její platnost již zřejmá. K tomu, aby nastala rovnost, potřebujeme rovnost i v Jensenově nerovnosti. Tam ovšem nastává ($1/\sqrt{x}$ je ryze konvexní), pouze pokud

$$a+b = b+c = c+a \Leftrightarrow a=b=c=1.$$

Tehdy nastává rovnost i v celé nerovnosti a my jsme tím pádem hotovi.

3. seriálová série

Téma: Nerovnosti

Datum odeslání: 10. května 2010

7. úloha (5 bodů)
Pro nezáporná a, b, c splňující $a+b+c=1$ dokažte

$$\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2} \geq 8\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)$$

a zjistěte, kdy nastává rovnost.

8. úloha (5 bodů)
Pro nezáporná čísla a, b, c taková, že $ab+bc+ca \neq 0$, dokažte

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{(a+b)^2}{c^2+ab} \geq 6$$

a zjistěte, kdy nastává rovnost.

[2] Ke stejnému odhadu dospějeme i použitím CS zlomkobijce a posléze CS pro odmocniny.

9. ÚLOHA (5 BODŮ)

Pro kladná a, b, c splňující $a + b + c = 1$ dokažte

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{ab}{\sqrt{ab + bc}} \le \frac{1}{\sqrt{2}}$$

a zjistěte, kdy nastává rovnost.

Řešení 3. seriálová série

7. úloha

Pro nezáporná a, b, c splňující $a + b + c = 1$ dokažte

$$\frac{ab + bc + ca}{a^2 + b^2 + c^2} \ge 8\left(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2\right)$$

a zjistěte, kdy nastává rovnost.

Vzhledem k tomu, že nerovnost je symetrická, použijeme substituci

$$u = a + b + c = 1, \quad v = ab + bc + ca, \quad w = abc.$$

Symetrické výrazy vystupující v nerovnosti vyjádříme jako

$$a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ca) = u^2 - 2v = 1 - 2v,$$

$$a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 = (ab + bc + ca)^2 - 2abc(a + b + c) = v^2 - 2uw = v^2 - 2w.$$

Potom lze nerovnost přepsat v proměnných u, v, w jako

$$\frac{v}{1 - 2v} \ge 8(v^2 - 2w).$$

Protože podmínka $u = 1$ nijak nesvazuje proměnnou w, bude tato nerovnost i po homogenizaci stále jen lineární v proměnné w a můžeme použít kanon (UVW metodu). To je přímočará cesta popsaná v seriálu.

Ve skutečnosti ale ani nepotřebujeme takto silný nástroj, stačí nerovnost ekvivalentně upravit

$$v - 8(v^2 - 2w)(1 - 2v) = v - 8v^2 + 16v^3 + 16w - 32vw = v(1 - 4v)^2 + 16w(1 - 2v) \ge 0.$$

Poslední nerovnost je zřejmá, neboť $v, w \ge 0$ a $1 - 2v = a^2 + b^2 + c^2 > 0$ (vzhledem k podmínce $u = 1$ nemohou být všechna a, b, c nulová).

Zbývá vyšetřit, kdy nastává rovnost. Zřejmě je nutně $w = abc = 0$, búno $c = 0$, a zároveň je buďto $v = 0$, nebo $1 - 4v = 0$. V případě $v = 0$ dostáváme $ab + b \cdot 0 + 0 \cdot a = ab = 0$. Z podmínky $u = 1$ tak vidíme, že rovnost nastává pro trojici $(1, 0, 0)$ a cyklické záměny. V případě $1 - 4v = 0$, tj. $ab = 1/4$, využijeme známou nerovnost

$$1 = (a + b)^2 \ge 4ab = 1,$$

z níž vidíme, že $ab = 1/4$, právě když $a = b = 1/2$. Rovnost tedy nastává i pro trojici $(1/2, 1/2, 0)$ a cyklické záměny.

8. úloha

Pro nezáporná čísla a, b, c taková, že $ab + bc + ca \neq 0$, dokažte

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{(a+b)^2}{c^2+ab} \geq 6$$

a zjistěte, kdy nastává rovnost.

Nerovnost nejdříve ekvivalentně upravíme do SOS tvaru. Protože platí

$$\begin{aligned}\sum_{\text{cyc}} \left(\frac{(a+b)^2}{c^2+ab} - 2 \right) &= \sum_{\text{cyc}} \frac{(a^2-c^2)+(b^2-c^2)}{c^2+ab} = \sum_{\text{cyc}} (a^2-c^2) \left(\frac{1}{c^2+ab} - \frac{1}{a^2+bc} \right) = \\ &= \sum_{\text{cyc}} (a^2-c^2) \frac{a^2-c^2+bc-ab}{(c^2+ab)(a^2+bc)} = \sum_{\text{cyc}} (a-c)(a+c) \frac{(a-c)(a+c-b)}{(c^2+ab)(a^2+bc)} = \\ &= \sum_{\text{cyc}} (a-c)^2 \frac{(a+c)(a+c-b)(b^2+ca)}{(c^2+ab)(a^2+bc)(b^2+ca)},\end{aligned}$$

stačí dokazovat ekvivalentní nerovnost

$$\sum_{\text{cyc}} (a-c)^2 (a+c)(a+c-b)(b^2+ca) \geq 0.$$

Díváme-li se na výraz na levé straně ve tvaru $\sum_{\text{cyc}} (a-c)^2 S_b$, máme

$$\begin{aligned} S_a &= (c+b)(c+b-a)(a^2+bc), \\ S_b &= (a+c)(a+c-b)(b^2+ca), \\ S_c &= (b+a)(b+a-c)(c^2+ab). \end{aligned}$$

Protože je nerovnost symetrická, můžeme búno předpokládat $a \geq b \geq c$ a můžeme použít podmínku B ze seriálu. Stačí tedy ukázat $S_c \geq 0$, $S_b \geq 0$, $a^2 S_b + b^2 S_a \geq 0$. Nerovnosti $S_c \geq 0$, $S_b \geq 0$ jsou však vzhledem k uspořádání $a \geq b \geq c$ zřejmé. Označíme-li

$$\begin{aligned} k &= a^2(a+c)(b^2+ca) = (a+c)(a^2b^2+a^3c), \\ l &= b^2(c+b)(a^2+bc) = (b+c)(a^2b^2+b^3c), \end{aligned}$$

pak je díky zvolenému uspořádání $k \geq l \geq 0$ a potom

$$a^2 S_b + b^2 S_a = k(a+c-b) + l(b+c-a) = (k-l)(a-b) + (k+l)c \geq 0,$$

čímž je nerovnost (s využitím znalostí ze seriálu) dokázána.

Abychom vyšetřili rovnost, podívejme se, jak se vlastně podmínka B používá. Předpokládejme $b \neq c$ a zjišťujme, kdy nastává rovnost v následujících odhadech

$$(c-b)^2 S_a + (a-c)^2 S_b + (b-a)^2 S_c \geq (b-c)^2 S_a + (a-c)^2 S_b =$$
$$= (b-c)^2 \left(S_a + \frac{(a-c)^2}{(b-c)^2} S_b \right) \geq (b-c)^2 \left(S_a + \frac{a^2}{b^2} S_b \right) \geq 0 \qquad \Leftarrow \qquad a^2 S_b + b^2 S_a \geq 0.$$

V prvním odhadu nastává rovnost právě tehdy, když $(a-b)^2 S_c = 0$. Přitom je $S_c > 0$, protože jinak by alespoň nějaké dvě z proměnných a, b, c musely být nulové, což zadání vylučuje. Takže rovnost v prvním odhadu nastává právě pro $a = b$. Pak je již vždy $\frac{a-c}{b-c} = \frac{a}{b} = 1$, takže zbývá zjistit, kdy $a^2 S_b + b^2 S_a = (k+l)c = 0$. Případ $k + l = 0$ lze vyloučit, protože jinak by opět byly alespoň dvě ze tří proměnných a, b, c nulové. Tudíž rovnost nastává jen v případě $a = b \neq 0$, $c = 0$ a samozřejmě při cyklických záměnách. Nakonec předpokládejme $b = c$. Pak vzhledem k nerovnostem $S_b \geq 0$, $S_c > 0$ nastává rovnost právě tehdy, když $a = b = c \neq 0$.

9. úloha
Pro kladná a, b, c splňující $a + b + c = 1$ dokažte

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{ab}{\sqrt{ab+bc}} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

a zjistěte, kdy nastává rovnost.

Budeme postupovat metodou *ztrátové symetrizace* popsanou v seriálu. Levou stranu upravíme, rozšíříme o jmenovatel sousedního zlomku a odhadneme pomocí CS na odmocniny

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{ab}{\sqrt{ab+bc}} = \sum_{\text{cyc}} \sqrt{\frac{a^2 b}{a+c}} = \sum_{\text{cyc}} \sqrt{(a+b) \cdot \frac{a^2 b}{(a+c)(a+b)}} \leq$$
$$\leq \sqrt{2(a+b+c) \cdot \sum_{\text{cyc}} \left(\frac{a^2 b}{(a+b)(a+c)} \right)}.$$

Dosadíme ze zadané podmínky a po úpravě nám zbude dokázat nerovnost

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{a^2 b}{(a+b)(a+c)} \leq \frac{1}{4},$$

která, ač se nezdá, je symetrická.[3] Bystře zpozorujeme, že po roznásobení nebude mít mnoho členů, které navíc budou nízkého stupně. Zbyde ukázat $[3,1,0] \geq [2,2,0]$, čímž je dobojováno (Muirheadova nerovnost).

Díky poslednímu odhadu a faktu, že pracujeme pouze s kladnými čísly, může rovnost nastat pouze pro $a = b = c = \frac{1}{3}$. Pro tuto trojici rovnost skutečně nastává a tím je celá úloha dořešena.

[3]Zkuste si každý ze zlomků na levé straně rozšířit tak, abyste zesymetrizovali jmenovatel a sledujte, co se stane v čitateli.