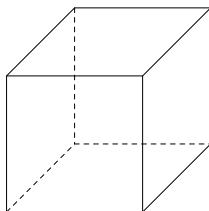


1. jarní série

Téma: Barevné úlohy
Datum odeslání: 15. ÚNORA 2010

1. ÚLOHA (3 BODY)
Háňa má krychli, jejíž stěny jsou tvořeny barevnými skly. Když se Háňa na svou kostku podívá jako na obrázku, vidí v každé ze sedmi oblastí jinou výslednou barvu. Kolik různých barev musí skla takové kostky minimálně mít¹?



2. ÚLOHA (3 BODY)
ŠnĚk už zase leze po krychli. Tentokrát chce ale všechny její hrany přebarvit z původní červené na zelenou. Vždy, když se přepalí po nějaké hraně,² její barva se změní z červené na zelenou, ze zelené na žlutou, nebo ze žluté zpět na červenou. Může se to šnĚkovi povést, jestliže leze jen po hranách a začíná v jednom z vrcholů krychle?

3. ÚLOHA (3 BODY)
Na hracím plánu 10×10 bílých polí střídavě hrají dva hráči, ultramarínový a purpurový. Ve svém tahu si hráč zvolí řádek nebo sloupec, jenž doposud nebyl vybrán, a ten celý přebarví na svou barvu. Na konci hry, kdy jsou vybrány všechny řádky i sloupce, vyhraje ten, kdo má polí své barvy alespoň o deset více než soupeř. Ukažte, že purpurový, který nezačíná, má výherní strategii.³

4. ÚLOHA (5 BODŮ)
Ve vrcholech pravidelného n -úhelníku stojí n oveček ($n > 2$), z nichž $n - 1$ je bílých a jedna černá. Rozhodněte, jestli je více těch m -úhelníků ($m \leq n$), jejichž vrcholy tvoří pouze bílé ovečky, nebo těch, kde jeden vrchol tvoří černá a ostatní vrcholy bílé ovečky.

5. ÚLOHA (5 BODŮ)
Franta nakreslil na tabuli 2010 bodů, některé červenou a ostatní černou fixkou. Navíc je nakreslil tak chytře, že ve vzdálenosti 1 cm od každého černého bodu jsou právě dva červené body. Kolik černých bodů mohl takto na tabuli maximálně nakreslit?

¹Při skládání barev nezáleží na pořadí a různé dvojice nemohou dát stejnou barvu.

²Otáčet se a měnit směr chce jen ve vrcholech.

³Neboli, ať dělá ultramarínový cokoliv, purpurový umí vždy vyhrát.

6. ÚLOHA

(5 BODŮ)

Pepa v pravidelném $2n$ -úhelníku obarvil n vrcholů oranžovou a zbývajících n vrcholů limetkovou. Potom všechny oranžové body pospojoval oranžovými a limetkové body limetkovými úsečkami. Svou práci završil tím, že změřil délky všech oranžových úseček a získaná čísla srovnal do neklesající posloupnosti.⁴ Totéž provedl i pro limetkové úsečky. Dokažte, že takto vzniklá posloupnost délek oranžových úseček je stejná jako posloupnost délek limetkových úseček.

7. ÚLOHA

(5 BODŮ)

Ve dvou jednotkových kruzích⁵ obarvíme m , resp. n (ne nutně různých) výsečí pařížskou modří, resp. indigovou tak, že obsah obarvených výsečí je α , resp. β a platí

$$n\alpha + m\beta < \pi.$$

Dokažte, že lze položit jeden kruh na druhý tak, aby se obarvené části nepřekrývaly.⁶

8. ÚLOHA

(5 BODŮ)

Předpokládejme, že všechna přirozená čísla jsou obarvena konečným počtem barev. Dokažte, že vždy můžeme najít různá přirozená čísla a, b, c, d , která splňují následující podmínky:

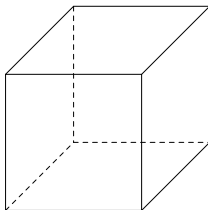
- (i) všechna mají stejnou barvu,
- (ii) $ab = cd$,
- (iii) $a = c \cdot 2^k$,
- (iv) $a = d \cdot 3^l$,

kde k, l jsou nějaká přirozená čísla.

Řešení 1. jarní série

1. úloha

Háňa má krychli, jejíž stěny jsou tvořeny barevnými skly. Když se Háňa na svou kostku podívá jako na obrázku, vidí v každé ze sedmi oblastí jinou výslednou barvu. Kolik různých barev musí skla takové kostky minimálně mít⁷?



Skla krychle musí být minimálně čtyř barev.

⁴Neklesající je taková posloupnost, ve které je každý člen větší nebo roven předchozímu členu.

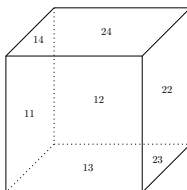
⁵To jsou takové kruhy, které mají poloměr 1.

⁶Kruhy můžeme vůči sobě libovolně otáčet.

⁷Při skládání barev nezáleží na pořadí a různé dvojice nemohou dát stejnou barvu.

Nejprve dokážeme, že tři barvy nestačí. Tři různé barvy se dají nakombinovat do dvojic (na pořadí nezáleží) pouze šesti způsoby, Háňa se ovšem dívá tak, že vidí sedm různých oblastí. V některých dvou proto musí vidět stejné barvy.

Čtyři barvy dávají deset možných kombinací, tedy se zdá, že ty už by stačit mohly. Že opravdu víc barev není potřeba, ověříme jednoduše tak, že krychli čtyřmi barvami správným způsobem obarvíme. Bude-li mít například přední a levá stěna barvu 1, zadní a pravá stěna barvu 2, dolní podstava barvu 3 a horní podstava barvu 4, uvidí Háňa skutečně v každé ze sedmi oblastí jinou výslednou barvu (viz obrázek).



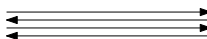
2. úloha

ŠnĚk už zase leze po krychli. Tentokrát chce ale všechny její hrany přebarvit z původní červené na zelenou. Vždy, když se přepozadí po nějaké hraně,⁸ její barva se změní z červené na zelenou, ze zelené na žlutou, nebo ze žluté zpět na červenou. Může se to šnĚkovi povést, jestliže leze jen po hranách a začíná v jednom z vrcholů krychle?

Na začátek uvedeme dvě pozorování. První pozorování: pokud šnĚk přeलेze hranu třikrát (tam, zpátky a zase tam), tak se dostane do sousedního vrcholu a nezmění přitom barvu hrany. Druhé pozorování: pokud šnĚk přeलेze hranu čtyřikrát (tam, zpátky, tam, zpátky), tak zůstane ve stejném bodě, ale přebarví sousední hranu z červené na zelenou.



Posun po hraně
bez změny barvy



Přebarvení hrany
z červené na zelenou

Jedna z vyhrávajících šnĚkových strategií tedy je, že se pomocí druhého pozorování přemístí beze změn barev ke kterékoli hraně a pomocí prvního pozorování ji poté přebarví z červené na zelenou.

Jiné řešení:

Při řešení nám vlastně stačí pro šnĚka najít cestu, kdy po každé z hran projde $(3k + 1)$ -krát (jednou, čtyřikrát, sedmkrát, ...). Při tradičním značení vrcholů krychle to splňuje kupříkladu posloupnost $ABCD AEFBFBFGCGCGHDHDHE$. Pokud by šnĚk lezl po krychli v tomto pořadí, přelezl by po hranách BF , CG a HD právě čtyřikrát a po všech ostatních hranách právě jednou. Takže krychli skutečně umí přebarvit z červené na zelenou.

3. úloha

Na hracím plánu 10×10 bílých polí střídavě hrají dva hráči, ultramarínový a purpurový. Ve svém tahu si hráč zvolí řádek nebo sloupec, jenž doposud nebyl vybrán, a ten celý přebarví na

⁸Otáčet se a měnit směr chce jen ve vrcholech.

svou barvu. Na konci hry, kdy jsou vybrány všechny řádky i sloupce, vyhraje ten, kdo má polí své barvy alespoň o deset více než soupeř. Ukažte, že purpurový, který nezačíná, má výherní strategii.⁹

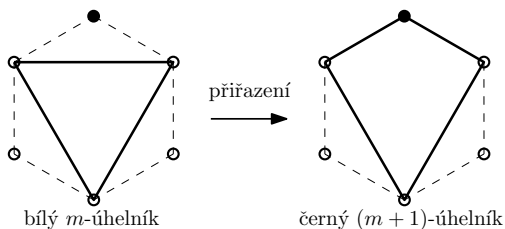
Rovnou prozradíme výherní strategii purpurového. Jestliže ultramarínový hráč obarví i -tý sloupec, tak purpurový naváže i -tým řádkem. Jestliže ultramarínový obarví i -tý řádek, tak purpurový obarví i -tý sloupec. Výsledkem této strategie bude, že úhlopříčka zůstane celá purpurová (každé pole z ní obarvil purpurový hráč jako druhý) a ostatní pole na šachovnici budou obarvena opačnými barvami symetricky podle diagonály, což dá převahu přesně deseti purpurových polí. Opačnou symetrii barev musíme ale ještě odůvodnit.

Pokud ultramarínový hráč obarvil nějaké pole mimo úhlopříčku podruhé (už jednou bylo předtím barveno), tak ji obarvil definitivně (každé pole je obarveno právě dvakrát), a vždy hned potom purpurový hráč obarvil podruhé jemu symetrické pole – také definitivně a na opačnou barvu. Strategie funguje a úloha je vyřešena.

4. úloha

Ve vrcholech pravidelného n -úhelníku stojí n oveček ($n > 2$), z nichž $n - 1$ je bílých a jedna černá. Rozhodněte, jestli je více těch m -úhelníků ($m \leq n$), jejichž vrcholy tvoří pouze bílé ovečky, nebo těch, kde jeden vrchol tvoří černá a ostatní vrcholy bílé ovečky.

Říkejme „bílý“ m -úhelníku tvořenému pouze bílými ovci a „černý“ m -úhelníku s jedním černým vrcholem. Ke každému bílému m -úhelníku můžeme přidat černý vrchol a přiřadit mu tak jednoznačně (právě vytvořený) černý $(m + 1)$ -úhelník.



Našli jsme tedy stejně černých m -úhelníků, jako máme bílých. Takovým přidáváním vrcholu však nevzniknou žádné černé trojúhelníky (k jejich vytvoření bychom potřebovali neexistující bílý 2-úhelník), ale v n -úhelníku určitě nějaké černé trojúhelníky najdeme. Černých m -úhelníků je tedy více.

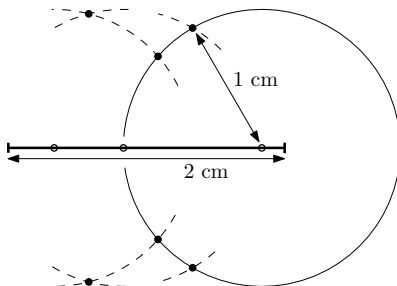
5. úloha

Franta nakreslil na tabuli 2010 bodů, některé červenou a ostatní černou fixkou. Navíc je nakreslil tak chytrě, že ve vzdálenosti 1 cm od každého černého bodu jsou právě dva červené body. Kolik černých bodů mohl takto na tabuli maximálně nakreslit?

Protože celkový počet bodů je pevně daný, získání maximálního počtu černých bodů znamená použití minimálního počtu červených. Jedné dvojici červených bodů lze přiřadit maximálně dva černé body, které vzniknou jako průsečíky jednotkových kružnic se středů v příslušných dvou

⁹Neboli, ať dělá ultramarínový cokoliv, purpurový umí vždy vyhrát.

červených bodech. Minimum červených a maximum černých bodů získáme v ideálním případě tak, že **každé** dvojici červených bodů přiřadíme dva černé. Musíme ukázat, že takového případu lze docílit. A to lze například pokud umístíme červené body na úsečku kratší než 2 cm. Na obrázku je příklad pro tři červené body.



Nyní označme n počet červených bodů, potom černých bodů je maximálně $2 \times$ (počet červených dvojic), kterých je $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$.

$$n + 2 \cdot \frac{n(n-1)}{2} \geq 2010,$$

$$n^2 \geq 2010,$$

$$n \geq \sqrt{2010} > 44.$$

Víme, že n je celé číslo, proto $n = 45$. Tím získáme $45 \cdot 44 = 1980$ míst pro černé body. Využijeme z nich pouze $2010 - 45 = 1965$ pozic, což je nejvyšší možný počet černých bodů, které mohl Franta nakreslit. Vyhovující rozmístění bodů jsou zmíněna v následující poznámce.

Poznámka k vyhovujícímu umístění bodů:

Červené body nemusí ležet na úsečce, nutně ale musí všechny ležet uvnitř kruhu s poloměrem menším než 1. Dále žádné tři červené body nesmí ležet na kružnici o poloměru 1 cm se středem v černém bodě – jeden černý bod by pak měl ve vzdálenosti 1 cm více červených bodů, což odporuje zadání. Vhodným řešením je umístění červených bodů na úsečku nebo na libovolnou kružnici o poloměru menším než 1 cm.

6. úloha

Pepa v pravidelném $2n$ -úhelníku obarvil n vrcholů oranžovou a zbývajících n vrcholů limetkovou. Potom všechny oranžové body pospojoval oranžovými a limetkové body limetkovými úsečkami. Svou práci završil tím, že změřil délky všech oranžových úseček a získaná čísla srovnal do neklesající posloupnosti.¹⁰ Totéž provedl i pro limetkové úsečky. Dokažte, že takto vzniklá posloupnost délek oranžových úseček je stejná jako posloupnost délek limetkových úseček.

Začneme pozorováním, které využijeme ve všech řešeních. V pravidelném $2n$ -úhelníku je právě n různých délek spojnic dvou vrcholů. Budeme je značit x_i , $i = 1 \dots n$, kde x_1 je spojnice mezi

¹⁰Neklesající je taková posloupnost, ve které je každý člen větší nebo roven předchozímu členu.

sousedními vrcholy, tedy strana, a x_n je spojnice „ob $n - 1$ vrcholů“. Ještě se nám bude hodit, že z každého vrcholu vedou právě dvě úsečky délky x_i s výjimkou nejdelší úhlopříčky x_n – ta vede z každého vrcholu jen jedna.

Řešení spočtením:

Úhlopříček délky x_n je n a každá taková úhlopříčka je dvojice vrcholů (které už se neobjeví v žádné jiné úhlopříčce). Počet limetkových úhlopříček označíme L . Limetkových vrcholů je n , tedy zbývajících $n - 2L$ limetkových vrcholů je spojeno s oranžovými vrcholy. Zbývá ještě $n - (n - 2L) = 2L$ oranžových vrcholů, které musí být spárovány spolu (limetkové vrcholy jsou už všechny vyčerpané), takže oranžových úseček bude rovněž L .

Zvolme nějaké i menší než n . Hrany si můžeme představit jako šipky (třeba po směru hodinových ručiček), tedy každá hrana má koncový a počáteční vrchol. Označíme si LL počet limetkovo-limetkových hran, LO počet limetkovo-oranžových hran, OL počet oranžovo-limetkových hran a OO počet oranžovo-oranžových. Všechny hrany délky x_i je $2n$. Limetkových vrcholů je n , tedy šipek (hran) v nich začínajících je rovněž n . Ze stejného důvodu je n i počet šipek končících v oranžových vrcholech.

Počet hran začínajících v limetkovém vrcholu je součet $LL + LO = n$, počet hran končících v oranžovém vrcholu je $OO + LO = n$. Tedy $OO + LO = LL + LO$ a $OO = LL$.

A protože pro každou délku je stejně úseček limetkových jako oranžových, rovnají se i posloupnosti délek.

Řešení prohazováním:

Pokud jsou všechny oranžové body na obvodu vedle sebe, a tedy i limetkové vedle sebe, pak tvrzení určitě platí, protože mnohoúhelník je barevně symetrický.

Máme-li mnohoúhelník, ve kterém je oranžová posloupnost délek úseček stejná jako limetková a prohodíme dva sousední vrcholy, pak i v novém mnohoúhelníku budou posloupnosti stejné. Pokud jsme prohodili vrcholy stejné barvy, je to jasné. Pokud byl jeden limetkový a jeden oranžový, podíváme se na určitou délku x_i a zkoumáme, co se stane. Posloupnost nám ovlivní jenom čtyři¹¹ úsečky délky x_i vedoucí z prohazovaných dvou vrcholů. A není těžké si rozmyslet, že prohozením vznikne/zanikne stejně oranžových úseček délky x_i jako těch limetkových (kdyžtak si to nakreslí).

Zbývá nám dokázat, že úplně každé obarvení mnohoúhelníka umíme dostat z počátečního symetrického postupným prohazováním sousedních vrcholů. Vyjdeme z počátečního symetrického obarvení a pozice jednotlivých bodů očíslováme po směru hodinových ručiček 1 až $2n$. Nejprve umístíme bod správné barvy na pozici 1, pak na pozici 2 (tak, abychom nešli přes pozici 1), na pozici 3 (tak, že nepůjdeme přes pozice 1 a 2), ... až na předposlední a poslední pozici. Posloupnosti délek byly stejné na začátku v symetrické pozici a prohazováním se to nezměnilo, jsou tedy stejné i v libovolné konečné pozici.

Řešení přebarvováním:

Na začátku máme všechny vrcholy obarvené oranžově. Tedy všechny úhlopříčky (straně teď budeme také říkat úhlopříčka) jsou obarvené oranžově. Postupně přebarvíme n vrcholů na limetkovo.

Zaměříme se na nějakou délku x_i , $i < n$. Pokaždé, když přebarvíme vrchol limetkovou, dostanou obě hrany délky x_i , které z něj vycházejí, po jednom penízku. Na hranách oranžová-oranžová (jejich počet označíme oo) nebudou žádné penízky, na hranách limetková-oranžová (lo) bude po

¹¹Lépe řečeno nejvýše čtyři úsečky – např. pro x_1 to budou jen tři.

jednom a na hranách limetková-limetková (ll) bude po dvou. Limetkových vrcholů bude n , tedy hranám délky x_i rozdáme dohromady $2n$ penízků $\rightarrow 2n = 2 \cdot ll + 1 \cdot lo + 0 \cdot oo$. Hran délky x_i je $2n$, a tedy $ll + lo + oo = 2n$. Z posledních dvou rovností dostáváme $ll = oo$, což jsme chtěli.

Případ x_n se vyřeší obdobně.

Tím pádem opět dostáváme, že pro každou délku x_i je počet limetkových úseček roven počtu oranžových, a tedy i jejich poslušnosti se rovnají.

7. úloha

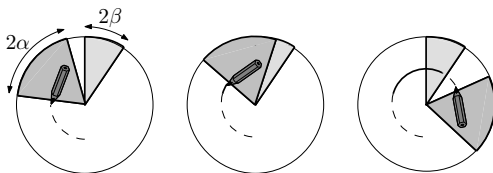
Ve dvou jednotkových kruzích¹² obarvíme m , resp. n (ne nutně různých) výseči pařížskou modří, resp. indigovou tak, že obsah obarvených výsečí je α , resp. β a platí

$$n\alpha + m\beta < \pi.$$

Dokažte, že lze položit jeden kruh na druhý tak, aby se obarvené části nepřekrývaly.¹³

Vyřešme nejprve případ $m = 1$ a $n = 1$, v každém kruhu je tak jedna výseč. Kruh s obsahem výseče α označme A a druhý kruh označme B . Protože je vzorec pro obsah výseče $S = \gamma r^2/2$, kde γ je délka příslušného kružnicového oblouku, jsou délky našich kružnicových oblouků při poloměru $r = 1$ rovny 2α a 2β .

Ke kruhu A připevníme tužku do vzdálenosti $\frac{1}{2}$ od jeho středu, položíme kruh na kruh B a začneme jím otáčet. Na tužku přitlačíme vždy, když se výseče překrývají.



Délka kružnicového oblouku, kterou tužka vypíše, je rovna $\frac{1}{2} \cdot (2\alpha + 2\beta) = \alpha + \beta$. To nahlédneme z krajních poloh výsečí (kdy jsou přesně vedle sebe) a ze zvoleného poloměru $r = \frac{1}{2}$. Ze zadání víme $\alpha + \beta < \pi$. Protože je celkový obvod kružnice s poloměrem $r = \frac{1}{2}$ roven π , nejsou některé body na kružnici zamalovány. Tyto nezamalované body vyznačují, ve kterých otočeních se výseče nepřekrývají, a navíc nepřekrývající se otočení určitě existuje.

Nyní se vrhneme na obecný případ. Označme pro $i = 1, \dots, m$ a $j = 1, \dots, n$ výrazy α_i a β_j obsahy takových výsečí, že $\alpha_1 + \dots + \alpha_m = \alpha$ a $\beta_1 + \dots + \beta_n = \beta$, a A_i a B_j příslušné výseče na kruzích A a B . Položíme oba kruhy na sebe a na kruh A připevníme tužku stejně jako v předchozím případě. Dále pro každé dvě výseče A_i a B_j najdeme na kružnici s polovičním poloměrem oblouk x_{ij} podle výše uvedeného postupu. Pro délku S_{A_i, B_j} oblouku x_{ij} tedy platí $S_{A_i, B_j} = \alpha_i + \beta_j$ a celkově máme vztah

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n S_{A_i, B_j} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (\alpha_i + \beta_j) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \alpha_i + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \beta_j = n \sum_{i=1}^m \alpha_i + m \sum_{j=1}^n \beta_j = n\alpha + m\beta.$$

¹²To jsou takové kruhy, které mají poloměr 1.

¹³Kruhy můžeme vůči sobě libovolně otáčet.

Sumy nalevo reprezentují maximální možný součet délek omalovaných kružnicových oblouků. Protože ale dle předpokladu platí $n\alpha + m\beta < \pi$, pak na kružnici s polovičním poloměrem bude existovat bod Y , který není omalován. Při otočení kruhu tak, že bude tužka nad tímto bodem, se tedy žádné dvě výseče A_i a B_j neprotínají a úloha je vyřešena.

8. úloha

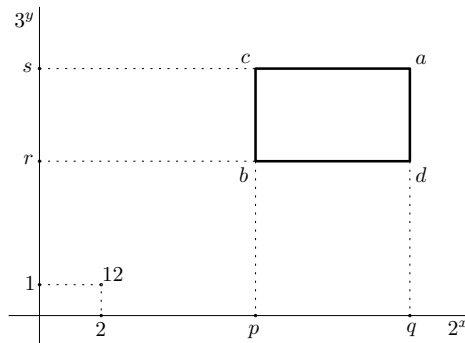
Předpokládejme, že všechna přirozená čísla jsou obarvena konečným počtem barev. Dokažte, že vždy můžeme najít různá přirozená čísla a, b, c, d , která splňují následující podmínky:

- (i) všechna mají stejnou barvu,
- (ii) $ab = cd$,
- (iii) $a = c \cdot 2^k$,
- (iv) $a = d \cdot 3^l$,

kde k, l jsou nějaká přirozená čísla.

Hledejme čísla a, b, c, d mezi čísly tvaru $2^x 3^y$ pro $x, y \geq 0$. Tato čísla můžeme reprezentovat jako mřížové body čtvrtrovin, kde číslo $2^x 3^y$ má souřadnice (x, y) .

Všimněme si, že podmínka (iii) bude splněna, právě když číslo a bude na stejném řádku jako c a vpravo od něj. Podobně podmínka (iv) bude splněna, pokud a a d budou ve stejném sloupci, přičemž a bude výš. Označíme-li teď $a = 2^q 3^s$, $c = 2^p 3^s$ a $d = 2^q 3^r$ ($p < q$, $r < s$), pak podmínka (ii) bude splněna právě tehdy, když $b = 2^p 3^r$, neboli když budou mřížové body určující čísla a, b, c, d tvořit pravoúhelník s vrcholy jako na obrázku.



K vyřešení celé úlohy nám tedy stačí ukázat, že ve čtvrtmřížce obarvené N barvami existuje pravoúhelník, který má všechny vrcholy stejně barevné. K tomu opakovaně použijeme Dirichletův princip (dále DP).

Podíváme se na prvních $N + 1$ sloupců. V každém řádku se díváme na $N + 1$ čísel, tedy podle DP existují v každém řádku (a v rámci těchto $N + 1$ sloupců) dvě čísla, která mají stejnou barvu. Pokud je takových čísel víc, vybereme si libovolnou dvojici. Dvojice se pochopitelně nemusí vyskytovat všechny nad sebou, je však jen $N(N + 1)/2$ možností pro to, které dva sloupce může dvojice v řádku okupovat. Navíc barva každé dvojice může být jedna z N možných.

Uvážíme tedy

$$\left(N \cdot \frac{N(N + 1)}{2} \right) + 1$$

řádků. Jelikož je jen $N \cdot N(N + 1)/2$ možných kombinací co do barvy dvojice a výběru dvou sloupců, budou díky DP existovat dva řádky, v nichž budou mít dvojice jak stejné umístění, tak stejnou barvu. Spojením těchto dvojic získáme hledaný pravoúhelník.