2. jarní série

Téma: Rovnice a soustavy

Datum odeslání: 15. března 2010

1. úloha (3 body)

Kája našla na kraji svého sešitu napsanou tuto soustavu pěti rovnic:

$$ab = 1, \quad bc = 2, \quad cd = 3, \quad de = 4, \quad ea = 6.$$

Pomozte jí ji vyřešit, tzn. najděte všechny pětice čísel a, b, c, d, e, které soustavu splňují.

2. úloha (3 body)

Ferda, Pepův bratranec z druhého kolena, letos oslaví tolikáté narozeniny, kolik je ciferný součet roku, ve kterém se narodil. Kolikpak mu bude? Můžete předpokládat, že Ferda není starší než 100 let.

3. úloha (3 body)

Najděte všechny trojice prvočísel p, q, r, pro které platí $p^q + 1 = r$.

4. úloha (5 bodů)

Vyřešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned} a^5 &= b + b^5, \\ b^5 &= c + c^5, \\ &\vdots \\ y^5 &= z + z^5, \\ z^5 &= a + a^5. \end{aligned}$$

5. úloha (5 bodů)

Dokažte, že pokud má rovnice $x^3 + px + q = 0$ s proměnnou x nějaké kladné reálné řešení x_0, pak pro toto řešení musí platit

$$4qx_0 \leq p^2.$$

6. úloha (5 bodů)

ŠnEk zadal Rasťovi netradiční soustavu nekonečně mnoha rovnic. Rasťo měl najít taková $x, y \in \mathbb{R}$, aby rovnice

$$\sin a = x \sin\left(\frac{\pi}{2} + a\right) + y \sin\left(\frac{\pi}{6} + a\right)$$

byla splněná pro každé $a \in \mathbb{R}$. Dokážete mu pomoci a soustavu vyřešit?

7. úloha (5 bodů)

Po dlouhých letech na Matfyzu Franta pochopil, že algebra je ten obor, který chce studovat, a tak si cvičně vyřešil soustavu

$$\begin{aligned} a^3 - b^3 - c^3 &= 3abc, \\ a^2 &= 2(a + b + c), \end{aligned}$$

kde a, b, c jsou reálná čísla. Vyřešte ji i vy!

8. ÚLOHA (5 BODŮ)

O kladných reálných číslech a, b, c, d víme, že splňují vztah $ab + cd = (a+b)(c+d)$. Dokažte, že potom

$$\max(a,b,c,d) \geq \frac{\sqrt{3}+1}{4\sqrt{3}}(a+b+c+d).$$

Řešení 2. jarní série

1. úloha

Kája našla na kraji svého sešitu napsanou tuto soustavu pěti rovnic:

$$ab = 1, \quad bc = 2, \quad cd = 3, \quad de = 4, \quad ea = 6.$$

Pomozte jí ji vyřešit, tzn. najděte všechny pětice čísel a, b, c, d, e, které soustavu splňují.

Našou úlohou je vyriešiť sústavu rovníc. Najprv vyčíslime jednu neznámu, napríklad a, a potom pomocou rovníc dopočítame hodnoty ostatných neznámych. Všetky hľadané hodnoty sú nenulové, a preto môžeme rovnice medzi sebou ľubovolne kombinovať. Vynásobime prvú, tretiu a piatu rovnicu a tento súčin následne vydelíme druhou a štvrtou rovnicou:

$$\left(a^2 =\right) \frac{(ab)(cd)(ea)}{(bc)(de)} = \frac{1\cdot 3\cdot 6}{2\cdot 4} = \frac{9}{4}.$$

Po odmocnení získame dva korene $\frac{3}{2}$ a $-\frac{3}{2}$, takže celkovo dostávame dve riešenia:

$$[a,b,c,d,e] \in \left\{ \left[\frac{3}{2}, \frac{2}{3}, 3, 1, 4\right], \left[-\frac{3}{2}, -\frac{2}{3}, -3, -1, -4\right] \right\}.$$

2. úloha

Ferda, Pepův bratranec z druhého kolena, letos oslaví tolikáté narozeniny, kolik je ciferný součet roku, ve kterém se narodil. Kolikpak mu bude? Můžete předpokládat, že Ferda není starší než 100 let.

Hned na začátku si musíme uvědomit, že úloha se bude řešit zvlášť pro dva případy, a to zda se Ferda narodil před, nebo po roce 2000.

(1) Letopočet má tvar $19xy$. Hledaný věk je $2010 - 19xy = 110 - 10x - y$. Rovnici $110 - 10x - y = 1 + 9 + x + y$ upravíme na tvar

$$100 = 11x + 2y.$$

Víme, že $x, y < 10$. Vidíme, že číslo $11x$ musí být sudé, proto je i x sudé. Protože navíc $\frac{100-11x}{2} = y < 10$, což po úpravě dává $x > \frac{20-100}{-11} = 7\frac{3}{11}$, je nutně $x = 8$. Dopočteme $y = 6$. Rok narození Ferdy je 1986, oslaví 24. narozeniny.

(2) Letopočet má tvar $200z$ (pro 2010 nelze). Hledaný věk je $2010 - 200z = 10 - z$. Z rovnice $10 - z = 2 + z$ spočteme $z = 4$. Druhý možný rok narození je 2004, oslavil by 6. narozeniny.

3. úloha
Najděte všechny trojice prvočísel p, q, r, pro které platí $p^q + 1 = r$.

Rozeberme dva případy podle parity r. Bude-li r sudé, pak $r = 2$, protože 2 je jediné sudé prvočíslo. Zadaná rovnice je pak tvaru $p^q = 1$, a tedy nemá žádné prvočíselné řešení.

Naopak, bude-li r liché, pak p^q je sudé, tedy p je sudé, neboli $p = 2$. Řešíme tedy rovnici $2^q + 1 = r$. Pokud by bylo $q = 2$, pak dostaneme $r = 5$, a máme jedno řešení $(2, 2, 5)$. Pokud však bude q liché, pak se dá zapsat ve tvaru $q = 2k + 1$ pro nějaké $k \in \{0, 1, 2, \dots\}$, a tedy řešíme rovnici

$$2^{2k+1} + 1 = r.$$

Dokážeme indukcí podle k, že výraz na levé straně je vždy dělitelný třemi. Pro $k = 0$ máme $3 \mid 3$. Nyní předpokládejme, že $2^{2k+1} + 1 = 3l$ pro nějaké $l \in \mathbb{N}$ a dokažme, že $3 \mid 2^{2(k+1)+1} + 1$. Počítejme:

$$2^{2(k+1)+1} + 1 = 2^{2k+3} + 1 = 4 \cdot 2^{2k+1} + 1 = 4(2^{2k+1} + 1) - 3 = 4(3l) - 3 = 3(4l - 1).$$

Proto $3 \mid 2^{2(k+1)+1} + 1 = r$. Jelikož tedy 3 vždy dělí r, musí být $r = 3$. Pak dostaneme $q = 1$, což není prvočíslo.

Jediná trojice prvočísel vyhovující zadané rovnici je $(2, 2, 5)$.

4. úloha
Vyřešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned} a^5 &= b + b^5, \\ b^5 &= c + c^5, \\ &\vdots \\ y^5 &= z + z^5, \\ z^5 &= a + a^5. \end{aligned}$$

Pokud všechny rovnice sečteme, získáme následující rovnost:

$$\begin{gathered} a^5 + b^5 + \dots + z^5 = a + b + \dots + z + a^5 + b^5 + \dots + z^5, \\ 0 = a + b + \dots + z. \end{gathered}$$

Dokážeme, že z této rovnosti už plyne, že jediné řešení soustavy je $a = b = \dots = z = 0$. Pro spor předpokládejme, že existuje řešení, ve kterém je alespoň jedno z čísel $a, b, \dots, z$ (BÚNO třeba z, soustava je cyklická) kladné. Ze $z > 0$ a předposlední rovnice plyne $y^5 = z^5 + z > 0$, odkud dostáváme $y > 0$ (pátá mocnina zachovává znaménko). Stejným argumentem (použitím předpředposlední rovnice) obdržíme z $y > 0$ i nerovnost $x > 0$, z té zase plyne $w > 0$ atd. atd. až po $a > 0$. Součet kladných čísel je ovšem kladné číslo ($a + b + \dots + z > 0$), což je spor s předpokladem $a + b + \dots + z = 0$. V případě $z < 0$ postupujeme analogicky – zjistíme, že $y < 0$ atd. Jediné možné řešení soustavy je tedy $a = b = \dots = z = 0$, které rovnicím zřejmě vyhovuje.

Jiné řešení
Předpokládejme, že je $a > 0$, a tedy jsou podle úvah výše i všechny ostatní neznámé kladné. Z první rovnice $a^5 = b + b^5$ plyne $a^5 > b^5$ (a^5 je oproti b^5 větší o kladné číslo b), a tedy i $a > b$. Toutéž úvahou pro druhou rovnici získáme nerovnost $b > c$, pro třetí pak $c > d$ atd. atd. až z poslední rovnice zjistíme, že $z > a$. Takto jsme sestavili řetěz nerovností $a > b > \cdots > z > a$, který ovšem vede ke sporu $a > a$. Případ $a < 0$ se zase rozebere velmi podobně. Musí tedy platit $a = 0$, z čehož již snadno získáme jediné řešení $a = b = \cdots = z = 0$.

5. úloha
Dokažte, že pokud má rovnice $x^3 + px + q = 0$ s proměnnou x nějaké kladné reálné řešení x_0, pak pro toto řešení musí platit
$$4qx_0 \le p^2.$$

Předpokládejme, že x_0 je nějaké reálné řešení rovnice $x^3 + px + q = 0$. Pak je x_0 rovněž řešením kvadratické rovnice $x_0x^2 + px + q = 0$. Aby měla kvadratická rovnice reálné řešení, musí být její diskriminant větší nebo roven 0, v našem případě tedy

$$D = p^2 - 4qx_0 \ge 0,$$

z čehož ihned plyne dokazovaná nerovnost.

6. úloha
ŠnEk zadal Rasťovi netradiční soustavu nekonečně mnoha rovnic. Rasťo měl najít taková $x, y \in \mathbb{R}$, aby rovnice
$$\sin a = x \sin\Bigl(\frac{\pi}{2} + a\Bigr) + y \sin\Bigl(\frac{\pi}{6} + a\Bigr)$$
byla splněná pro každé $a \in \mathbb{R}$. Dokážete mu pomoci a soustavu vyřešit?

Z nekonečně mnoha rovnic vybereme dvě speciální. Jednu získáme dosazením $a = -\frac{\pi}{2}$ a druhou dosazením $a = -\frac{\pi}{6}$. První rovnice nám dává podmínku

$$-1 = \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = x \cdot 0 + y \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} y \qquad \Rightarrow \qquad y = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

a druhá dává podmínku

$$-\frac{1}{2} = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = x \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) + y \cdot 0 = \frac{\sqrt{3}}{2} x \qquad \Rightarrow \qquad x = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Pokud má nějaká dvojice čísel x, y řešit všech nekonečně mnoho rovnic, může to být jedině tato, ale potřebujeme ještě ověřit, že nalezená dvojice skutečně řeší všechny rovnice. K tomu nám bude stačit rovnost $\sin(\frac{\pi}{2} + a) = \cos a$ a známý vztah $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$. Upravujme:

$$-\frac{1}{\sqrt{3}} \sin\left(\frac{\pi}{2} + a\right) + \frac{2}{\sqrt{3}} \sin\left(\frac{\pi}{6} + a\right) = -\frac{1}{\sqrt{3}} \cos a + \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{2} \cos a + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin a\right) = \sin a,$$

čímž jsme ověřili, že nalezená dvojice je skutečně řešením.

7. úloha
Po dlouhých letech na Matfyzu Franta pochopil, že algebra je ten obor, který chce studovat, a tak si cvičně vyřešil soustavu

$$
\begin{aligned}
a^3 - b^3 - c^3 &= 3abc,\\
a^2 &= 2(a+b+c),
\end{aligned}
$$

kde a, b, c jsou reálná čísla. Vyřešte ji i vy!

Podle Dominika Lachmana:
První rovnici si upravíme do vhodného součinového tvaru.

$$
\begin{aligned}
a^3 - (b+c)^3 + 3b^2c + 3bc^2 &= 3abc,\\
(a-b-c)\Big(a^2 + a(b+c) + (b+c)^2\Big) + 3bc(b+c-a) &= 0, \qquad / \cdot 2\\
(a-b-c)\cdot 2\cdot \Big(a^2+b^2+c^2+ab+ac-bc\Big) &= 0,\\
(a-b-c)\Big((a+b)^2+(a+c)^2+(b-c)^2\Big) &= 0.
\end{aligned}
$$

Ze součinového tvaru je vidět, že rovnost nastane právě tehdy, je-li splněna aspoň jedna z podmínek $a = b + c$ nebo $-a = b = c$. Tyto podmínky rozebereme zvlášť.

1. podmínka: $a = b + c$
Po dosazení do druhého vztahu ze zadání dostaneme rovnici $a^2 = 4a$, jejíž kořeny jsou 0 a 4. Vztahy $0 = a = b + c$ a $4 = a = b + c$ určují řešení $(0, -c, c)$ a $(4, 4 - c, c)$, kde $c \in \mathbb{R}$

2. podmínka: $-a = b = c$
Dosazením do druhé rovnice ze zadání dostaneme rovnici $a^2 = -2a$, které vyhovují 0 a -2. Řešení této větve (při aplikování $-a = b = c$) jsou: $(0, 0, 0)$ a $(-2, 2, 2)$.

Zkoušky nejsou nutné, protože řešení vždy splňují některou z podmínek $a = b + c$ nebo $-a = b = c$, čímž vyhovují první rovnici ze zadání, a dále splňují odvozené vztahy $a^2 = 4a$ nebo $a^2 = -2a$, takže vyhovují i druhé rovnici. Řešení $(0, 0, 0)$ je již obsaženo v $(0, -c, c)$.

Závěr: množina všech řešení je $\{(-2, 2, 2), (0, -c, c), (4, 4 - c, c)\}$, $c \in \mathbb{R}$.

8. úloha
O kladných reálných číslech a, b, c, d víme, že splňují vztah $ab + cd = (a + b)(c + d)$. Dokažte, že potom

$$
\max(a,b,c,d) \geq \frac{\sqrt{3}+1}{4\sqrt{3}}(a+b+c+d).
$$

První řešení (podle Ivana Borsenca):
Sečtením AG-nerovností $(a + b)^2 \geq 4ab$ a $(c + d)^2 \geq 4cd$ dostaneme

$$
(a+b)^2 + (c+d)^2 \geq 4(ab+cd) = 4(a+b)(c+d),
$$

což upravíme nejdříve na rozdíl čtverců a následně na součin dvou závorek.

$$\Big((a+b)-2(c+d)\Big)^2-\Big(\sqrt{3}(c+d)\Big)^2\geq 0,$$
$$\Big((a+b)-(2+\sqrt{3})(c+d)\Big)\Big((a+b)-(2-\sqrt{3})(c+d)\Big)\geq 0.$$

Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat $a+b\geq c+d>(2-\sqrt{3})(c+d)$, což je ekvivalentní s tím, že pravá závorka z předchozího součinu je kladná. Tím pádem je druhá závorka nezáporná:

$$\Big((a+b)-(2+\sqrt{3})(c+d)\Big)\geq 0.$$

Přepišme si nerovnost do podoby $\frac{1}{2+\sqrt{3}}(a+b)\geq c+d$. V kombinaci s nerovností

$$2\cdot\max(a,b,c,d)\geq a+b$$

dostaneme požadovaný výsledek.

$$\Big(1+\frac{1}{2+\sqrt{3}}\Big)\cdot 2\cdot\max(a,b,c,d)\geq a+b+\frac{1}{2+\sqrt{3}}\cdot(a+b)\geq a+b+c+d,$$
$$\max(a,b,c,d)\geq\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{2+\sqrt{3}}}\cdot(a+b+c+d),$$
$$\max(a,b,c,d)\geq\frac{\sqrt{3}+1}{4\sqrt{3}}(a+b+c+d).$$

Druhé řešení (podle Radka Marcini):

Nejprve označíme

$$s=a+b+c+d,\qquad f=\frac{a+b}{2}\qquad\text{a}\qquad g=\frac{c+d}{2}.$$

Z tohoto ihned dostáváme $f+g=\frac{s}{2}$, a protože jsou f, resp. g aritmetické průměry a a b, resp. c a d, platí nerovnost

$$\max(a,b,c,d)\geq\max(f,g).$$

Dále využijeme dvě AG-nerovnosti.

$$f=\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}\qquad\text{a}\qquad g=\frac{c+d}{2}\geq\sqrt{cd},\qquad\Rightarrow\qquad f^2+g^2\geq ab+cd.$$

Nyní vezmeme předpoklad $(a+b)(c+d)=ab+cd$ ze zadání a pomocí něj a předchozí nerovnosti vytvoříme nerovnici, ve které vystupují pouze f a g.

$$f^2+g^2\geq ab+cd=(a+b)(c+d)=(2f)(2g)=4fg,$$
$$(f+g)^2\geq 6fg.$$

Dosadíme $f+g=\frac{s}{2}$.

$$\frac{s^2}{4}=6f\left(\frac{s}{2}-f\right).$$

Z toho získáme po úpravě kvadratickou nerovnici

$$6f^2 - 3fs + \frac{s^2}{4} \geq 0$$

a pomocí této kvadratické nerovnice získáme vztah mezi f a s.

$$f_{1,2} = \frac{3s \pm \sqrt{9s^2 - 6s^2}}{12} = s\frac{\sqrt{3} \pm 1}{4\sqrt{3}} \qquad \Rightarrow \qquad f \geq s\frac{\sqrt{3}+1}{4\sqrt{3}} \quad \text{nebo} \quad f \leq s\frac{\sqrt{3}-1}{4\sqrt{3}}.$$

Druhý případ se na první pohled tváří nepříjemně, jenže z něj obratem dostaneme první případ (tentokrát v proměnné g).

$$g = \frac{s}{2} - f \geq \frac{s}{2} - s\frac{\sqrt{3}-1}{4\sqrt{3}} = s\frac{\sqrt{3}+1}{4\sqrt{3}}.$$

Při použití nerovnosti ukázané na začátku dostáváme

$$\max(a,b,c,d) \geq \max(f,g) \geq s\frac{\sqrt{3}+1}{4\sqrt{3}},$$

což jsme chtěli dokázat.