Seriál – nerovnosti

Úvod a motivace

Na samý úvod letošního seriálu bychom vám chtěli pogratulovat k dobré volbě tématu. Nerovnosti jsou překrásnou (a také naší oblíbenou) kapitolou a budeme se snažit vaši důvěru oplatit poutavým, čtivým, zábavným a především poučným povídáním o nich. Posuďte sami, jak se nám to bude dařit. Nuže, neotálejme dále a vrhněme se střemhlav do pestrého a podmanivého světa nerovností!

Co to je nerovnost?

Jelikož se nerovnostem budeme věnovat celý seriál, bylo by dobré si nyní vyjasnit, co to vlastně je. Úlohy, jimiž se budeme zabývat, budou zpravidla vypadat nějak takto:

Úloha. Ukažte, že pro reálná čísla x, y, z platí

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx.$$

Na rozdíl od nerovnic, s nimiž ses už pravděpodobně setkal na střední škole, nepátráme po tom, kdy daný vztah platí. U nerovností dokazujeme, že platí pro jakákoliv přípustná čísla (která to jsou, se vždy dozvíme ze zadání). Nerovnosti mohou vypadat všelijak, od úplně jednoduchých, jako je třeba tato

$$x^2 \geq 0 \quad \text{pro každé } x \in \mathbb{R},$$

až po takové, s nimiž dlouhé měsíce neúspěšně zápasil i prezident české matematické olympiády *doc. Jaromír Šimša.*

Úloha. (Hodně těžká) Dokažte, že pro libovolná kladná čísla a, b, c platí

$$\frac{ab}{4a^2 + b^2 + 4c^2} + \frac{bc}{4b^2 + c^2 + 4a^2} + \frac{ca}{4c^2 + a^2 + 4b^2} \leq \frac{1}{3}.$$

V centru naší pozornosti budou převážně nerovnosti, jejichž obtížnost leží někde mezi uvedenými příklady.

Na nerovnostech je zajímavé, že na ně neexistuje žádná univerzální metoda. U každé nerovnosti musíme pečlivě rozmýšlet, z které strany povedeme svůj útok. V tomto seriálu se naučíme několik základních i pokročilých výpadů a též, jak u nerovnosti poznat, který z nich zvolit.

K čemu jsou nerovnosti dobré?

Ke spoustě věcí! Schopnost poměřovat algebraické výrazy zaručeně uplatníte. Algebraická představivost a intuice, kterou získáte, bude neocenitelná; jak na střední, tak později i na vysoké škole (vysokoškolských aplikací je bezpočet). Mimoto se nerovnosti dají s úspěchem používat v úlohách podobných těm z našeho semináře či z matematické olympiády (dále jen MO). Však například loňské celostátní kolo MO přímo obsahovalo důkaz jedné nerovnosti a podobných případů z posledních let je mnoho. Pro účast v mezinárodních soutěžích je znalost základních nerovností téměř nutná. Nemáš-li ovšem ambice v MO, pak ti snad bude stačit, že nerovnosti jsou zkrátka pěkné a často se v jejich důkazech objevují originální myšlenky. Jejich studium je díky tomu velmi obohacující.

Nejjednodušší nerovnosti a jejich důkazy

Tu nejjednodušší nerovnost jsme si již ukázali, nicméně její význam je obrovský, a tak si zaslouží zopakování:

$$x^2 \geq 0 \quad \text{pro každé } x \in \mathbb{R}.$$

Ano, druhá mocnina každého čísla je opravdu nezáporná. Pokud se ti tato nerovnost zdá trapně jednoduchá, pak věz, že její důsledky jsou nedozírné. Například si představ, že bys měl dokazovat nerovnost

$$(x^2 - 3x + 1)^2 \geq 0 \quad \text{pro každé } x \in \mathbb{R},$$

v níž by ovšem levá strana byla roznásobená! Objevit, že se jedná o druhou mocninu by jistě dalo dost práce, a to jsme zdaleka nepoužili nejtěžší možný příklad. Taková zvěrstva ale v tomto seriálu provádět nebudeme. :)

Nejpoužívanější důsledky nezápornosti druhé mocniny jsou následující tvrzení.

Tvrzení. *Pro každé $x, y \in \mathbb{R}$ platí*

$$x^2 + y^2 \geq 2xy.$$

Důkaz. Snadno spatříme, že nerovnost je ekvivalentní nerovnosti $(x - y)^2 \geq 0$, která jistě platí.

Tvrzení. *Pro jakákoliv kladná čísla a, b platí*

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2.$$

Důkaz. Jistě platí

$$a^2 + b^2 \geq 2ab.$$

Vydělme tuto nerovnost číslem (kladným, znaménko se tedy nezmění!) ab a získáme

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2,$$

což je přesně nerovnost, kterou jsme měli dokázat.

Cvičení. (Důležité) Rozmyslete si, že

(i) Přičteme-li k oběma stranám nerovnosti stejné číslo, dostaneme platnou nerovnost.
(ii) Vynásobíme-li obě strany nerovnosti kladným číslem, získáme platnou nerovnost.
(iii) Sečtením dvou platných nerovností získáme platnou nerovnost.
(iv) Vynásobením dvou platných nerovností mezi kladnými čísly (rozuměj na obou levých i pravých stranách jsou kladná čísla) získáme platnou nerovnost.
(v) Kdykoliv požadujeme, aby čísla byla kladná, máme k tomu důvod.

Ještě si na příkladu ukážeme, jak by měl vypadat pěkný důkaz nerovnosti. Často se totiž postup, díky němuž nerovnost vyřešíme, liší od důkazu, který pak napíšeme. Sledujte!

Příklad. Pro $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ dokažte

$$(a + b + c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 9.$$

Postup. (Takhle na to přijdeme …) Levou stranu roznásobíme a po odečtení trojky od obou stran nerovnosti nám zbyde dokázat

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + \frac{b}{c} + \frac{c}{b} + \frac{c}{a} + \frac{a}{c} \geq 6.$$

Nyní si vzpomeneme, že platí $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2$, kdykoliv $a,b>0$ a vidíme, že na levé straně jsou tři výrazy, které můžeme takto odhadnout:

$$\underbrace{\frac{a}{b}+\frac{b}{a}}_{\geq 2}+\underbrace{\frac{b}{c}+\frac{c}{b}}_{\geq 2}+\underbrace{\frac{c}{a}+\frac{a}{c}}_{\geq 2}\geq 6.$$

Levá strana je tedy aspoň 6 a jsme hotovi.

Důkaz. (... a takhle to zapíšeme) Čísla a,b,c jsou kladná, takže platí nerovnosti $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2$, $\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\geq 2$ a $\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\geq 2$. Platí tedy i nerovnost, kterou získáme součtem těchto tří,

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{b}{c}+\frac{c}{b}+\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\geq 6.$$

Nyní k oběma stranám nerovnosti přičteme číslo 3 a levou stranu zapíšeme ve tvaru součinu $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$. Získáme nerovnost

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geq 9.$$

Ovšem přesně tuto nerovnost jsme měli dokázat (to je ale náhoda!), takže jsme hotovi.

Celá věda je v tom, že v matematice je slušné vycházet z něčeho, co platí, a postupně z toho něco vyvozovat. První řešení (Postup) se tedy dá snadno opravit poznámkou (bez ní by se už strhávaly body!), že všechny naše úpravy byly ekvivalentní a můžeme tak celý postup obrátit. Přestože sami považujeme druhé řešení (Důkaz) za pěknější, občas se v zájmu čitelnosti a srozumitelnosti uchýlíme k metodám z řešení prvního. Budete-li při psaní vašich řešení postupovat také tak, nezapomeňte na zmínku o ekvivalenci úprav!

Zkuste si!

Tak a teď si poprvé v tomto seriálu můžete zkusit sami něco dokázat. Směle do toho!

Cvičení. Pro $x,y\in\mathbb{R}$ ukažte

$$x+y\geq 2\sqrt{xy}.$$

Cvičení. Ukažte, že pro libovolná kladná čísla a,b platí

$$\frac{a^2+b^2}{a+b}\geq\frac{a+b}{2}.$$

Cvičení. Dokažte pro a,b taková, že $a+b>0$, nerovnost

$$\frac{a}{b^2}+\frac{b}{a^2}\geq\frac{1}{a}+\frac{1}{b}.$$

Návod. Ekvivalentně upravujte za použití vztahu $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$.

Cvičení. Pro x,y,z reálná čísla dokažte $x^2+y^2+z^2\geq xy+yz+zx$.

Návod. Vynásobte dvěma a rozložte na součet tří nerovností.

Cvičení. Pro kladná čísla a, b, c ukažte

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$$

a rozhodněte, zda nerovnost platí i pro reálná čísla.

Návod. Vynásobte tři platné nerovnosti.

Symetrické, cyklické a homogenní výrazy

Dříve než se pustíme do nerovného boje s opravdovými nerovnostmi, potřebujeme se seznámit s některými pojmy, které nás budou provázet po zbytek seriálu.

Aby naše povídání bylo názornější, budeme si vše ukazovat na příkladech a většinou nebudeme potřebovat více než tři proměnné, ovšem upozorníme i na složitější či obecnější případy. Všechny vlastnosti popsané v následujících odstavcích říkají, že výrazy, kterými se zabýváme, se chovají nějakým způsobem pěkně. Definice budeme pro jednoduchost formulovat pro výrazy V závisející jen na třech proměnných a, b, c. Poznamenejme, že přestože v definicích mluvíme jen o výrazech, budeme je později aplikovat i na funkce či celé nerovnosti. Pusťme se do práce.

Definice. (Symetrie) *Výraz $V(a, b, c)$ nazveme symetrický, pokud se nezmění libovolnou záměnou*[1] *proměnných.*

Pro více proměnných se symetrie definuje naprosto stejně. Podrobně rozepsáno definice říká, že platí

$$V(a, b, c) = V(a, c, b) = V(b, a, c) = V(b, c, a) = V(c, a, b) = V(c, b, a).$$

Můžeš si rozmyslet, že pro symetrii výrazu stačí, aby se nezměnil při záměně libovolných dvou proměnných.

Příklad. Následující výrazy jsou symetrické

$$a + b + c, \qquad \frac{abc}{(ab + bc + ca)^2}, \qquad \frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b}.$$

Důležité je pochopit, k čemu může být symetrie dobrá. Díky symetrii můžeme bez újmy na obecnosti[2] předpokládat, že platí $a \geq b \geq c$. Kdyby totiž zrovna platilo jiné uspořádání, například $b \geq a \geq c$, můžeme zavést nové proměnné $a' = b$, $b' = a$, $c' = c$, $a' \geq b' \geq c'$ a vidíme, že platí $V(a', b', c') = V(b, a, c) = V(a, b, c)$. Uspořádání je vhodné především proto, že výrazně zkracuje diskuzi během důkazu. Navíc je vždy dobré si uvědomit, s jakým nepřítelem se zrovna potkáváme, ať už za účelem výběru vhodné zbraně proti němu, nebo i kdyby nám to mělo posloužit jen jako kontrolní mechanismus (úpravami symetrické nerovnosti dostaneme zase jen symetrickou nerovnost).

Přišla ta správná chvíle dokázat si první opravdovou nerovnost. Protože nejsme žádná ořezávátka, ukážeme si hned *Schurovu nerovnost.*

---

[1] Odborně říkáme, že se nezmění při libovolné permutaci.

[2] Tohoto úsměvného archaismu se příliš nelekej, používá se v matematice zcela běžně, při jiných příležitostech jej ale nemůžeme doporučit. :) Někdy se zkracuje na BÚNO. Dokonce i v anglické literatuře se používá zkratka WLOG (without loss of generality).

Příklad. (Schurova nerovnost) Pro všechna $a, b, c \geq 0$ dokažte

$$a(a-b)(a-c)+b(b-a)(b-c)+c(c-a)(c-b) \geq 0.$$

Všimneme si, že nerovnost je v proměnných a, b, c symetrická. Protože je to náš první příklad, rozepišme jej poněkud podrobněji.

$$V(a,b,c)=a(a-b)(a-c)+b(b-a)(b-c)+c(c-a)(c-b),$$

$$V(a,c,b)=a(a-c)(a-b)+c(c-a)(c-b)+b(b-a)(b-c),$$

platí tedy $V(a,b,c)=V(a,c,b)$ a zcela analogicky platí všechny ostatní potřebné rovnosti. Symetrie je dokázaná a můžeme přikročit k důkazu samotné nerovnosti.

Důkaz. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $a \geq b \geq c$. Díky tomu ihned vidíme, že $c(c-a)(c-b) \geq 0$. Stačilo by nám tedy dokázat již jen

$$a(a-b)(a-c)+b(b-a)(b-c) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad a(a-b)(a-c) \geq b(a-b)(b-c).$$

Ovšem tato nerovnost platí triviálně, neboť $a \geq b$, $a-b=a-b$, $a-c \geq b-c$ a jedná se vždy o nezáporná čísla. Důkaz je hotov.

Všimněme si, že u nerovností musíme být opatrní na znaménka, protože například z nerovností $0 \geq x \geq y$, $u \geq v \geq 0$ bychom nemohli učinit závěr $ux \geq vy$. Ve skutečnosti jsme ti zatajili, že Schurova nerovnost se většinou píše ve tvaru

$$a^k(a-b)(a-c)+b^k(b-a)(b-c)+c^k(c-a)(c-b) \geq 0$$

pro $a, b, c \geq 0$ a libovolné $k \geq 0$. Dokáže se ale úplně stejně[3]. Pro různá k dává velice zajímavé nerovnosti[4].

Definice. (Cykličnost) *Výraz $V(a,b,c)$ nazveme cyklický, pokud se nezmění při provedení libovolné cyklické záměny, tj.*

$$V(a,b,c)=V(b,c,a)=V(c,a,b).$$

Příklad. Následující výrazy jsou cyklické, avšak nikoliv symetrické

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}, \qquad \frac{a^2}{a+b}+\frac{b^2}{b+c}+\frac{c^2}{c+a}.$$

Cyklickou záměnu pro více proměnných si lze představit tak, že proměnné jako by seděly u kulatého pohyblivého stolu, který o několik pozic pootočíme. Cyklickou záměnou pořadí proměnných $x_1, \ldots, x_n$ je tedy pořadí $x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n, x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}$ pro libovolné $i \in \{1, \ldots, n\}$.

---

[3] Dokonce existují další její zobecnění, například členy a^k, b^k, c^k lze nahradit nahradit členy $f(a), f(b), f(c)$, kde f je libovolná nezáporná monotónní funkce.

[4] Zkus například komukoliv, kdo Schurovu nerovnost nezná, říct, aby dokázal nerovnost $a^3+b^3+c^3+3abc \geq a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b$, což je jenom roznásobený tvar Schurovy nerovnosti pro $k=1$. Vsadíme boty, že se mu to nepodaří.

Je-li výraz V proměnných a, b, c jen cyklický, nemůžeme již předpokládat $a \geq b \geq c$, lze však bez újmy na obecnosti alespoň předpokládat, že a je největší. Kdyby totiž bylo největší například c, provedeme cyklickou záměnu $a' = c$, $b' = a$, $c' = b$, a' je nyní největší a dostáváme $V(a', b', c') = V(c, a, b) = V(a, b, c)$. Díky tomu je možné diskuzi během důkazu omezit na dva případy, $a \geq b \geq c$ a $a \geq c \geq b$. Pro více proměnných by nám stále zůstávalo mnoho případů, které by bylo nutné jeden po druhém diskutovat.

Definice. (Homogenita) *Výraz $V(a, b, c)$ nazveme homogenní stupně α, pokud existuje $\alpha \in \mathbb{R}$ takové, že pro každé $t > 0$ platí*

$$V(ta, tb, tc) = t^\alpha V(a, b, c).$$

Příklad. Následující výrazy jsou homogenní (postupně stupňů 1, 0 a -3):

$$a + 2b + 3c, \qquad \frac{a}{b} + \frac{bc}{a^2} + 5, \qquad \frac{1}{a^3} + \frac{2b}{a^4} - \frac{1}{abc}.$$

Často nám bude stačit, že výraz je homogenní, a nebude nás příliš zajímat jakého stupně. Například uvedená Schurova nerovnost (pro $k = 1$) je homogenní stupně 3. Důležité je pochopit, k čemu může být homogenita dobrá. Předpokládejme, že dokazujeme nerovnost $V(a, b, c) \geq 0$ pro všechna $a, b, c > 0$ (to bude později nejčastější případ), přičemž výraz V je homogenní. Vynásobení každé proměnné kladným číslem t vyjde nastejno jako vynásobení celé nerovnosti nějakým kladným číslem t^α, místo nerovnosti $V(a, b, c) \geq 0$ tak můžeme dokazovat ekvivalentní nerovnost $V(ta, tb, tc) = t^\alpha V(a, b, c) \geq 0$. Díky tomu lze bez újmy na obecnosti například předpokládat, že $a + b + c = 1$. Kdyby totiž bylo $a + b + c = k \neq 1$, přejdeme k novým číslům $a' = \frac{1}{k}a$, $b' = \frac{1}{k}b$, $c' = \frac{1}{k}c$, $a' + b' + c' = 1$ a budeme dokazovat ekvivalentní nerovnost $V(a', b', c') \geq 0$. Samozřejmě můžeme místo podmínky $a + b + c = 1$ předpokládat, že například $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ nebo že $a = 42$, případně $abc = 1$ a mohli bychom použít mnoho jiných podmínek, které by mohly být v konkrétním případě užitečné.

Příklad. Pro $a, b \geq 0$ a $s \geq r$ dokažte

$$(a^r + b^r)^{\frac{1}{r}} \geq (a^s + b^s)^{\frac{1}{s}}.$$

Řešení. Protože nerovnost je homogenní (stupně 1), můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že $a^r + b^r = 1$. Pak je jistě $1 \geq a, b \geq 0$, ovšem pro každé $1 \geq x \geq 0$ platí $x^r \geq x^s = x^r \cdot x^{s-r}$, takže i $1 = a^r + b^r \geq a^s + b^s$, odkud ihned plyne $1 \geq (a^s + b^s)^{\frac{1}{s}}$, což jsme chtěli dokázat. Snadno si rozmyslíš, že totéž lze provést pro libovolný počet proměnných.

Předešleme, že homogenní nerovnosti obvykle umíme dokazovat s větší úspěšností, a je proto někdy výhodné naopak umět nehomogenní nerovnost zhomogenizovat. Takového postupu využíváme v úlohách, kde je zadána podmínka tvaru $a + b + c = 1$, $abc = 1$ apod.

Příklad. Pro $a, b, c > 0$ splňující $abc = 1$ dokažte

$$(ab + bc + ca)(a + b + c) \geq 9.$$

Řešení. Levá strana je sice homogenní stupně 3, ovšem pravá strana je homogenní stupně 0, takže celá nerovnost homogenní není (výraz $(ab + bc + ca)(a + b + c) - 9$ totiž není homogenní).

Máme ale k dispozici podmínku $abc = 1$, jejíž levá strana je homogenní stupně 3, nabízí se tedy levou stranu nerovnosti vydělit jedničkou, čímž dostaneme

$$\frac{1}{abc}(ab + bc + ca)(a + b + c) = \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)(a + b + c) \geq 9,$$

což je homogenní nerovnost (stupně 0), kterou již umíme dokázat.

Samozřejmě se může stát, že homogenizace je o něco obtížnější a je potřeba k ní použít například homogenní výraz $\sqrt{abc}$ stupně $\frac{3}{2}$ a podobně.

AG nerovnost

Již ve cvičení z úvodní kapitoly jsme se setkali s nerovností $x + y \geq 2\sqrt{xy}$ platnou pro každé $x, y \in \mathbb{R}^+$. Nyní ji zapíšeme ve tvaru

$$\frac{x + y}{2} \geq \sqrt{xy}$$

a budeme se jí a jejími zobecněními zabývat mnohem podrobněji. Jistě tě nepřekvapí, že výraz na levé straně se nazývá aritmetický průměr čísel x, y (pro n čísel aritmetickým průměrem rozumíme $(x_1 + \cdots + x_n)/n$). Výraz na pravé straně se běžně nazývá geometrický průměr čísel x, y (pro n čísel geometrickým průměrem rozumíme $\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n}$). Vidíme, že aritmetický průměr je větší nebo roven geometrickému. Nabízí se otázka, jestli by toto tvrzení platilo i pro více proměnných.

Tvrzení. (AG nerovnost[5]) *Pro libovolná kladná čísla $x_1, \ldots, x_n$, $n \in \mathbb{N}$, platí*

$$\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n}.$$

Důkaz. Důkazů existuje celá řada[6], ale bohužel pro ten nejelegantnější ještě nemáme dostatek znalostí. Nerovnost dokážeme indukcí. Pro $n = 1$ dostáváme triviálně $x_1 \geq x_1$. Předpokládejme nyní, že pro každou n-tici tvrzení platí a dokážeme, že platí i pro $(n + 1)$-tici. Označme

$$L = \frac{x_1 + \cdots + x_{n+1}}{n + 1}.$$

Naším cílem bude přejít k n-tici, pro kterou můžeme použít indukční krok. Při použití indukčního kroku ovšem chceme dostat odhad pro L, je proto přirozené požadovat, aby zkonstruovaná n-tice měla aritmetický průměr rovněž L (stejný jako $(n+1)$-tice). Na pravé straně se nám potom objeví všechna čísla zkonstruované n-tice, takže je přirozené použít v n-tici co nejvíce čísel z původní $(n + 1)$-tice. Jako n-tici si proto zvolíme čísla $x_1, \ldots, x_{n-1}, x'_n$, kde x'_n zvolíme právě tak, aby

$$\frac{x_1 + \cdots + x_{n-1} + x'_n}{n} = L.$$

$$\Updownarrow$$

$$x'_n = \frac{n}{n + 1}(x_1 + \cdots + x_{n+1}) - (x_1 + \cdots + x_{n-1}) = x_n + x_{n+1} - L.$$

[5] Někdy se jí také říká nerovnost mezi aritmetickým a geometrickým průměrem.

[6] Mimochodem jeden velmi zajímavý vymyslel Cauchy. O Cauchym se více dozvíš v následující kapitole.

Pro tuto n-tici pak z indukčního kroku dostáváme odhad[7]

$$L^n \geq x_1 \cdots x_{n-1} x'_n \quad \Leftrightarrow \quad L^{n+1} \geq x_1 \cdots x_{n-1} x'_n L.$$

Naším přáním by tedy bylo, aby platila nerovnost $x'_n L = (x_n + x_{n+1} - L) \cdot L \geq x_n x_{n+1}$, protože pak bychom měli vyhráno. Ta je však ekvivalentní s nerovností $(x_{n+1} - L)(L - x_n) \geq 0$. Nyní si všimneme, že původní dokazovaná nerovnost je symetrická, takže můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že x_{n+1} je ze všech čísel největší, tj. $x_{n+1} \geq L$, a zároveň že x_n je ze všech nejmenší, tj. $x_n \leq L$. Nerovnost $(x_{n+1} - L)(L - x_n) \geq 0$ je pak splněna.

Podle poznámky pod čarou ještě potřebujeme ověřit, že jsme do AG nerovnosti nedosadili záporné číslo, ovšem $x'_n = x_n + x_{n+1} - L > x_{n+1} - L \geq 0$ a důkaz je u konce.

Podívejme se ale ještě, kdy nastává rovnost. V průběhu důkazu je vidět, že nastane tehdy a jen tehdy, když je nejmenší nebo největší číslo rovno L, což může nastat jen v případě, že $x_1 = \cdots = x_{n+1}$.

Poznámka. Platnost AG-nerovnosti lze také nahlédnout intuitivně. Stojíme-li před úkolem najít kladná čísla a a b se součtem 100 (třeba) o největším možném součinu, snadno si rozmyslíme, že „čím blíže jsou si čísla a a b, tím vyšší je jejich součin“. AG nerovnost pro n proměnných vlastně neříká nic jiného. Kdyby například platilo $x_1 > x_2$, mohli bychom k sobě tyto proměnné „přiblížit“ při zachování součtu, čímž bychom zvýšili jejich součin. Pravou stranu AG jsme zvětšili a levou zachovali. Vidíme tedy, že přibližováním proměnných si nerovnost „ztěžujeme“. Nejhorší možný případ tedy bude pro rovnost všech proměnných, tehdy ale v AG nastává rovnost, takže v ostatních „lehčích“ musí platit ta správná nerovnost.[8]

Kdo by měl rád zlomky?

Stejně jako ty nemáme zlomky vůbec rádi a tak většinou budeme AG nerovnost psát ve tvaru

$$x_1 + \cdots + x_n \geq n \sqrt[n]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n}.$$

Našemu bystrému zraku nemá šanci uniknout, že AG nerovnost je homogenní. Pojďme si ji ale už konečně ukázat na (zatím triviálním) příkladu.

Příklad. Pro $x, y, z \in \mathbb{R}^+$ dokažte

$$x^3 + y^3 + z^3 \geq 3xyz.$$

Řešení. Stačí užít AG nerovnost a ihned dostaneme $x^3 + y^3 + z^3 \geq 3\sqrt[3]{x^3 y^3 z^3} = 3xyz$ a rovnost nastává pro $x = y = z$.

Rozepíšeme-li pravou stranu jako součet $xyz + xyz + xyz$, můžeme se na AG nerovnost dívat jako na mašinku, která z homogenní levé strany „vyplivne“ homogenní pravou stranu, zachová počet sčítanců a „namíchá proměnné“. Kdybychom si člen x^3 představovali jako $x^3 y^0 z^0$, můžeme

---

[7]Všimni si, že teď právě děláme malý podvod. AG nerovnost máme právo použít jen pro kladná čísla, ale vůbec neověřujeme, jestli je nové číslo x'_n kladné. K tomu se vrátíme až na konci důkazu.

[8]Jistě sis všiml, že tento postup není úplně matematicky korektní, nicméně s trochou vysokoškolské matematiky se dá snadno přetvořit v bezchybný důkaz. To ale není pro náš seriál podstatné.

pozorovat jen to, co se děje s exponenty: trojice $(3,0,0)$, $(0,3,0)$, $(0,0,3)$ se po projetí AG mašinkou změní na $(1,1,1)$, $(1,1,1)$, $(1,1,1)$. Díky tomu budeme dále umět dobře odhadovat, jaké nerovnosti půjdou velmi snadno AG mašinkou dokázat.

Příklad. Pro $x, y \in \mathbb{R}^+$ dokažte

$$2x^3 + y^3 \geq 3x^2y.$$

Řešení. Stačí použít AG nerovnost, ovšem tentokrát nepatrně fikaněji. Kdybychom ji použili pro dvojici $2x^3$, y^3, dostaneme zcela jiný odhad. Ovšem na pravé straně vidíme trojku, chceme proto AG použít pro tři čísla, konkrétně pro x^3, x^3, y^3. Pak máme $2x^3 + y^3 \geq 3\sqrt[3]{x^6y^3} = 3x^2y$. Toto je zcela standardní postup. Stejný výsledek dostaneme, pokud v předchozím příkladě zvolíme $x = z$.

Rádi bychom ještě ukázali jednu zvláštnost AG nerovnosti. Občas umí řešit naprosto nehomogenní úlohy.

Příklad. Pro $x \in \mathbb{R}^+$ dokažte

$$x^2 + \frac{2}{x} \geq 3.$$

Řešení. Použijeme postup podobný předchozí úloze, tj. AG nerovnost pro trojici $x^2, 1/x, 1/x$ a dostaneme

$$x^2 + \frac{2}{x} \geq 3\sqrt[3]{\frac{x^2}{x \cdot x}} = 3.$$

Jak už to v životě chodí, nic se nelze naučit bez samostatné snahy, zkus si proto sám vyřešit následující cvičení. Věříme, že pro tebe budou velmi snadná. Snaž se přitom zároveň sledovat, co se děje s exponenty.

Cvičení. Pro kladná x, y, z dokažte

(i) $x^3 + 2 \geq 3x$,
(ii) $\frac{x^3}{yz} + y + z \geq 3x$,
(iii) $\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} \geq 3$,
(iv) $2(x+y+z)(x^2+y^2+z^2) \geq x^3 + y^3 + z^3 + 15xyz$,
(v) $x^3(x+2y) + y^3(y+2x) \geq 6x^2y^2$.

Sčítání AG nerovností

Velice užitečná technika je umět AG nerovnosti sčítat. Myšlenku si ukážeme hned na příkladě.

Příklad. Pro $x, y, z \in \mathbb{R}^+$ dokažte

$$x^3 + y^3 + z^3 \geq x^2y + y^2z + z^2x.$$

Řešení. Zkusme nerovnost vynásobit třemi:

$$3x^3 + 3y^3 + 3z^3 \geq 3x^2y + 3y^2z + 3z^2x.$$

Podle druhého příkladu platí $2x^3 + y^3 \geq 3x^2y$, analogicky $2y^3 + z^3 \geq y^2z$, $2z^3 + x^3 \geq z^2x$. Sečtením získáme dokazovanou nerovnost.

Jak ale na řešení přijít? Na levé i pravé straně máme tři sčítance, takže počet sčítanců sedí. Zabývejme se na chvíli jen otázkou, jak „namíchat“ aspoň nějaký násobek x^2y, když máme k dispozici neomezené množství výrazů x^3, y^3, z^3. Odpověď známe: x^3, x^3, y^3. Použijeme-li AG mašinku, dostáváme $x^3 + x^3 + y^3 \geq 3x^2y$, a proto nerovnost vynásobíme třemi.

AG nám tedy umí z trojice exponentů $(3,0,0)$, $(0,3,0)$, $(0,0,3)$ vyplivnout exponenty $(2,1,0)$, $(0,2,1)$, $(1,0,2)$. Co když je ale situace složitější?

Příklad. Pro kladná x, y, z dokažte

$$x^3y + y^3z + z^3x \geq x^2yz + y^2zx + z^2xy.$$

Řešení. Zkusíme tedy namíchat nějaký násobek x^2yz z (neomezeného množství) výrazů x^3y, y^3z, z^3x. Ovšem na první ani na druhý pohled není jasné, jak to udělat. Dobrá, vezměme tedy výraz x^3y přesně a-krát, výraz y^3z vezměme b-krát a výraz z^3x vezměme c-krát ($a, b, c \in \mathbb{N}_0$). Tím se nám na pravé straně objeví $(a+b+c)$-tá odmocnina a rozmysli si (dívej se na exponenty), že vlastně potřebujeme řešit následující soustavu[9].

$$\begin{aligned} 3a + 0b + 1c &= 2(a+b+c) \\ 1a + 3b + 0c &= 1(a+b+c) \\ 0a + 1b + 3c &= 1(a+b+c) \end{aligned}$$

První rovnici jsme dostali pozorováním exponentů x, druhou pozorováním y a třetí vznikla pro exponenty z. Řešením soustavy jsou například[10] čísla $a = 4$, $b = 1$, $c = 2$. Platí tedy $4x^3y + y^3z + 2z^3x \geq 7x^2yz$. Pokud původní nerovnost vynásobíme sedmi a sečteme tři AG nerovnosti (zbývající dvě získáme analogicky), dostaneme přesně dokazovanou nerovnost.

Cvičení. Pro kladná x, y, z dokažte

(i) $x^7 + y^7 + z^7 \geq x^5y^2 + y^5z^2 + z^5x^2$,

(ii) $x^4 + y^4 + z^4 \geq x^3y + y^3z + z^3y$,

(iii) $x^4y + y^4z + z^4x \geq x^2y^2z + y^2z^2x + z^2x^2y$,

(iv) $(x+y+z)^2 \geq 3(x\sqrt{yz} + y\sqrt{zx} + z\sqrt{xy})$.

Návod. Nemáte-li rádi odmocniny, zvolte substituci $x = a^2$, $y = b^2$, $z = c^2$.

(v) $\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq a + b + c$

(vi) $\frac{a^3}{b^2} + \frac{b^3}{c^2} + \frac{c^3}{a^2} \geq a + b + c$

(vii) $\frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{c} + \frac{c^3}{a} \geq ab + bc + ca$

Jak vidíme, AG nerovnost je velmi účinná zbraň na homogenní nerovnosti. Pochopitelně můžeme situaci začít komplikovat a dokazovat stále složitější nerovnosti.

---

[9] Všimni si, že soustava je homogenní, takže kdybys měl rád zlomky, můžeš klidně předpokládat, že $a + b + c = 1$. Pak již ale nebudou a, b, c přirozená.

[10] Soustava má sice nekonečně mnoho řešení, které jsou všechny násobky tohoto, ale pro naše účely stačí nalézt jediné celočíselné řešení. Můžeš si rozmyslet, že nezáleží na tom, které vezmeme.

Příklad. Pro kladná a, b, c splňující $abc = 1$ dokažte

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq a + b + c.$$

(Česká MO, 2003)

Řešení. Nerovnost se pokusíme zhomogenizovat, protože homogenní nerovnosti umí dobře řešit AG mašinka. Homogenizace je zde o něco obtížnější, potřebujeme výraz stupně -1, použijeme proto $(abc)^{-\frac{1}{3}} = 1$.

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq \frac{a}{(abc)^{\frac{1}{3}}} + \frac{b}{(abc)^{\frac{1}{3}}} + \frac{c}{(abc)^{\frac{1}{3}}}$$

Tuto nerovnost se pokusíme dokázat pro všechna $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ pomocí AG. Jistě odmocniny nemáte stejně jako my vůbec rádi, a tak provedeme substituci $a = u^3$, $b = v^3$, $c = w^3$, čímž dostaneme nerovnost

$$\frac{u^3}{v^3} + \frac{v^3}{w^3} + \frac{w^3}{u^3} \geq \frac{u^2}{vw} + \frac{v^2}{wu} + \frac{w^2}{uv},$$

která už je pro tebe určitě snadnou kořistí.

Vše není tak snadné

Určitě sis všiml, že v úlohách, kde je potřeba řešit soustavu rovnic, nemáme zaručeno, že soustava bude mít řešení. Navíc potřebujeme, aby řešením byla jen kladná čísla (do AG nerovnosti nelze kvůli odmocninám dosazovat záporná čísla). V takových případech bohužel nezbývá než přiznat, že AG nerovnost nelze přímočaře použít. Mezi další problémové nerovnosti patří například ta následující.

Cvičení. (Nekonečné) Pro kladná a, b, c zkuste pomocí AG řešit

$$a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \geq a^2b + a^2c + b^2a + b^2c + c^2a + c^2b.$$

Problémy dělá hlavně člen abc. Všimněme si, že AG mašinka vždy exponenty jaksi „dávala k sobě“, například z $(3, 0, 0)$ umí udělat $(2, 1, 0)$. Ovšem tady chceme některé exponenty dávat k sobě a jiné naopak dávat „od sebe“. Nerovnost ale přesto platí, je to přece (roznásobená) Schurova nerovnost pro $k = 1$.

Cauchyho nerovnost[11]

Augustin Cauchy (čteme *kóši*) (1789-1857) byl francouzský matematik, který značně přispěl k rozvoji vznikající disciplíny, které dnes říkáme matematická analýza. Ve své publikaci *Oeuvres*[12] z roku 1821 se zmiňuje o nerovnosti, která se později stane jedním ze základních pojmů celé vysokoškolské matematiky. Její využití však není svázané pouze s „vyšší“ matematikou. Jak uvidíte, Cauchyho nerovnost (občas ji budeme zkráceně nazývat CS) je jedním ze základních

[11] V literatuře se také používá název Cauchy-Schwarzova, či dokonce Cauchy-Schwarz-Buňakovského.

[12] V překladu „Umělecká díla“.

nástrojů při práci s nerovnostmi vůbec a pro ambiciózní řešitele MO je její znalost již nutností. Může se zdát na první pohled nepřehledná, ale její možnosti jsou netušené a stojí za to s ní strávit pár minut. Pokud by se ti nedařilo zapamatovat si, která strana CS je větší, pak pamatuj, že „*dvě závorky jsou víc než jedna*“.

Tvrzení. (Cauchyho nerovnost) *Nechť $n \in \mathbb{N}$. Dále buďte $u_1, u_2, \dots u_n \in \mathbb{R}$, $v_1, v_2, \dots v_n \in \mathbb{R}$. Pak platí*

$$(u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2)(v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2) \geq (u_1v_1 + u_2v_2 + \dots + u_nv_n)^2.$$

Důkaz. Uvažme kvadratickou rovnici v proměnné x:

$$(u_1x - v_1)^2 + (u_2x - v_2)^2 + \dots + (u_nx - v_n)^2 = 0.$$

Levá strana rovnice je evidentně nezáporná, a rovnice tak může mít nanejvýš jeden kořen. Speciálně musí mít nekladný diskriminant. Napišme si rovnici ve tvaru $Ax^2 + Bx + C$ a dopočtěme

$$\begin{aligned} A &= u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2, \\ B &= -2(u_1v_1 + u_2v_2 + \dots + u_nv_n), \\ C &= v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2. \end{aligned}$$

Nerovnost $B^2 - 4AC \leq 0$ si zapíšeme jako $AC \geq \left(\frac{B}{2}\right)^2$, dosadíme a máme

$$(u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2)(v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2) \geq (u_1v_1 + u_2v_2 + \dots u_nv_n)^2,$$

což je přesně Cauchyho nerovnost a jsme hotovi.

A co rovnost?

Rovnost nastane v případě, že diskriminant původní rovnice je 0. Tedy pokud se podaří najít takové x, které vynuluje všechny závorky na levé straně. Chceme tedy, aby

$$x = \frac{v_1}{u_1} = \frac{v_2}{u_2} = \dots = \frac{v_n}{u_n}.$$

Snadno si rozmyslíš, že požadavek, který klademe na n-tice $u_1, u_2, \dots, u_n$ a $v_1, v_2, \dots, v_n$ se dá shrnout i následovně: Rovnost v Cauchyho nerovnosti nastane tehdy a jen tehdy, když existuje $\lambda \neq 0$ takové, že

$$u_1 = \lambda v_1,\ u_2 = \lambda v_2,\ \dots\ ,\ u_n = \lambda v_n.$$

Cvičení. Buď ABC trojúhelník o stranách a, b, c a KLM trojúhelník o stranách k, l, m. Ukažte, že

$$(a^2 + b^2 + c^2)(k^2 + l^2 + m^2) = (ak + bl + cm)^2,$$

právě když $\triangle ABC \sim \triangle KLM$.

Jde to i jinak?

Předchozí důkaz byl velmi trikový a na něco takového je velice těžké přijít. Nabízíme proto ještě jeden, v němž přímočaře využijeme, co jsme se již naučili.

Důkaz. Všimneme si, že dokazovaná nerovnost je v proměnných $u_1, u_2, \ldots, u_n$ homogenní. Můžeme tedy BÚNO předpokládat, že platí $u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2 = 1$. Nerovnost přejde do tvaru

$$(v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2) \geq (u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n)^2.$$

Ovšem tato nerovnost je stále ještě homogenní, tentokrát ale v proměnných $v_1, v_2, \ldots v_n$. Opět BÚNO zvolme $v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2 = 1$. Nyní tedy za učiněných předpokladů o proměnných u_i a v_i, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ chceme dokázat, že

$$(u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n)^2 \leq 1.$$

Předchozí nerovnost bude dokázaná, pokud ukážeme, že umocňovaný součet na levé straně leží mezi čísly -1 a 1.

Zcela zřejmě platí $u_iv_i \leq \frac{1}{2}u_i^2 + \frac{1}{2}v_i^2$ pro každé $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Pokud všechny tyto nerovnosti sečteme, získáme

$$u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n \leq \frac{1}{2}\left(u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2\right) + \frac{1}{2}\left(v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2\right) = 1.$$

Jeden z potřebných odhadů je tedy hotov a druhý dokážeme obdobně za využití

$$u_iv_i \geq -\left(\frac{1}{2}u_i^2 + \frac{1}{2}v_i^2\right).$$

Bližší seznámení

Zkusme si nyní do CS něco dosadit, abychom získali představu, jaké druhy nerovností nám může dát. Volme například $n = 3$, $u_1 = a, u_2 = b, u_3 = c$ a $v_1 = 1/a, v_2 = 1/b, v_3 = 1/c$. Dostaneme nerovnost

$$\left(a^2 + b^2 + c^2\right)\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) \geq 9.$$

Všimni si, že bychom nyní mohli substituovat $x = a^2$, $y = b^2$, $z = c^2$ a získat tak nerovnost

$$(x + y + z)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \geq 9 \quad \text{pro } x, y, z > 0,$$

kterou jsme již ukazovali. Tuto nerovnost jsme mohli z Cauchyho nerovnosti dostat přímo volbou $u_1 = \sqrt{a}$, $u_2 = \sqrt{b}$, $u_3 = \sqrt{c}$ a $v_1 = 1/\sqrt{a}$, $v_2 = 1/\sqrt{b}$, $v_3 = 1/\sqrt{c}$. Takovou volbu lze samozřejmě udělat jen pro $a, b, c > 0$. Pro Cauchyho nerovnost je dokonce typické, že ač platí pro jakákoliv reálná čísla, nerovnosti, jež s její pomocí odvodíme, platí jen pro čísla kladná.

Cvičení. Zkuste nyní pomocí vhodné volby proměnných v CS dokázat následující nerovnosti pro kladná čísla a_i, b_i, $i = 1, \ldots, n \in \mathbb{N}$.

(i) $(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right) \geq n^2$

(ii) $(a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n)\left(\frac{b_1}{a_1} + \frac{b_2}{a_2} + \cdots + \frac{b_n}{a_n}\right) \geq (b_1 + b_2 + \cdots + b_n)^2$

(iii) $n(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2) \geq (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2$

Návod. V příkladu (iii) si rozepište n jako součet jedniček.

Cvičení. Pomocí CS dokažte pro $x, y, z \in \mathbb{R}^+$

(i) $\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+y} + \frac{1}{1+z} \geq \frac{9}{3+x+y+z}$

(ii) $14(x^2 + y^2 + z^2) \geq (x + 2y + 3z)^2$

(iii) $\sqrt{x+1} + \sqrt{2x-3} + \sqrt{50-3x} \leq 12$

Návod. V příkladu (iii) použijte výsledek příkladu (iii) z minulého cvičení.

Pryč se zlomky!

Nyní nadešel čas, abychom odhalili, v čem tkví síla CS. Z předchozích kapitol již tušíš, že většinou jsou těžké ty nerovnosti, v nichž se vyskytují zlomky. No a CS je pro takové nerovnosti jako stvořená. Nejprve si na příkladě ukážeme, jak to funguje.

Příklad. Dokažte pro $x, y, z \in \mathbb{R}^+$ nerovnost

$$\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{y+x} \geq \frac{x+y+z}{2}.$$

Řešení. Napíšeme si následující CS (teď už bys měl vidět, jak přesně CS používáme, pokud ne, ještě jednou si projdi předchozí cvičení)

$$\left(\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{y+x}\right)\Big((y+z)+(z+x)+(x+y)\Big) \geq (x+y+z)^2$$

a vidíme, že druhá závorka na levé straně je rovna $2(x+y+z)$ a můžeme tedy krátit s pravou stranou. Po vykrácení a vydělení dvěma dostaneme přímo dokazovanou nerovnost.

Tento příklad byl sice Cauchyho nerovnosti ušit na míru, nicméně dává tušit, že CS a zlomky jdou dobře dohromady.

Jak to přesně funguje?

Než popíšeme základní princip používání CS, bude užitečné uvést si ještě jeden její tvar.

Tvrzení. (CS zlomkobijec) *Nechť $n \in \mathbb{N}$. Dále buďte $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^+$, $b_1, b_2, \ldots, b_n \in \mathbb{R}^+$. Pak platí*

$$\left(\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \cdots + \frac{a_n}{b_n}\right) \geq \frac{(\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2} + \cdots + \sqrt{a_n})^2}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}.$$

Cvičení. (Lehké) Ověřte, že předchozí tvrzení je skutečně důsledkem CS.

Představme si, že dokazujeme nerovnost, v níž levá strana je ve tvaru součtu tří zlomků:

$$L = \frac{A_1}{B_1} + \frac{A_2}{B_2} + \frac{A_3}{B_3} \geq P.$$

Pak podle CS *zlomkobijce* platí

$$L \geq \frac{(\sqrt{A_1} + \sqrt{A_2} + \sqrt{A_3})^2}{B_1 + B_2 + B_3}.$$

Stačilo by tedy dokázat, že onen roztodivný výraz z předchozího řádku je větší nebo roven pravé straně dokazované nerovnosti. Zdá se, že jsme si mnoho nepomohli, ale zpravidla bývá takováto nerovnost o poznání snazší a její vyřešení je jen snadným procvičením AG.

Dobrá a špatná zpráva

V předchozím odstavci jsme popsali, jak od dokazování těžké nerovnosti se zlomky můžeme přejít k dokazování lehké nerovnosti beze zlomků. Ovšem než začneme tento postup používat na příkladech, máme tu jednu dobrou a jednu špatnou zprávu.

Začněme tou špatnou. Ona lehčí nerovnost, na níž tu původní převedeme, nemusí platit. Nikdo nám nezaručuje, že odhad provedený pomocí CS zlomkobijce se opravdu vklíní mezi levou a pravou stranu dokazované nerovnosti. Tento jev je bohužel velmi běžný, proto se na něj raději psychicky připravme.

Máš-li chuť v tuto chvíli trhat stránky tohoto seriálu, zadrž! Situace není zdaleka tak zoufalá, jak se zdá. Je tu ještě ona dobrá zpráva, kterou jsme slíbili. Čti pozorně. Jak už víme, CS zlomkobijec vezme nerovnost se zlomky a místo ní nám dá nerovnost bez nich, která stačí k důkazu té původní. My ale můžeme ještě předtím než zlomkobijce na naší nerovnost vypustíme, její tvar trochu pozměnit. Například zlomky libovolně rozšíříme (ano, i tak banální úprava stačí!). No a vtip je v tom, že pokaždé, když zlomky na levé straně upravíme, dostaneme od zlomkobijce k důkazu jinou nerovnost. Situace se obrací. Ještě před chvílí to vypadalo tak, že dostaneme dokázat nerovnost, která ještě k tomu nejspíš neplatí, nyní se ale zdá, že dostaneme na výběr z bezpočtu nerovností, z nichž nám stačí dokázat jedinou! Jak už to bývá, pravda je někde uprostřed. Většinou máme na výběr několik nerovností (ne všechna rozšíření jsou „rozumná“), které můžeme dokazovat, přičemž tou dobrou zprávou je, že zpravidla alespoň jedna z nich platí. A bývá to ta od pohledu nejsympatičtější, ale to už si ukážeme na příkladu.

Konečně příklad

Příklad. Dokažte pro $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ nerovnost

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

Řešení. Zkusme nejprve použít CS zlomkobijce tupě na tento tvar. Získáme

$$L \geq \frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})^2}{2(a+b+c)}.$$

Nyní bychom chtěli dokázat, že

$$\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})^2}{2(a+b+c)} \geq \frac{3}{2}.$$

Ovšem po pár řádcích ekvivalentních (!) úprav (zkuste si) přejde nerovnost do tvaru

$$\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca} \geq a+b+c$$

a o této nerovnosti již z předchozích kapitol víme, že neplatí (dokonce platí opačná nerovnost)! První pokus nám nevyšel. Zkusme tedy, než zlomkobijce opět vypustíme, rozšířit každý ze zlomků tak, abychom si v čitatelích vytvořili druhé mocniny:

$$\frac{a^2}{ab+ac} + \frac{b^2}{bc+ba} + \frac{c^2}{ac+bc} \geq \frac{3}{2}.$$

Druhé mocniny v čitatelích se nám náramně hodí, neb nás to později zbaví odmocnin, o nichž každý slušný matematik ví, že jsou ošklivé. Vypusťme zlomkobijce!

$$L \geq \frac{(a+b+c)^2}{2(ab+bc+ca)}$$

Nerovnost, kterou máme nyní dokázat se velmi rychle ukáže ekvivalentní nerovnosti

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca,$$

o níž víme, že platí. Dokázali jsme tedy

$$L \geq \frac{(a+b+c)^2}{2(ab+bc+ca)} \geq \frac{3}{2}$$

a jsme hotovi!

A teď vy!

Teď konečně můžeme sezobat plody naší práce a pomocí CS zlomkobijce snadno dokázat nerovnosti, které pro nás byly ještě před chvílí naprosto neřešitelné. Jak uvidíš, jedná se o nerovnosti převzaté z prestižních matematických soutěží. Malé připomenutí na závěr: Dobré rozšíření se pozná tak, že nevyrobí žádné odmocniny.

Cvičení. Buďte a, b, c, d kladná čísla splňující $a + b + c + d = 1$. Ukažte, že platí

$$\frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} + \frac{c^2}{c+d} + \frac{d^2}{d+a} \geq \frac{1}{2}.$$

(Irská MO)

Cvičení. Pro kladná čísla a, b, c dokažte nerovnost

$$\frac{a}{b+2c} + \frac{b}{c+2a} + \frac{c}{a+2b} \geq 1.$$

(Česko-slovensko-polské střetnutí)

Cvičení. Nechť a, b, c jsou kladná čísla a jejich součin je roven jedné. Dokažte

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(a+c)} + \frac{1}{c^3(b+a)} \geq \frac{3}{2}.$$

(IMO 1995)

Cvičení. Dokažte, že pro jakákoliv kladná čísla a, b, c platí

$$\frac{a^3}{a^2+ab+b^2} + \frac{b^3}{b^2+bc+c^2} + \frac{c^3}{c^2+ca+a^2} \geq \frac{a+b+c}{3}.$$

(Turnaj měst 1998)

Návod. Zkuste si jen tak pro zábavu roznásobit $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)$.

Úlohy k zamyšlení

Zdají-li se ti všechna cvičení z našeho seriálu lehká a příklady z 1. seriálové série už máš vyřešené, připravili jsme pro tebe pár ostřejších kousků. Pokud objevíš řešení, které použitou teorií nepřesahuje tento díl seriálu a napíšeš ho na chat[13] jako první, čeká tě krom slávy a obdivu i čokoláda v příští obálce. :)

Příklad. Pro kladná čísla a, b, c dokažte nerovnost

$$(a-b)^2(a+b-c)+(b-c)^2(b+c-a)+(c-a)^2(c+a-b) \geq 0$$

a vyvoďte z ní nerovnost

$$a^4+b^4+c^4+abc(a+b+c) \geq 2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2).$$

Příklad. Buďte $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ taková, že $abc = 1$. Dokažte

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{a^5+b^2+c^2}+\frac{a^2+b^2+c^2}{a^2+b^5+c^2}+\frac{a^2+b^2+c^2}{a^2+b^2+c^5} \leq 3.$$

Příklad. Ukažte, že pro $x, y, z \geq 1$ platí

$$\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-1} \leq \sqrt{x(yz+1)}.$$

Seriál – Nerovnosti, díl II

V tomto díle si vybudujeme rozsáhlý arzenál důkazových metod na práci s nerovnostmi všeho druhu. Krom toho se naučíme dvě nové známé nerovnosti, které nám poskytnou do světa nerovností ten správný vhled. Přestože je studijní text vcelku dlouhý, věříme, že ho zhltnete téměř jedním dechem, neboť myšlenkové úvahy jsou v tomto díle zcela prostinké a dozajista si je osvojíte hned po prvním přečtení. Tak tedy dost povídání, dejme se do práce!

Ztrátové a bezztrátové metody

Nyní, když se chystáme dokazovat těžší nerovnosti, je dobré si jednu věc pořádně rozmyslet. Náš postup bude obecně vypadat tak, že dokazovanou nerovnost budeme pomocí různých metod převádět na nerovnosti jednodušší, až se objeví nějaká, co půjde snadno dokázat. Metody, které budeme k tomuto používat, se dělí do dvou skupin. V první skupině jsou ty metody, které budeme nazývat *bezztrátové*. Ty dokazovanou nerovnost převedou na nerovnost jinou, která je ovšem **ekvivalentní** té původní. Sem patří například různé substituce či třeba ekvivalentní úpravy. Metodami z druhé skupiny, říkejme jim *ztrátové*, též dokazovanou nerovnost převedeme na jinou nerovnost, ale již ne ekvivalentně. To znamená, že o této nové nerovností s jistotou nevíme, že platí. S tímto jsme se již setkali při používání CS zlomkobijce.

Ideální by bylo, kdybychom uměli každou nerovnost řešit jen postupným používáním bezztrátových metod. Prostě bychom ekvivalentně převedli nerovnost těžkou na nerovnost jednoduchou. Takhle nudný ovšem svět nerovností není! Většinou totiž platí, že ztrátové metody, kterých je většina (jsou to vlastně všechny odhady, které učiníme), zjednodušují nerovnost o dost více než metody bezztrátové, obě metody je tedy třeba vhodně kombinovat.

[13] `http://mks.mff.cuni.cz/chat.php`

Cvičení. (Důležité!) Rozmyslete si, že přechod od homogenní nerovnosti k nerovnosti s podmínkou (např. $a+b+c=1$) je bezztrátový. Opačný přechod od nerovnosti s podmínkou k homogenní nerovnosti bez podmínky je rovněž bezztrátový!

Návod. Ukažte, že pokud existuje trojice, pro niž neplatí jedna z nerovností, pak lze najít i trojici, pro niž neplatí druhá.

Cyklický zápis výrazů

Protože nerovnosti jsou někdy náročné nejen na kombinaci používaných metod, ale i na algebraické úpravy, mohlo by se poměrně snadno stát, že bychom se při úpravách zbláznili. Zkusili jste někdy roznásobit nerovnost obsahující zlomky, nebo roznásobit dvě závorky, z nichž každá má devět členů? Aby nám k takovým šílenostem nechyběla odvaha, zavedeme si zkrácený zápis, tzv. cyklickou sumu $\sum_{\text{cyc}}$. Jelikož většina výrazů, se kterými pracujeme, jsou (alespoň) cyklické, stačí místo velkého množství výrazů zapsat jen vybrané, a pokud všechny ostatní lze z vybraných získat cyklickou záměnou proměnných, je snadné si domyslet celý výraz.

V následujících příkladech uvažujme výrazy ve třech proměnných a, b, c.

Příklad. Ukážeme několik zápisů pomocí cyklické sumy.

(i) $\sum_{\text{cyc}} a = a+b+c$,
(ii) $\sum_{\text{cyc}} a^2b = a^2b+b^2c+c^2a$,
(iii) $9\sum_{\text{cyc}} a\sqrt{a+bc} = 9(a\sqrt{a+bc}+b\sqrt{b+ca}+c\sqrt{c+ab})$.

Zápis pomocí cyklické sumy tedy funguje tak, že přestože zapíšeme jen jeden výraz, máme na mysli součet **všech** výrazů, které vzniknou cyklickou záměnou proměnných (sčítanců je tolik, kolik je proměnných). Doporučujeme si cyklický zápis velmi dobře osvojit a naučit se s ním počítat.

Těžké zbraně na lehké nerovnosti

V této kapitole si na příkladech ukážeme několik nových postupů (převážně bezztrátových), jejichž znalost nám spolehlivě umožní řešit jednoduché nerovnosti, například nerovnosti dvou proměnných či nerovnosti nízkých stupňů. Přestože půjde často o postupy, při nichž je potřeba i trochu počítat, je opravdu nutné, abyste si tyto techniky osvojili a nabyli dojmu, že některé nerovnosti jsou již z principu snadno řešitelné. Až budeme řešit nějakou opravdu těžkou nerovnost a po tuhém boji se nám ji podaří převést například na symetrickou nerovnost dvou proměnných nízkého stupně, je nutné umět práci dokončit.

Lineární nerovnosti

Příklad. Jsou dána čísla a, b, c z intervalu $\langle 0, 1\rangle$. Ukažte nerovnosti

$$6 \geq 3abc + 4(1-a)(1-b)(1-c) + a + b + c \geq 1.$$

(PraSe, 28-7-6)

Řešení. Tuto nerovnost lze zcela jistě dokázat mnoha různými způsoby. Jeden mezi nimi ovšem vyniká jako zdaleka nejjednodušší a na rozdíl od ostatních postupů použitelný i v případě různých obměn (např. změny konstant) této úlohy.

Budeme se snažit ukázat, že zadaný výraz (označme si ho $V(a,b,c)$) nabývá svých extrémů pro krajní volby proměnných a,b,c, tj. pro $a,b,c \in \{0,1\}$. Zvolme si tedy b,c pevně a hledejme pro jakou hodnotu proměnné a může výraz nabýt svého minima či maxima.

Klíčové pozorování je, že zadaný výraz je v proměnné a lineární! Skutečně, neboť když ho roznásobíme, pak zcela jistě půjde zapsat ve tvaru

$$V(a,b,c) = T(b,c) \cdot a + U(b,c),$$

kde T a U jsou nějaké výrazy složené z b,c, jejichž přesná podoba nás ani moc nezajímá. Díváme-li se ale na výraz $V(a,b,c)$ pro pevná b,c, je $V(a) = T \cdot a + U$ přesně tvar lineární funkce! No a o lineární funkci víme, že na uzavřeném intervalu nabývá svých extrémů v krajních bodech (grafem je úsečka). Pro pevná b a c bude tedy výraz nabývat extrémů při volbách $a = 0$ nebo $a = 1$.

Co jsme tedy vlastně ukázali? No co kdyby aspoň jedna z neznámých, řekněme b, byla různá od 0 a 1? Bylo by pak možné, aby výraz nabýval extrému pro takovou trojici? Nebylo, neboť bychom mohli zbylé dvě proměnné zafixovat a podle předchozí úvahy bychom viděli, že jedině volbou $b = 0$ či $b = 1$ dosáhneme při daných hodnotách a,c extrému (nebo máme vodorovnou úsečku, ale pak též stačí ověřit hodnoty v krajních bodech). Pro trojici, která nabývá extrémních hodnot tedy opravdu musí platit $a,b,c \in \{0,1\}$! Zbývá těchto osm trojic dosadit a pohodlně určit, že minimum je skutečně 1 a maximum 6.

Celé předchozí řešení se dá vlastně zkrátit do jedné věty: *Jelikož je výraz v každé proměnné lineární, může nabývat extrému pouze v případě krajních voleb všech tří proměnných.* Pokud jste předchozí úvaze dobře porozuměli, musíte uznat, že úloha je už od pohledu nezajímavá, neboť se jedná jen o určování extrému lineární funkce.

Cvičení. Nalezněte minimum a maximum výrazu

$$a(1-b) + b(1-c) + c(1-a),$$

v němž a,b,c jsou z intervalu $\langle 0,1 \rangle$.

Cvičení. Pro $x,y \in \mathbb{R}$ a $z \in \langle -2,2 \rangle$ ukažte nerovnost

$$x^2 + y^2 \geq xyz.$$

Návod. Díky linearitě v proměnné z stačí rozebrat případy $z = \pm 2$.

Kvadratické nerovnosti

Příklad. Dokažte pro $x,y \in \mathbb{R}$

$$x^2 + y^2 + 1 \geq xy + x + y.$$

Řešení. (Trikové a pěkné) Nerovnost vynásobíme dvěma a upravíme na součet čtverců

$$(x-y)^2 + (x-1)^2 + (y-1)^2 \geq 0.$$

Hotovo.

Jak ale na něco takového přijít? A vůbec odkud se vzal ten trik s násobením dvěma? Ano, rozkládání na součet čtverců je velmi pěkná metoda dokazování nerovností, ale často není vůbec jasné, jak v úpravách postupovat. Vězte, že násobení dvěma používáme jen k tomu, aby byl rozklad lépe vidět (například člen $2xy$ jistě popožene naši intuici více než člen xy). Jak poté dokončit rozklad napovídají členy $2xy$, $2x$, $2y$ na pravé straně. Pokud si na rozkládání stále nevěříte, potěší vás, že existuje i jiná metoda.

Řešení. (Přímočaré, méně pěkné) Na nerovnost se na chvíli podíváme jako na nerovnici v proměnné x s parametrem y. Kdybychom tedy tuto nerovnici řešili, mělo by nám vyjít, že platí pro každé x bez ohledu na hodnotu parametru y. To ale jinými slovy říká, že pro každé y má diskriminant onoho kvadratického výrazu být nekladný (parabola je celá nad osou). To ale můžeme snadno ověřit

$$x^2 - x(y+1) + y^2 - y + 1 \geq 0$$
$$\Updownarrow$$
$$D = (y+1)^2 - 4(y^2 - y + 1) \leq 0.$$

Poslední nerovnost je již ekvivalentní $-3 \cdot (y-1)^2 \leq 0$, takže diskriminant je opravdu pro každou hodnotu y nekladný a vidíme, že dokazovaná nerovnost platí.

Navíc jsme zjistili, že $y = 1$ je pro danou nerovnost jediná kritická hodnota. Je tedy rozumné očekávat, že v rozkladu na součet čtverců se vyskytne člen $(y-1)^2$. Případů, v nichž výpočet diskriminantu napoví, jak sestavit rozklad na součet čtverců, je bezpočet.

Povězme si něco více o tom, jak tato metoda funguje. V předchozím odstavci jsme zjistili, že je-li nerovnost v nějaké proměnné lineární, stačí nám zkoumat pouze její krajní hodnoty. Tedy vlastně přejít (bezztrátově!) ke dvěma nerovnostem o méně proměnných. Něco podobného se děje i tu. Jen bychom si měli rozmyslet, zda je tento postup též bezztrátový. Je tomu tak, pokud dokazovaná nerovnost má platit pro **všechna** reálná čísla. Pak totiž opravdu požadujeme, aby bez ohledu na hodnotu parametrů, byla příslušná parabola vždy nezáporná. Problém může nastat pokud máme například ukázat nerovnost pouze pro kladná a, b, c. Mohlo by se totiž stát, že třeba pro $a = b = 1$ a $c = -1$ nerovnost neplatí. Pokud bychom tedy zrovna počítali diskriminant vzhledem k c, mohl by nám vyjít kladný a pořád by to neznamenalo, že původní nerovnost neplatí. Nicméně i v těchto případech je přechod k diskriminantu metoda nadějná a často se stává, že byť máme za úkol dokazovat nerovnost pouze pro kladná čísla, tak platí i pro čísla záporná.

Cvičení. Zkuste si dokázat oběma metodami (výpočtem diskriminantu, rozkladem na součet čtverců). Pro $x, y \in \mathbb{R}$ ukažte

(i) $x^2 + y^2 + 2y + 4 \geq xy + 2x$,
(ii) $2x^2 + 2y^2 + 1 \geq x + y + 2xy$,
(iii) $(x+y)^2 + 1 \geq 2(x+y)$.

Cvičení. Rozmyslete si, že pokud dokazujeme nerovnost

$$x^2 + A(y,z)x + B(y,z) \geq 0 \qquad \text{pro } x \in \mathbb{R}^+,$$

v níž $A(y,z)$ a $B(y,z)$ jsou nějaké výrazy v proměnných y, z, výpočtem diskriminantu a zároveň víme, že výraz $A(y,z)$ nabývá pouze záporných hodnot, je náš postup bezztrátový.

Návod. Ukažte, že pro daná y, z má kvadratický trojčlen vždy minimum pro kladné x.

Cvičení. (Vydatné) Pro a, b, c kladná čísla dokažte

$$a^2b^2c^2 + a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 + a^2 + 2 \geq 2ab + 2bc + 2ca.$$

Návod. Zkuste si rozmyslet, že pokud nerovnost platí pro všechna kladná čísla, pak platí už pro úplně všechna čísla. Při sestavování diskriminantu skládejte, co můžete, v součin. Až úlohu takto vyřešíte, zkuste ji vyřešit i rozkladem na součet čtverců.

Poznámka. Toto cvičení zároveň řeší třetí *úlohu k přemýšlení* z minulého dílu. Tento tvar získáte po substituci $a = \sqrt{x-1}$, $b = \sqrt{y-1}$, $c = \sqrt{z-1}$. Z výše uvedeného by mělo být jasné, proč je tato substituce výhodná.

Nerovnosti jedné proměnné

Velmi často se nám bude při řešení stávat, že poslední krok v našem postupu bude důkaz nerovnosti jedné proměnné. Pojďme si o nich tedy něco říci. Na takovéto nerovnosti máme dvě základní zbraně: AG nerovnost a rozklad na součin.

Příklad. Pro $x \in \mathbb{R}^+$ ukažte

$$8x^3 + x^2 - 8x + 3 \geq 0.$$

Řešení. Nerovnost získáme sečtením AG nerovností

$$x^2 + 1 \geq 2x, \qquad 8x^3 + 1 + 1 \geq 3 \cdot 2x.$$

Toto řešení sice nevypadá moc přirozeně, ale jeho jedinou myšlenkou je pomocí členů u nichž je kladný koeficient odhadnout členy u nichž je koeficient záporný. Při použití AG nerovnosti pro tři prvky je podstatné, že x je kladné číslo. Pokud by x bylo pouze reálné, druhý odhad bychom použít nemohli (pozor na to!), a nerovnost by dokonce neplatila, zkus $x = -10$.

Příklad. Pro $x \in \mathbb{R}$ ukažte

$$x^4 - x^2 - 2x + 2 \geq 0.$$

Řešení. Polynom rozložíme na součin

$$x^4 - x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2 \cdot (x^2 + 2x + 2) = (x-1)^2 \cdot \big((x+1)^2 + 1\big) \geq 0.$$

A důkaz je hotov.

I toto řešení jistě vyžaduje komentář. Ve skutečnosti jsme postupovali takto. Všimli jsme si, že pro $x = 1$ nastává rovnost. To bude mimochodem velmi typický případ. Jednička je tedy kořen polynomu a člen $(x-1)$ z něj musí jít vytknout.[14] Při vytýkání je naší jedinou strategií rozdělit výraz na menší skupinky tak, abychom člen $(x-1)$ uměli vytknout z každé z nich. Pišme tedy

$$\begin{aligned} x^4 - x^2 - 2x + 2 &= (x^4 - x^2) - (2x - 2) = \\ &= (x-1) \cdot (x^3 + x) - 2(x-1) = \\ &= (x-1) \cdot (x^3 + x - 2). \end{aligned}$$

[14] Pokud se v polynomech vůbec neorientuješ, zkus si přečíst náš krátký studijní text na `https://mks.mff.cuni.cz/archive/28/3.pdf`.

Nyní vidíme, že pro $x = 1$ je i poslední závorka nulová. Vytýkejme[15] $(x-1)$ znovu

$$(x-1) \cdot (x^3 + x - 2) = (x-1) \cdot \big((x^3 - 1) + (x-1)\big) = (x-1)^2 \cdot (x^2 + 2x + 2).$$

Nyní zbývá ukázat, že $x^2 + 2x + 2 \geq 0$ pro každé $x \in \mathbb{R}$, což nečiní žádný problém.

Poznámka. (O dvojném kořenu – důležitá!) Na tento výsledek se budeme často odvolávat, a tak doporučujeme jej důkladně vstřebat. Představme si, že dokazujeme $P(x) \geq 0$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$ pro nějaký polynom $P(x)$. Odhalíme, že lze vytknout třeba $(x-5)$, a píšeme $P(x) = (x - 5)Q(x)$, kde $Q(x)$ je opět nějaký polynom. Všimneme si, že člen $(x-5)$ mění v bodě 5 své znaménko. Znaménko celého součinu má být ale stále kladné, proto i polynom $Q(x)$ musí v bodě 5 měnit znaménko. To ale neznamená nic jiného, než že číslo 5 je kořenem polynomu $Q(x)$ a že i z něj lze vytknout $(x-5)$. Touto jednoduchou úvahou jsme odvodili, že pokud v nějakém bodě platí rovnost, chceme příslušný kořenový činitel vytknout hned ve druhé mocnině! Pokud by to nešlo, nemohla by dokazovaná nerovnost platit. Samozřejmě pokud onu nerovnost dokazujeme jen pro $x \in \mathbb{R}^+$, pak nás zajímají pouze ty případy rovnosti, v nichž je x kladné.

Cvičení. Pro $x \in \mathbb{R}^+$ dokažte

(i) $x^4 + x^3 - 4x^2 + x + 1 \geq 0$,
(ii) $x^5 - 2x^4 + x^3 + x^2 - 2x + 1 \geq 0$,
(iii) $x^5 - 2x^4 + 2x^3 - x^2 - x + 1 \geq 0$.

Cvičení. Pro $x \in \mathbb{R}$ dokažte

(i) $x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1 \geq 0$,
(ii) $x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 3x + 1 \geq 0$,
(iii) $x^6 - 4x^5 + 8x^4 - 10x^3 + 8x^2 - 4x + 1 \geq 0$.

Nerovnosti dvou proměnných

Pro nerovnosti dvou proměnných můžeme krom obvyklých postupů použít i dvě nové techniky. Jedna z nich se hodí pro nerovnosti homogenní a druhá pro symetrické.

Příklad. Pro $a, b > 0$ ukažte

$$a^4 + 2b^4 \geq a^2b^2 + 2ab^3.$$

Řešení. Nerovnost je homogenní, zvolme tedy $b = 1$. Podle příkladu z předchozího odstavce víme, že

$$a^4 - a^2 - 2a + 2 = (a-1)^2 \cdot \big((a+1)^2 + 1\big) \geq 0.$$

A nerovnost je dokázaná.

Vidíme tedy, že homogenní nerovnosti dvou proměnných lze (bezztrátově) převádět na nerovnosti jedné proměnné, které již pohodlně umíme řešit.

Cvičení. Ukažte, že z každé platné homogenní nerovnosti v proměnných a, b, v níž rovnost nastává pro $a = b$, lze vytknout člen $(a-b)^2$.

Příklad. Pro kladná čísla a, b ukažte nerovnost

$$a^2(a+1) + b^2(b+1) + 1 \geq 5ab.$$

[15] Pokud nemáš rád vytýkání, lze použít i dělení polynomu polynomem. Nevíš-li oč jde, zeptej se ve škole. Budeme ovšem radši, pokud se ti podaří odkoukat, jak se vytýká, není to nic těžkého.

Řešení. Všimneme si, že nerovnost je symetrická. Zvolíme substituci $s = a + b$, $p = ab$ a dokazovanou nerovnost přepíšeme do nových proměnných s a p

$$(a^3 + b^3) + (a^2 + b^2) + 1 \geq 5ab$$
$$\Updownarrow$$
$$s(s^2 - 3p) + (s^2 - 2p) + 1 \geq 5p.$$

Všimneme si, že nerovnost je v proměnné p lineární, stačí ji tedy ověřit pro krajní hodnoty p. Pro pevnou hodnotu s se p pohybuje v intervalu $(0, \frac{s^2}{4}\rangle$. Krom nezápornosti čísel a, b jsme využili odhad $(a+b)^2 \geq 4ab$. V případě $p = 0$ je jedno z čísel a, b nulové, což ze zadání nelze (ale mimochodem nerovnost rovněž triviálně platí). V případě $4p = s^2$ je nerovnost (jedné proměnné) ekvivalentní nerovnosti $(s+1)(s-2)^2 \geq 0$. Důkaz je hotov.

Ano, tušíš správně, že představovanou metodou je *symetrická substituce*, tedy substituce $s = x+y$ (s z anglického *sum*), $p = xy$ (p z anglického *product*). Po převedení do proměnných p a s jsme využili toho, že nerovnost byla v proměnné p lineární, to se ovšem nemusí stát vždy. Postup je schůdný i v případě, že nerovnost je v p kvadratická. V tom případě můžeme buď sáhnout po výpočtu diskriminantu či například zkusit ukázat, že ona kvadratická funkce je v intervalu vymezeném pro p rostoucí. Pak by opět bylo jasné, kde nabývá extrému. Pokud je nerovnost v p ještě vyššího stupně, pak naší jedinou nadějí je vytýkání. Pokud například rovnost nastává kdykoliv $x = y$, pak po symetrické substituci **musí** jít vytknout člen $s^2 - 4p = (x-y)^2$.

Cvičení. Ukažte, že pro každé n lze výraz $x^n + y^n$ zapsat pomocí s a p.

Návod. Uvažte nejmenší n, pro něž výraz pomocí s a p zapsat nelze, a spor hledejte ve výrazu $x^n + y^n - (x+y)^n$.

Cvičení. Pro $x, y \in \mathbb{R}$ ukažte $x^4 - 2x^3y + 3x^2y^2 - 2xy^3 + y^4 \geq 0$.

Cvičení. Pro $x, y \in \mathbb{R}^+$ ukažte

$$\frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{(1+y)^2} \geq \frac{1}{1+xy}.$$

Cvičení. Pro kladná čísla a, b, c, d platí $abcd = 1$. Ukažte nerovnost

$$\frac{1}{(1+a)^2} + \frac{1}{(1+b)^2} + \frac{1}{(1+c)^2} + \frac{1}{(1+d)^2} \geq 1.$$

(Čínská MO 2004)

Návod. Dvakrát použijte výsledek předchozího cvičení.

Cvičení. (Hodně počítací) Pro $x, y, z \in \mathbb{R}^+, x, y, z \neq 1$ jejichž součin je roven 1 ukažte nerovnost

$$\frac{x^2}{(x-1)^2} + \frac{y^2}{(y-1)^2} + \frac{z^2}{(z-1)^2} \geq 1.$$

(IMO 2008)

Návod. Dosaďte $z = \frac{1}{xy}$, použijte symetrickou substituci, zatněte zuby a počítejte. Diskriminant výsledné kvadratické rovnice by měl vyjít 0.

Symetrické a homogenní nerovnosti tří proměnných

Na tuto třídu nerovností máme též jednu bezztrátovou metodu, jak ovšem uvidíte, je výpočetně únosná jen pro nerovnosti nízkých stupňů.

Příklad. (1. úloha k přemýšlení z minulého dílu) Pro kladná čísla a, b, c dokažte nerovnost

$$(a-b)^2(a+b-c)+(b-c)^2(b+c-a)+(c-a)^2(c+a-b) \geq 0.$$

Řešení. Nerovnost je symetrická, búno[16] volme $a \geq b \geq c$. Dále vidíme, že nerovnost je homogenní, můžeme tedy zvolit $c = 1$ a psát $b = 1 + x$, kde $x \geq 0$ a $a = 1 + x + y$, kde $y \geq 0$ a bezztrátově přejít k nerovnosti dvou proměnných

$$y^2(1+2x+y)+x^2(1-y)+(x+y)^2(1+y) \geq 0,$$

z jejíž levé strany jediný záporný člen x^2y po úpravě jistě „zmizí“, takže ji můžeme prohlásit za platnou.

Poznámka. Občas se používá i substituce $c = 1$, $b = 1 + x$, $a = 1 + y$, kde $x, y \geq 0$. Její výhodou je, že vzniklá nerovnost dvou proměnných bude symetrická, a nevýhodou, že je často pracnější. Například u cyklických nerovností ani na výběr nemáme, neb búno můžeme pouze prohlásit $a \geq c$, $b \geq c$.

Cvičení. Dokažte tímto způsobem Schurovu nerovnost pro $k = 2$

$$a^2(a-b)(a-c)+b^2(b-a)(b-c)+c^2(c-a)(c-b) \geq 0$$

platnou pro $a, b, c \geq 0$.

Návod. Nezapomeňte zvlášť vyšetřit případ $c = 0$, ukrývá totiž jeden z případů rovnosti a rozmyslete si, že pouze pro $a, b, c > 0$ lze búno volit $c = 1$.

Cvičení. (Na algebraickou představivost) Zkuste stejným způsobem dokázat Schurovu nerovnost pro obecné $k \in \mathbb{N}$.

Cvičení. (Mildorfova nerovnost) Nechť a, b, c jsou reálná čísla splňující $a \geq b \geq c$ a x, y, z nezáporná čísla, pro něž platí $x + z \geq y$. Ukažte, že platí

$$x^2(a-b)(a-c)+y^2(b-c)(b-a)+z^2(c-a)(c-b) \geq 0$$

a určete, kdy nastává rovnost.

Návod. Záporné členy tentokrát odstraňte pomocí AG nerovnosti s využitím druhé mocniny vztahu $x + z \geq y$.

Rozděl a panuj

Často je možné dokazovanou nerovnost rozdělit na součet několika jednodušších nerovností (vzpomeňte na AG mašinku). Třeba jako v následujícím příkladu.

Příklad. Pro kladná čísla a, b, c dokažte nerovnost

$$a^3+b^3+c^3+6 \geq 3(a+b+c).$$

[16] Bez újmy na obecnosti.

Řešení. Nerovnost získáme sečtením tří analogických AG nerovností

$$a^3 + 1 + 1 \geq 3a \quad b^3 + 1 + 1 \geq 3b \quad c^3 + 1 + 1 \geq 3c.$$

Úloha je vyřešena.

Výhodou této techniky je, že ony dílčí nerovnosti, z nichž tu dokazovanou skládáme, mají zpravidla méně proměnných a všeobecně mají jednodušší tvar a snadno se tedy dokáží. Nevýhod je na druhou stranu hned několik. Samozřejmě se jedná o metodu ztrátovou, jelikož nemáme jistotu, že jsme původní nerovnost rozdělili správně, tedy na platné nerovnosti. Dále je třeba říct, že většinou existuje více způsobů, jak rozdělovat (tedy více možných dílčích nerovností) a zdaleka ne všechny dílčí nerovnosti budou platit. A konečně je třeba přiznat, že též velmi často nerovnost tímto způsobem rozdělit prostě nelze. Přes to všechno pokud nerovnost rozdělit lze, tak by nám to nemělo uniknout a pár rozkladů je dobré vždy vyzkoušet.

Cvičení. Pro kladná čísla x, y, z ukažte nerovnost

$$\frac{2}{(1+x)^2} + \frac{2}{(1+y)^2} + \frac{2}{(1+z)^2} \geq \frac{1}{1+xy} + \frac{1}{1+yz} + \frac{1}{1+zx}.$$

Cvičení. Ukažte, že pro $a, b, c > 0$ platí

$$\frac{2}{3}(a+b+c) \geq \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{bc} + \sqrt[3]{ca} - 1.$$

Návod. $1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}$.

O síle odhadů

Příklad, který si nyní ukážeme, velmi pěkně ilustruje, jak i úplně jednoduchý odhad může vyřešit těžkou úlohu.

Příklad. Ukažte, že pro všechny trojice kladných čísel a, b, c platí

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{1}{a^3 + b^3 + abc} \leq \frac{1}{abc}.$$

(USA MO 1998)

Řešení. Víme, že pro $x, y \in \mathbb{R}^+$ platí $x^3 + y^3 \geq x^2y + y^2x$ (AG mašinka), a můžeme tedy psát

$$L \leq \sum_{\text{cyc}} \frac{1}{a^2b + b^2a + abc} = \sum_{\text{cyc}} \frac{c}{abc(a+b+c)} = \frac{1}{abc},$$

čímž nerovnost dokážeme. Pozorně si rozmysli, že v prvním odhadu skutečně platí znaménko $\leq$.

Vidíte, že v tomto příkladě nám odhad jedné části výrazu úlohu v podstatě vyřešil. Připravte se ovšem na to, že nesrovnatelně častější je případ, kdy po použití nějakého odhadu zbyde k důkazu nerovnost, která neplatí. Nerovnosti pak můžeme dělit na *silné* a *slabé* podle toho, jak odolné jsou vůči různým odhadům, tedy vlastně jak těsný je vztah mezi levou a pravou stranou. Obdobně můžeme ohodnotit i sílu metod, které k vytváření odhadů používáme. Porovnávat obecně sílu známých nerovností je velmi těžké (zvlášť když jsou mezi nimi často těsné vztahy), nicméně například CS zlomkobijec je nepochybně metoda silná, naopak odhad z předchozího příkladu je spíše slabý. Získat dobrou představu o síle různých odhadů chce docela velkou praxi a tak nám zatím budete muset spíš věřit, když řekneme, že nějaký odhad je silný.

Cvičení. Ukažte, že pro kladná čísla a, b, c splňující $abc = 1$ platí

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{ab}{a^5 + b^5 + ab} \leq 1.$$

(IMO shortlist 1996)

Návod. Použijte odhad $a^5 + b^5 \geq a^2b^2(a + b)$.

Permutační nerovnost[17]

Někdy se jí též říká mincová nerovnost a soukromě ji nazýváme finančnická nerovnost, protože ji bez důkazu pochopí každý finančník. V jistém smyslu se jedná o zatím nejobecnější nerovnost, protože jak Cauchyho nerovnost (CS), tak i AG nerovnost jsou její důsledky.[18] Možná je teď divné, proč jsme tedy dosud tak propagovali AG a CS. Důvody jsou dva. Zaprvé umět dobře používat AG a CS je pro řešení netriviálních nerovností naprosto nezbytné. Druhý důvod je, že v některých úlohách je použití AG či CS prostě více intuitivní (a jsou případy, kdy je tomu naopak).

Tvrzení. (Permutační nerovnost) *Mějme dvě uspořádané posloupnosti libovolných[19] reálných čísel* $x_1 \geq x_2 \geq \ldots \geq x_n$ *a* $y_1 \geq y_2 \geq \ldots \geq y_n$, $n \in \mathbb{N}$. *Pro libovolnou permutaci* $(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$ *čísel* $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *platí*

$$x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n \geq x'_1y_1 + x'_2y_2 + \cdots + x'_ny_n \geq x_ny_1 + x_{n-1}y_2 + \cdots + x_1y_n.$$

Ještě než tvrzení dokážeme, chtěli bychom naznačit, že si svůj důkaz vlastně skoro ani nezaslouží, protože je opravdu zřejmé, když se formuluje následujícím finančnickým způsobem (například pro $n = 3$). Ocitli jsme se ve finančnickém poloráji, kde je obrovská hromada tisícikorun, vedle ní hromada stokorun a vedle ještě hromada pětikorun ($y_1 = 1000$, $y_2 = 100$, $y_3 = 5$). Vzít si peníze můžeme jen ve třech krocích. V každém kroku si nejdřív určíme hromadu, ze které chceme mince nebo bankovky odebírat. V prvním kroku si potom smíme z vybrané hromady odebrat jen sedm předmětů (tím myslíme mince nebo bankovky) a celá hromada poté zmizí. V druhém kroku si z další vybrané hromady můžeme odebrat už jen pět předmětů a hromada zmizí. Ve třetím kroku si ze zbylé hromady můžeme vybrat jen tři předměty ($x_1 = 7$, $x_2 = 5$, $x_3 = 3$) a se zmizením třetí hromady se z poloráje stane definitivně polopeklo. Jak hromady vybírat, abychom si odnesli co nejvíce peněz? No to je jasné přece $7 \cdot 1000 + 5 \cdot 100 + 3 \cdot 5$. A jak vybírat hromady pro nepřítele, aby si odnesl co nejméně? No přece $3 \cdot 1000 + 5 \cdot 100 + 7 \cdot 5$. Všechny ostatní výběry dají částku někde mezi.

Právě ukázaná formulace je důvodem, proč se této nerovnosti někdy říká i *mincová nerovnost.* Zkusme si i formální důkaz. Jeho myšlenka je velmi jednoduchá, prostě prohazujeme „špatně uspořádané“ dvojice.

---

[17] Anglický název je *rearrangement inequality.*

[18] Pokud ses již setkal s nerovnostmi mezi mocninnými průměry – harmonickým, geometrickým, aritmetickým a kvadratickým – pak věz, že i tyto nerovnosti lze dokázat pomocí permutační nerovnosti.

[19] Připouštíme i záporná.

Důkaz. Dokazujme nejdříve první nerovnost. Předpokládejme, že n-tice $(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$ se liší od n-tice $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ poprvé na pozici i, $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$, tj. $x_i \neq x'_i$. Pak ale jistě existuje $j > i$ takové, že $x'_j = x_i \geq x'_i$ (případ $j < i$ nastat nemůže, protože pro každé $k < i$ platí $x_k = x'_k$). Místo staré n-tice $(x'_1, x'_2, \dots, x'_i, \dots, x'_j = x_i, \dots, x'_n)$ vezměme novou n-tici $(x'_1, x'_2, \dots, x'_j = x_i, \dots, x'_i, \dots, x'_n)$, kde x'_i je na j-té pozici (prohodili jsme jen x'_i, x'_j). Stačí porovnat starý součet $\sum_{i=1}^n x'_i y_i$ s novým součtem příslušným nové n-tici. Ty se však liší jen ve dvou sčítancích a pozorujeme, že

$$x'_j y_i + x'_i y_j \geq x'_i y_i + x'_j y_j \qquad \Leftrightarrow \qquad (x'_j - x'_i)(y_i - y_j) = (x_i - x'_i)(y_i - y_j) \geq 0,$$

což je součin dvou nezáporných čísel, takže nový součet je větší nebo roven než starý. Z toho už plyne, že součet $\sum_{i=1}^n x_i y_i$ příslušející n-tici $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ je největší možný.

Druhá nerovnost se dokáže zcela analogicky. Mohli bychom ji ale dokázat i z první tak, že vezmeme posloupnost $-y_n \geq -y_{n-1} \geq \dots \geq -y_1$. Potom víme, že součet $-x_1 y_n - x_2 y_{n-1} - - \dots - x_n y_1$ je největší možný, tedy součet $x_1 y_n + x_2 y_{n-1} + \dots + x_n y_1$ je naopak nejmenší možný.

Jak to použít?

Ukážeme si několik příkladů, na kterých tě snad přesvědčíme, že snažit se hledat v úlohách permutační nerovnost může být opravdu velmi užitečné, elegantní a rychlé.

Poznámka. Budeme říkat, že dvě n-tice $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ a $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ jsou souhlasně uspořádané, pokud existuje permutace $\sigma : \{1, 2, \dots, n\} \to \{1, 2, \dots, n\}$ taková, že $x_{\sigma(1)} \geq x_{\sigma(2)} \geq \geq \dots \geq x_{\sigma(n)}$ a zároveň $y_{\sigma(1)} \geq y_{\sigma(2)} \geq \dots \geq y_{\sigma(n)}$ (jedna permutace uspořádá obě posloupnosti). Naopak budeme říkat, že tyto n-tice jsou opačně uspořádané, pokud existuje permutace σ taková, že $x_{\sigma(1)} \geq x_{\sigma(2)} \geq \dots \geq x_{\sigma(n)}$ a zároveň $y_{\sigma(1)} \leq y_{\sigma(2)} \leq \dots \leq y_{\sigma(n)}$. Zjednodušeně lze říci, že dvě n-tice jsou souhlasně uspořádané pokud párujeme velká čísla s velkými a malá s malými (tedy tím nejlepším způsobem), a naopak opačně uspořádané, pokud párujeme tím nejhorším způsobem.

Pro libovolné n-tice $(x_1, \dots, x_n)$, $(y_1, \dots, y_n)$ a pro libovolnou permutaci σ budeme výraz $\sum_{i=1}^n x_i y_{\sigma(i)}$ nazývat součinem těchto n-tic (příslušným permutaci σ). Pro uspořádané posloupnosti $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n$ a $y_1 \geq y_2 \geq \dots \geq y_n$ budeme o výrazu $x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$ mluvit jako o maximálním součinu těchto posloupností a o výrazu $x_1 y_n + \dots + x_n y_1$ jako o minimálním součinu těchto posloupností. Jsou-li $(x_1, \dots, x_n)$, $(y_1, \dots, y_n)$ souhlasně uspořádané, je $\sum_{i=1}^n x_i y_i$ jejich maximální součin, a jsou-li naopak opačně uspořádané, je $\sum_{i=1}^n x_i y_i$ jejich minimální součin.

V minulém dílu seriálu jsme si pomocí AG mašinky dokazovali následující nerovnosti (jen (iv) jsme si dovolili přidat).

Příklad. Pro kladná x, y, z, resp. kladná a, b, c dokažte

(i) $\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} \geq 3$,

(ii) $x^3 + y^3 + z^3 \geq x^2 y + y^2 z + z^2 x$,

(iii) $x^3 y + y^3 z + z^3 x \geq x^2 yz + y^2 zx + z^2 xy$,

(iv) $x^4 y^2 + y^4 z^2 + z^4 x^2 \geq x^3 yz^2 + y^3 zx^2 + z^3 xy^2$,

(v) $\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq a + b + c$,

(vi) $\frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{c} + \frac{c^3}{a} \geq ab + bc + ca$.

Řešení. Všechny nerovnosti umíme snadno dokázat pomocí AG, ale teď se na ně podíváme z trochu jiného úhlu.

(i) Trojice (x, y, z), $(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z})$ jsou opačně uspořádané[20] (zde využíváme, že čísla jsou kladná). Na pravé straně dokazované nerovnosti je jejich minimální součin, totiž $3 = x\frac{1}{x} + y\frac{1}{y} + z\frac{1}{z}$, zatímco na levé je jejich jiný součin. Takže nerovnost plyne ihned z permutační nerovnosti.

(ii) Trojice (x, y, z), (x^2, y^2, z^2) jsou souhlasně uspořádané a na levé straně dokazované nerovnosti je jejich maximální součin, takže nerovnost plyne z permutační nerovnosti.

(iii) Trojice (x^2, y^2, z^2), (yz, zx, xy) jsou opačně uspořádané[21] a na pravé straně je jejich minimální součin, takže díky permutační nerovnosti jsme hotovi.

(iv) Trojice (x^2y, y^2z, z^2x), (x^2y, y^2z, z^2x) jsou souhlasně uspořádané. Na levé straně je jejich maximální součin a na pravé straně jiný součin.

(v) Trojice (a^2, b^2, c^2), $(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c})$ jsou opačně uspořádané a na pravé straně nerovnosti je jejich minimální součin, zatímco na levé straně je jiný součin.

(vi) Trojice (a^3, b^3, c^3) a $(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c})$ jsou opačně uspořádané a podle permutační nerovnosti proto platí $\frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{c} + \frac{c^3}{a} \geq a^2 + b^2 + c^2$. Nerovnost $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$ ovšem platí také (už ji známe), protože na levé straně je maximální součin trojic (a, b, c), (a, b, c).

Zkuste to sami, je to snadné!

Stačí jen přejíždět zrakem a ověřovat, že některé nerovnosti jsou vlastně opravdu vidět :).

Cvičení. Nechť jsou dána libovolná reálná čísla $a_1, \ldots, a_n$ a $a'_1, \ldots, a'_n$ je jejich libovolná permutace. Dokažte, že

$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 \geq a_1a'_1 + a_2a'_2 + \cdots + a_na'_n.$$

Cvičení. Nechť $a_1, \ldots, a_n$ jsou kladná reálná čísla a $a'_1, \ldots, a'_n$ je jejich libovolná permutace. Dokažte, že

$$\frac{a_1}{a'_1} + \frac{a_2}{a'_2} + \cdots + \frac{a_n}{a'_n} \geq n.$$

Cvičení. Pro $x, y, z \in \mathbb{R}^+$, $n \in \mathbb{N}$ a přirozené $k < n$ dokažte

(i) $x^7 + y^7 + z^7 \geq x^5y^2 + y^5z^2 + z^5x^2$,

(ii) $x^n + y^n + z^n \geq x^ky^{n-k} + y^kz^{n-k} + z^kx^{n-k}$.

Cvičení. (o něco málo těžší) Nechť $x_1 \geq x_2 \geq \ldots \geq x_n$ a $y_1 \geq y_2 \geq \ldots \geq y_n$ jsou reálná čísla. Nechť $(y'_1, \ldots, y'_n)$ je permutace $(y_1, \ldots, y_n)$. Dokažte, že

$$(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2 \leq (x_1 - y'_1)^2 + (x_2 - y'_2)^2 + \cdots + (x_n - y'_n)^2.$$

(IMO, 1975)

---

[20] A to ať jsou čísla x, y, z uspořádaná jakkoliv, zkus si.

[21] Tuto skutečnost je vždy dobré si podrobně rozmyslet. Precizní zdůvodnění je takové, že je-li $x \geq y \geq z$, pak je i $x^2 \geq y^2 \geq z^2$ a $yz \leq zx \leq xy$. Je-li $x \geq z \geq y$, pak je i $x^2 \geq y^2 \geq z^2$ a $yz \leq xy \leq zx$ a jiná uspořádání vzhledem k cykličnosti diskutovat nemusíme (bez újmy na obecnosti je x největší).

Cvičení. Pro kladná a, b, c dokažte

$$\frac{b+1}{a\sqrt{a}} + \frac{c+1}{b\sqrt{b}} + \frac{a+1}{c\sqrt{c}} \geq 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right).$$

Návod. Přidejte jednoduchoučké AG.

Sčítání je mocné

Tím ovšem plejáda pěkných použití permutační nerovnosti zdaleka nekončí. Podívejme se třeba na tzv. *Nesbittovu nerovnost*, kterou jsme v minulém dílu dokázali pomocí CS zlomkobijce.

Příklad. Pro kladná a, b, c dokažte

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

Řešení. Trojice (a, b, c), $(\frac{1}{b+c}, \frac{1}{c+a}, \frac{1}{a+b})$ jsou souhlasně uspořádané (rozmysli), takže z permutační nerovnosti plyne

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} + \frac{a}{a+b},$$

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{c}{b+c} + \frac{a}{c+a} + \frac{b}{a+b}.$$

Sečtením a vydělením dvěma dostaneme dokazovanou nerovnost.

Jak jsme právě mohli vidět, bylo sčítání různých dolních odhadů maximálního součinu cestou k cíli. I v mnoha jiných úlohách je sčítání několika nerovností (podobně jako tomu bylo u AG) účinnou zbraní. Vyzkoušejte si tuto techniku sami.

Příklad. Nechť $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^+$. Označme $s = a_1 + \cdots + a_n$. Dokažte, že platí

$$\frac{a_1}{s-a_1} + \frac{a_2}{s-a_2} + \cdots + \frac{a_n}{s-a_n} \geq \frac{n}{n-1}.$$

Návod. $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $(\frac{1}{s-a_1}, \frac{1}{s-a_2}, \ldots, \frac{1}{s-a_n})$ jsou souhlasně uspořádané. Napište pod sebe všech $n-1$ cyklicky vytvořených odhadů a hádejte, co se s nimi dá udělat.

Cvičení. (Čebyševova nerovnost) Nechť $x_1 \geq x_2 \geq \ldots \geq x_n$ a $y_1 \geq y_2 \geq \ldots \geq y_n$. Potom platí

$$n(x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n) \geq (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)(y_1 + y_2 + \cdots + y_n) \geq$$
$$\geq n(x_1y_n + x_2y_{n-1} + \cdots + x_ny_1).$$

Poznámka. Čebyševovu nerovnost lze chápat i tak, že pro maximální součin platí odhad

$$\sum_{i=1}^{n} x_iy_i \geq \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right) y_i.$$

Cvičení. Pro kladná a, b, c a $n \geq 1$ dokažte

$$\frac{a^n}{b+c} + \frac{b^n}{c+a} + \frac{c^n}{c+a} \geq \frac{a^{n-1} + b^{n-1} + c^{n-1}}{2}.$$

Návod: (a,b,c), $\left(\frac{a^{n-1}}{b+c}, \frac{b^{n-1}}{c+a}, \frac{c^{n-1}}{c+a}\right)$ jsou souhlasně uspořádané.

Jensenova nerovnost

Abychom pochopili Jensenovu[22] nerovnost, je potřeba nejdříve dobře porozumět pojmům konvexní kombinace a konvexní funkce. Dejte si něco dobrého na zub a vrhneme se na to.

Konvexní kombinace

Definice. *Nechť jsou dána reálná čísla* $x_1, \dots, x_n$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. *Nechť jsou dále* $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \langle 0, 1\rangle$ *taková, že* $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$. *Číslo*

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n$$

nazýváme konvexní kombinací *čísel* $x_1, \dots, x_n$.

Cvičení. Ukažte, že každé z čísel x_i lze zapsat jako konvexní kombinaci čísel $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Cvičení. Rozmyslete si, že pokud je x_1 nejmenší z kombinovaných čísel a x_n naopak největší, pak všechny konvexní kombinace čísel $x_1, x_2, \dots, x_n$ leží v intervalu $\langle x_1, x_n\rangle$.

Cvičení. A naopak ukažte, že každé číslo z tohoto intervalu lze vyjádřit pomocí nějaké konvexní kombinace.

Zatím jsme se zabývali konvexními kombinacemi na přímce. Pro pochopení Jensenovy nerovnosti je ale klíčové porozumět tomu, jak se chovají konvexní kombinace v rovině.

Definice. *Nechť* $[x_1, y_1], [x_2, y_2], \dots, [x_n, y_n]$ *jsou body v rovině a* $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \langle 0, 1\rangle$ *reálná čísla taková, že* $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$. *Potom bod v rovině*

$$[\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n,\ \lambda_1 y_1 + \dots + \lambda_n y_n]$$

nazýváme konvexní kombinací *bodů* $[x_1, y_1], [x_2, y_2], \dots, [x_n, y_n]$.

Nyní si pomocí několika snadných cvičení rozmyslíme, jak vypadá množina všech konvexních kombinací (pro daných n bodů v rovině).

Cvičení. Pro $n = 2$ je onou množinou úsečka spojující body $[x_1, y_1]$, $[x_2, y_2]$.

Cvičení. Pro $n = 3$ je množinou všech konvexních kombinací bodů $[x_1, y_1], [x_2, y_2], [x_3, y_3]$ trojúhelník přesně s těmito vrcholy.

Návod. Ukažte, že umíte dosáhnout každého bodu na obvodu. Pak stačí ukázat, že s každými dvěma body leží v hledané množině i celá úsečka, která je spojuje. Nakonec si rozmyslete, že naopak i jakákoliv konvexní kombinace leží uvnitř trojúhelníku, protože ji lze chápat jako „postupné skládání“ dvou konvexních kombinací, totiž

$$\lambda_1 [x_1, y_1] + \lambda_2 [x_2, y_2] + \lambda_3 [x_3, y_3] = (\lambda_1 + \lambda_2)\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}[x_1, y_1] + \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}[x_2, y_2]\right) + \lambda_3 [x_3, y_3].$$

Cvičení. Pro obecné n je množinou všech konvexních kombinací bodů $x_1, x_2, \dots, x_n$ konvexní k-úhelník ($k \leq n$), jehož vrcholy tvoří jen zadané body a uvnitř něhož leží zbývajících $n - k$ bodů. Tomuto k-úhelníku se říká konvexní obal daných bodů.

[22] Johan Jensen (1859 – 1925) byl dánský matematik.

Návod. Zobecněte předchozí úvahy.

Konvexní a konkávní funkce

Jednu nepříjemnost máme za sebou, pochopili jsme, co to je konvexní kombinace a jaké má vlastnosti. Ale tím už máme prakticky vyhráno. Nevěříte? Čtěte dále.

Definice. *Nechť $I \subset \mathbb{R}$ je interval a nechť $f : I \to \mathbb{R}$ je funkce. Pokud pro každou dvojici $x, y \in I$ a každé $\lambda \in \langle 0, 1\rangle$ platí*

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y),$$

nazveme funkci f konvexní *na intervalu I.*

V případě, že je splněná dokonce ostrá nerovnost (pro každé $\lambda \in (0, 1)$), mluvíme o ryze konvexní *funkci.*

V případě, že pro každou dvojici $x, y \in I$ a každé $\lambda \in \langle 0, 1\rangle$ platí opačná nerovnost (tedy $\geq$), nazveme funkci f konkávní *na intervalu I, a podobně platí-li dokonce ostrá nerovnost, mluvíme o* ryze konkávní *funkci.*

Definice konvexní funkce tedy říká, že pro libovolné dva body x, y musí být příslušná část grafu funkce (tím myslíme množinu $\{[t, f(t)] \in \mathbb{R}^2;\ x \leq t \leq y\}$) pod úsečkou spojující body $[x, f(x)], [y, f(y)]$ a v případě konkávní funkce musí být pod ní. Abychom viděli, že opravdu už máme vše potřebné téměř za sebou, ukážeme si ihned Jensenovu nerovnost.

Tvrzení. (Jensenova nerovnost) *Nechť f je konvexní funkce na intervalu I. Potom pro libovolná $x_1, \ldots, x_n \in I$ a libovolná $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \langle 0, 1\rangle$ taková že $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1$ platí*

$$f(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n) \leq \lambda_1 f(x_1) + \cdots + \lambda_n f(x_n).$$

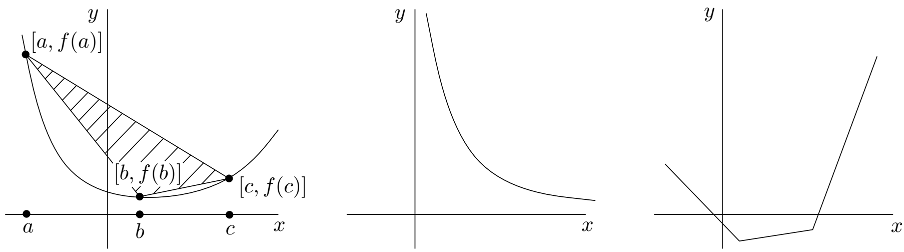
Vidíme, že Jensenova nerovnost je jen jakási „zobecněná definice“ konvexní funkce a že nehovoří o ničem jiném, než právě o konvexních kombinacích. Uvažujeme-li graf funkce f (tj. množinu bodů $\{[t, f(t)] \in \mathbb{R}^2;\ t \in I\}$), potom bod $[\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n, f(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n)]$ leží na grafu funkce, zatímco bod $[\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n, \lambda_1 f(x_1) + \cdots + \lambda_n f(x_n)]$ leží uvnitř konvexního n-úhelníku tvořeného vrcholy $[x_i, f(x_i)]$, $i \in \{1, \ldots, n\}$. Přitom ale tyto body leží „nad sebou“ (mají stejné x-ové souřadnice). Odtud je ihned patrné, že Jensenova nerovnost platí! Přesto si uvedeme velice stručný formální důkaz.

Důkaz. Postupujeme indukcí. Pro $n = 2$ se jedná o definici konvexní funkce. Předpokládejme, že tvrzení platí pro n a dokážeme jej pro $n + 1$. První nerovnost plyne z konvexity funkce f a druhá z indukčního předpokladu.

$$\begin{aligned}
&f(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_{n+1} x_{n+1}) = \\
&= f\left((1-\lambda_{n+1})\left(\frac{\lambda_1}{1-\lambda_{n+1}} x_1 + \cdots + \frac{\lambda_n}{1-\lambda_{n+1}} x_n\right) + \lambda_{n+1} x_{n+1}\right) \leq \\
&\leq (1-\lambda_{n+1}) f\left(\frac{\lambda_1}{1-\lambda_{n+1}} x_1 + \cdots + \frac{\lambda_n}{1-\lambda_{n+1}} x_n\right) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1}) \leq \\
&\leq \lambda_1 f(x_1) + \cdots + \lambda_{n+1} f(x_{n+1}).
\end{aligned}$$

Poznámka. (o rovnosti) Asi ve všech našich aplikacích budeme Jensenovu nerovnost používat na ryze konvexní nebo ryze konkávní funkce a se všemi koeficienty λ_i nenulovými. V takovém případě leží konvexní kombinace $[\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n, \lambda_1 f(x_1) + \cdots + \lambda_n f(x_n)]$ přímo uvnitř konvexního n-úhelníku tvořeného body $[x_1, f(x_1)], \ldots, [x_n, f(x_n)]$ a v Jensenově nerovnosti proto platí ostrá nerovnost – vyjma jednoho jediného případu, kdy jsou si všechna x_i rovna (a n-úhelník degeneruje do jediného bodu).

Abychom mohli Jensenovu nerovnost dobře používat, je nutné umět poznat, které funkce jsou konvexní. Ukažme si nejdříve nějaké příklady konvexních funkcí (na prvním obrázku je navíc Jensenova nerovnost znázorněna graficky pro tři čísla).



Poznat o zadané funkci, že je konvexní, nemusí být zcela triviální. Jedna z metod je použít derivaci. Nebudeme se zabývat tím, co derivace je, jenom bez důkazu uvedeme, že pokud funkce f má druhou derivaci, pak je f konvexní na intervalu I, právě když její druhá derivace je na I nezáporná (f ale vůbec druhou derivaci mít nemusí, a přesto může být konvexní). Obdobné tvrzení platí samozřejmě i pro konkávní funkce. Hodně laicky se dá říci, že konvexní funkce jsou ve tvaru „misky“, zatímco konkávní mají tvar „deštníku“. Častokrát pomůže umět si představit průběh funkce.[23] V seriálu obvykle budeme bez ověřování definice tvrdit, že funkce je konvexní.[24]

Jensenova nerovnost má samozřejmě svoji obdobu pro konkávní funkce, ovšem tentokrát ve tvaru

$$f(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n) \geq \lambda_1 f(x_1) + \cdots + \lambda_n f(x_n),$$

pro $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \langle 0, 1 \rangle$ taková, že $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1$.

Určitě už se těšíš na všechny možné nerovnosti, které se nám pomocí Jensenovy nerovnosti podaří dokázat. Ještě předtím ale zkusíme uvést skromný výčet nejpoužívanějších konvexních a

[23]Ve složitějších případech si můžeš funkci nechat vykreslit na počítači. Doporučujeme uživatelsky přátelskou aplikaci *online plotter* na

`http://www.univie.ac.at/future.media/moe/fplotter/fplotter.html`.

[24]To by ti mělo projít bez důkazu i v olympiádě, pokud nepracuješ zrovna s nějakou divokou funkcí. O jednoduchých funkcích se považuje za známé, zda jsou konvexní, nebo ne.

konkávních funkcí. Vždy uvedeme i příslušný interval, na němž funkce má danou vlastnost.

konvexní	na intervalu
$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^+$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}^+$
$x^2, x^4, \dots$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$(\pi, 2\pi)$
$\cos x$	$(\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi)$
$\operatorname{tg} x$	$(0, \frac{\pi}{2})$
e^x	$\mathbb{R}$

konkávní	na intervalu
$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^-$
$\sqrt{x}$	$\mathbb{R}^+$
$x^3, x^5, \dots$	$\mathbb{R}^-$
$\sin x$	$(0, \pi)$
$\cos x$	$(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$
$\operatorname{tg} x$	$(-\frac{\pi}{2}, 0)$
$\ln x$	$\mathbb{R}^+$

O spoustě dalších funkcí není obtížné rozhodnout, zda jsou konvexní či konkávní (například lineární lomená funkce $\frac{ax+b}{cx+d}$, polynomy, atd.), je ovšem vždy potřeba dávat si pozor na intervaly. Rádi bychom upozornili, že součet konvexních funkcí je konvexní funkce, kladný násobek konvexní funkce dá konvexní funkci, ovšem o součinu dvou konvexních funkcí již nic podobného obecně tvrdit nelze.

Konečně použití

První použití, které si ukážeme, bude slíbený nejhezčí[25] důkaz AG nerovnosti.

Tvrzení. *Pro kladná čísla* $x_1, \dots, x_n$, $n \in \mathbb{N}$, *platí*

$$\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n}.$$

Důkaz. Nejdříve na celou nerovnost (pozor trik!) vypustíme logaritmus a použijeme Jensenovu nerovnost pro konkávní funkci $f(x) = \ln(x)$ na $\mathbb{R}^+$. Poznamenejme, že funkce $\ln(x)$ má následující vlastnosti

(i) $\ln(x)$ je rostoucí funkce,
(ii) $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$ pro libovolná $x, y \in \mathbb{R}^+$,
(iii) $\ln(x^n) = n \ln(x)$ pro libovolné $x \in \mathbb{R}^+$, $n \in \mathbb{R}$ (pro $n \in \mathbb{N}$ plyne tato vlastnost z předchozí).

Důvod, proč vybíráme zrovna tuto funkci, je právě ten, že převádí „součet na součin“. Stačí si jen napsat Jensenovu nerovnost ($\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = \frac{1}{n}$)

$$\ln\left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right) \geq \frac{1}{n}\ln(x_1) + \cdots + \frac{1}{n}\ln(x_n)$$

a uvědomit si, že pravá strana je opravdu přesně to, co chceme, protože

$$\frac{1}{n}\ln(x_1) + \cdots + \frac{1}{n}\ln(x_n) = \ln(\sqrt[n]{x_1}) + \cdots + \ln(\sqrt[n]{x_n}) = \ln\left(\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n}\right).$$

[25] Podle našeho subjektivního názoru.

Protože je logaritmus rostoucí, můžeme jej (z výchozího a obdrženého výrazu) odstranit při zachování nerovnosti a dostáváme AG nerovnost.

Možná jsme přece jen začali poměrně zostra. Nyní si ukážeme nějaká naprosto standardní a snadná (netriková) použití Jensenovy nerovnosti. Častokrát ji lze velmi účinně použít při důkazech nerovností, v nichž vystupují goniometrické funkce (řekněme proměnných α, β, γ). Obzvláště pokud něco víme o součtu $\alpha + \beta + \gamma$.

Příklad. Jsou-li α, β, γ úhly v trojúhelníku, dokažte

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Řešení. Použijeme funkci $f(x) = \sin(x)$, která je konkávní na intervalu $(0, \pi)$ (zřejmě $\alpha, \beta, \gamma \in (0, \pi)$). Podle Jensenovy nerovnosti platí

$$\frac{1}{3}\sin\alpha + \frac{1}{3}\sin\beta + \frac{1}{3}\sin\gamma \leq \sin\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Zkuste si použít Jensenovu nerovnost sami. Ve všech následujících cvičeních jsou α, β, γ úhly v trojúhelníku.

Cvičení. Dokažte

(i) $\sin\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\gamma}{2} \leq \frac{3}{2}$,

(ii) $\cos\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\beta}{2} + \cos\frac{\gamma}{2} \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$,

(iii) $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} \geq \sqrt{3}$,

(iv) $\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}$.

Návod. V (iv) hledejte nejdříve AG.

Příklad. (Varovný!) Nechť α, β, γ jsou úhly v trojúhelníku. Dokažte

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \leq \frac{3}{2}.$$

Návod. Pozor! Pokud tě láká použít Jensenovu nerovnost, tak zadrž! Funkce $\cos x$ bohužel není konkávní na celém intervalu $(0, 2\pi)$, což bychom potřebovali. Zkus vymyslet jiný přístup. :) Upozorňujeme však, že se jedná o spíše obtížnou úlohu.

Nerovnosti s goniometrickými funkcemi mohou vypadat jako z jiného světa. Je pravda, že se jedná o natolik rozsáhlou kapitolu, že by bylo možné o ní napsat samostatný seriál. Jejich kouzlo spočívá v tom, že „obyčejné" nerovnosti lze často chytrými substitucemi převádět právě na goniometrické nerovnosti a v goniometrii existuje celá řada užitečných identit a nerovností, které mohou vést k cíli.

Přišel ten správný čas vytáhnout z rukávu triky při používání Jensenovy nerovnosti. Ukážeme si dva příklady a potom se pokusíme vyložit některé principy.

Příklad. Pro kladná a, b, c dokažte

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{a}{\sqrt{a^2 + 8bc}} \geq 1.$$

(IMO, 2001)

Řešení. Vzhledem k tomu, že se jedná o homogenní nerovnost, můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že $a+b+c=1$. Použijeme konvexní funkci $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ na $\mathbb{R}^+$. Podle Jensenovy nerovnosti máme (koeficienty jsou postupně a, b, c)

$$\sum_{\text{cyc}} a\frac{1}{\sqrt{a^2+8bc}} \geq \frac{1}{\sqrt{a^3+b^3+c^3+24abc}},$$

takže nám bude stačit dokázat nerovnost

$$1 \geq a^3+b^3+c^3+24abc.$$

Ovšem tu stačí zpětně homogenizovat. Pak chceme dokázat nerovnost

$$(a+b+c)^3 \geq a^3+b^3+c^3+24abc,$$

která je platná pro libovolná a, b, c, protože se jedná pouze o snadné cvičení na AG nerovnost.

Příklad. Pro kladná a, b, c dokažte

$$\sum_{\text{cyc}} a\sqrt{a^2+2(b^2+c^2)+(b+c)^2} \leq (a+b+c)^2.$$

Řešení. Nejdříve obě strany vydělíme $a+b+c$

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{a}{a+b+c}\sqrt{a^2+3(b^2+c^2)+2bc} \leq a+b+c.$$

Dále použijeme Jensenovu nerovnost pro konkávní funkci $f(x)=\sqrt{x}$ na $\mathbb{R}^+$ (koeficienty jsou postupně $\frac{a}{a+b+c}$, $\frac{b}{a+b+c}$, $\frac{c}{a+b+c}$), čímž nám zbyde dokázat

$$\sqrt{\frac{\sum_{\text{cyc}}(a^3+3ab^2+3ac^2+2abc)}{a+b+c}} \leq a+b+c = \sqrt{\frac{(a+b+c)^3}{a+b+c}}.$$

Nerovnost, která stačí dokázat po odstranění odmocnin, není obtížná (dokonce obě strany jsou si rovny), pokud se nebojíme roznásobit $(a+b+c)^3$. Využijeme zápisu přes cyklické sumy[26]

$$\sum_{\text{cyc}}(a^3+3ab^2+3ac^2+2abc) \leq \sum_{\text{cyc}} a(a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca).$$

Je potřeba si dobře rozmyslet, proč se tyto výrazy zcela rovnají.[27]

[26] Druhý způsob, který se rovněž vyhýbá možnosti, že bychom se mohli z roznásobování zbláznit, je roznásobit závorku pomocí multinomické věty, která funguje podobně jako binomická věta (viz například `http://en.wikipedia.org/wiki/Multinomial_theorem`).

[27] Musíte si představit cyklické záměny jednotlivých výrazů. Potom se například člen ab^2 „sečte“ s členem $2ca^2$, jehož cyklickou záměnou je právě $2ab^2$.

Nejdříve bychom chtěli poznamenat, že homogenizace $a+b+c=1$ nebo vydělení výrazem $a+b+c$ (a následné použití koeficientů $\frac{a}{a+b+c}$) je rovnocenný postup. A teď jakési malé shrnutí, jak Jensenovu nerovnost používat. Jako první si rozmyslete, jestli je Jensenovu nerovnost potřeba použít pro konvexní nebo pro konkávní funkci. Až potom je dobré hledat vhodnou funkci. Poslední krok je volba vhodných koeficientů. Při tomto kroku nám může pomoct homogenita a můžeme proto o nějakém výrazu (v příkladu výše to byl výraz $a+b+c$) búno předpokládat, že je roven jedné. Ostatně vhodnou volbou koeficientů lze docílit těch největších triků a vyřešit tak i opravdu velmi obtížné nerovnosti. Užitečné pozorování je, že Jensenova nerovnost je často vhodný nástroj pro odstranění odmocnin, které jsou většinou zdrojem problémů, a rovněž nás umí zbavit zlomků při vhodné volbě funkce f.

Cvičení. Pro kladná a, b, c dokažte

$$\sqrt{a^3}+\sqrt{b^3}+\sqrt{c^3} \leq \sqrt{3(a^3+b^3+c^3)}.$$

Cvičení. Pro kladná a, b, c dokažte

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{a}{(b+c)^2} \geq \frac{9}{4(a+b+c)}.$$

Návod. Prozradíme, že funkce $f(x)=\frac{x}{(1-x)^2}$ je konvexní na intervalu $(0,1)$. Zkuste proto položit $a+b+c=1$. Všimněte si, že již při výběru vhodné funkce, nám může homogenita velmi pomoct.

AG a zlomky

Ještě než si ukážeme novou zbraň na nerovnosti se zlomky, proveďme jednu velmi důležitou úvahu o rovnostech.

Úvaha o rovnostech

Představme si, že dokazujeme nerovnost $L(a,b,c) \geq P(a,b,c)$ a náš důkaz se skládá z dílčích odhadů

$$L \geq L_1 \geq L_2 \geq \cdots \geq P.$$

Pokud pro nějakou trojici čísel a, b, c platí $L(a,b,c)=P(a,b,c)$, tedy nastává rovnost, pak platí

$$L(a,b,c)=L_1(a,b,c)=\cdots=P(a,b,c)$$

a rovnost tedy platí i při všech použitých odhadech. Víme-li tedy o nějaké trojici, pro niž nastává rovnost (velmi často pro $a=b=c$), pak má smysl používat pouze odhady, v nichž pro takovou trojici též nastává rovnost. Jak za chvíli uvidíte, tato banální myšlenka může být velmi užitečná.

Jdeme na to!

Až dosud nám AG nerovnost sloužila převážně k dokazování homogenních nerovností. Možná vás překvapí, že AG nerovnost se dá velmi dobře používat i v nerovnostech se zlomky. Myšlenka je velmi jednoduchá, prostě zlomek sečteme s jeho jmenovatelem nebo jeho částmi. Sledujte!

Příklad. Pro kladná čísla a, b, c ukažte nerovnosti

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq a + b + c.$$

Řešení. Podle AG nerovnosti platí $\frac{a^2}{b} + b \geq 2a$. Sečtením tří analogických nerovností získáme to, co jsme měli dokázat.

Příklad. Pro kladná čísla a, b, c ukažte

$$\frac{a^3}{bc} + \frac{b^3}{ac} + \frac{c^3}{ab} \geq a + b + c.$$

Řešení. Použijeme AG nerovnost pro tři členy $\frac{a^3}{bc} + b + c \geq 3a$ a součtem tří takových nerovností získáme výsledek.

Cvičení. Ukažte následující nerovnosti pro kladná čísla a, b, c

(i)

$$\frac{a^3}{b^2} + \frac{b^3}{c^2} + \frac{c^3}{a^2} \geq a + b + c,$$

(ii)

$$\frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{c} + \frac{c^3}{a} \geq ab + bc + ca,$$

(iii)

$$\frac{a^5}{b^3} + \frac{b^5}{c^3} + \frac{c^5}{a^3} \geq a^2 + b^2 + c^2.$$

Návod. Ve druhém příkladu vezměte do AG nerovnosti dva členy z levé strany a jeden z pravé a ve třetím příkladu použijte AG nerovnost pro pět prvků.

Aplikace této metody nejsou zatím moc přesvědčivé, neboť předchozí nerovnosti umíme spolehlivě dokazovat třeba permutační nerovností, ale myšlenka je snad již zcela jasná. Například sis už jistě uvědomil, jak nám čitatel zlomku napovídá, kolik členů vzít do AG nerovnosti. Pojďme nyní zkusit tímto způsobem dokázat nějakou opravdovou nerovnost.

Příklad. Pro kladná čísla a, b, c dokažte

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{a^3}{(a+b)(a+c)} \geq \frac{a+b+c}{4}.$$

(IMO shortlist)

Řešení. Myšlenka řešení je po předchozím zcela jasná. Nesmíme se ale ukvapit a zapomenout na naší úvahu o rovnosti. V dokazované nerovnosti evidentně nastává rovnost pro $a = b = c$ a při sestavování AG nerovnosti na to musíme myslet. Ta správná AG nerovnost je

$$8 \cdot \frac{a^3}{(a+b)(a+c)} + (a+b) + (a+c) \geq 3 \cdot 2a.$$

Koeficient 8 je volen právě tak, aby pro $a = b = c$ platilo, že AG nerovnost aplikujeme na tři stejná čísla. Dokazovaná nerovnost se samozřejmě získá sečtením tří podobných AG nerovností.

Pořád je to velmi jednoduché, ne? Zkuste si to sami na následujících příkladech a nezapomeňte volit správné koeficienty.

Cvičení. Pro $a, b, c > 0$ ukažte

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{a^3}{b(2c+a)} \geq \frac{a+b+c}{3}.$$

Cvičení. Pro kladná čísla a, b, c dokažte nerovnost

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{a^3}{b+2c} \geq \frac{a^2+b^2+c^2}{3}.$$

Návod. Nejprve si zlomek rozšiřte, jak by to udělal CS zlomkobijec.

Cauchy a odmocniny

Viděli jsme, jaké netušené možnosti ještě skrývá AG nerovnost, nicméně ani Cauchyho nerovnost zdaleka neřekla své poslední slovo. Již víme, že pokud chceme součet tří nějakých zlomků odhadnout ve směru $\geq$ je CS zlomkobijec neocenitelným pomocníkem. Nyní budeme chtít součet tří výrazů obsahujících odmocniny odhadnout naopak ve směru $\leq$. Nerovnosti obsahující odmocniny patří mezi ty nejtěžší, ovšem díky CS na ně hned budeme mít účinnou zbraň.

Nejprve si ale uveďme, jaký tvar CS budeme na práci s odmocninami používat.

Tvrzení. (CS na odmocniny) *Buď n přirozené číslo a $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ čísla kladná. Pak platí*

$$\sqrt{a_1b_1} + \sqrt{a_2b_2} + \cdots + \sqrt{a_nb_n} \leq \sqrt{(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)(b_1 + b_2 + \cdots + b_n)}.$$

Cvičení. (Lehoučké) Rozmyslete si, že to je opravdu důsledek CS.

Cvičení. Dokažte následující nerovnosti, v nichž jsou všechna uvedená čísla kladná.

(i) $\sqrt{x+1} + \sqrt{2x-3} + \sqrt{50-3x} \leq 12$,
(ii) $\sqrt{a^3} + \sqrt{b^3} + \sqrt{c^3} \leq \sqrt{3(a^3+b^3+c^3)}$,
(iii) $\sqrt{a^3} + \sqrt{b^3} + \sqrt{c^3} \leq \sqrt{(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)}$,
(iv) $\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca} \leq a+b+c$,
(v) $a\sqrt{b} + b\sqrt{c} + c\sqrt{a} \leq \sqrt{(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)}$.

Celá věda je tedy v tom, podívat se na výraz pod odmocninou jako na nějaký součin, popřípadě občas nějaký ten člen, co se odvážil vylézt před odmocninu, stáhnout zase dovnitř. Díky zkušenostem, které máme s CS zlomkobijcem, už jistě vidíme, že síla CS na odmocniny bude v tom, že ať máme pod odmocninou cokoliv, chápat to jako součin můžeme více způsoby. Příklady (ii) a (iii) jsou toho názorným důkazem. Opět tedy budeme mít k dispozici celou škálu odhadů a je velká šance, že aspoň jeden z nich bude dostatečně silný. Pojďme si to zkusit na těžké úloze!

Příklad. Kladná čísla $x, y, z \geq 1$ splňují $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2$. Dokažte

$$\sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} + \sqrt{z-1} \leq \sqrt{x+y+z}.$$

(Íránská MO 1998)

Řešení. Předně se zaradujeme, protože nerovnost má k použití CS pro odmocniny vhodný tvar. Nyní se musíme rozhodnout, jak se dívat na výraz $x-1$. Vzhledem k zadané podmínce se nabízí $x-1=x(1-\frac{1}{x})$. Zkusme použít CS pro odmocniny

$$L=\sqrt{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}+\sqrt{y\left(1-\frac{1}{y}\right)}+\sqrt{y\left(1-\frac{1}{y}\right)}\leq\sqrt{(x+y+z)\left(3-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\right)}$$

a vidíme, že po dosazení podmínky je úloha vyřešena.

Věříme, že CS na odmocniny je jasná věc a můžeme jej potrénovat na třech úlohách pro opravdové šampióny. Spatříš mimo jiné, jak účinné je obě použití CS kombinovat.

Cvičení. Pro kladná čísla a,b,c dokažte nerovnost

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8ac}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}}\geq 1.$$

(IMO 2001)

Návod. CS zlomkobijec, pak šikovný CS pro odmocniny (uvědomte si, že dá odhad správným směrem) a nakonec AG.

Cvičení. Kladná čísla x,y,z splňují $x^2+y^2+z^2\geq 3$. Dokažte

$$\sum_{\text{cyc}}\frac{x^3}{\sqrt{y^2+z^2+7}}\geq 1.$$

Návod. Opět začněte CS zlomkobijcem následovaným CS pro odmocniny. V něm volte rozklad na součin tak, abyste pak mohli substituovat $x^2+y^2+z^2=A$ a v celé nerovnosti figurovala jen proměnná A.

Cvičení. Buďte $a,b,c\in\mathbb{R}^+$ pevná. Ukažte nerovnosti

$$\begin{aligned}\sqrt{3(a^2+b^2+c^2)}&\geq\sqrt{a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2}+\sqrt{b^2x^2+c^2y^2+a^2z^2}+\sqrt{c^2x^2+a^2y^2+b^2z^2}\geq\\&\geq a+b+c,\end{aligned}$$

pro $x,y,z\in\mathbb{R}$ taková, že $x^2+y^2+z^2=1$.

(CRUX journal)

Návod. V jednom z odhadů se nebojte umocnit, hodně členů se odečte a na součiny odmocnin půjde opět použít CS.

Jistě neuniklo vaší pozornosti, že použití CS zlomkobijce a následně CS na odmocniny dá často totéž, co by dalo jedno použití Jensenovy nerovnosti (viz první cvičení z tohoto bloku). Na závěr kapitoly o CS si formou cvičení uvedeme dvě velmi kreativní použití této nerovnosti. Zároveň tím podáme řešení dvou *Úloh k přemýšlení* z minulého dílu.

Cvičení. Buďte $a,b,c\in\mathbb{R}^+$ taková, že $abc=1$. Dokažte

$$\sum_{\text{cyc}}\frac{a^2+b^2+c^2}{a^5+b^2+c^2}\leq 3.$$

(IMO 2005)

Návod. Použijte CS na odhad jmenovatelů. CS: $(a^5+b^2+c^2)(bc+b^2+c^2) \geq (a^2+b^2+c^2)^2$.

Cvičení. Ukažte, že pro $x, y, z \geq 1$ platí

$$\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-1} \leq \sqrt{x(yz+1)}.$$

Návod. Dvakrát použijte CS ve tvaru $\sqrt{((x-1)+1)(1+(y-1))} \geq \sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}$.

Úlohy k přemýšlení

I tentokrát jsme pro tebe připravili několik velmi zajímavých nerovností, k jejichž řešení je spíš než znalostí potřeba dobrého nápadu. Zkus je tedy vyřešit postupy, které nepřekračují naše současné vědomosti, své řešení pošli na chat a čokoláda je tvoje!

Příklad. (zobecněná permutační nerovnost) Mějme posloupnosti $x_1 \geq x_2 \geq \ldots \geq x_n \geq 0$, $y_1 \geq y_2 \geq \ldots \geq y_n \geq 0$ a $z_1 \geq z_2 \geq \ldots \geq z_n \geq 0$. Nechť $\sigma, \pi : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ jsou libovolné permutace. Potom platí

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i z_i \geq \sum_{i=1}^{n} x_i y_{\sigma(i)} z_{\pi(i)}.$$

Dokažte.[28]

Příklad. Dokažte, že pro kladná čísla x, y, z platí nerovnost

$$x^2+y^2+z^2+2xyz+1 \geq 2(xy+yz+zx).$$

Příklad. Pro kladná čísla a, b, c ukažte

$$1 < \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+c^2}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+a^2}} \leq \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

Seriál – Nerovnosti, díl III

Po nadílce z minulého dílu se jistě nemůžete dočkat, co jsme na vás přichystali tentokrát. Díky tomu, že naše znalosti jsou už na slušné úrovni, můžeme si představit i ty nejsilnější metody k dokazování nerovností. Ukážeme si například, proč jsou symetrické nerovnosti „lehké“, či jak nerovnosti upravovat na součet čtverců. Též si osvojíme různé substituce a samozřejmě pár nových užitečných nerovností. Navíc máte jedinečnou příležitost, která se vám při studiu klasických matematických disciplín jen tak nenaskytne, a to seznámit se s těmi nejmodernějšími výsledky v oboru, neboť většina zde uvedených metod je opravdu jen pár let stará! Začněme tedy!

Substituce

Téma substitucí je natolik rozsáhlé a nachází uplatnění v tolika různých oblastech, že se ani nebudeme snažit jej kompletně vyčerpat. Ukážeme si jen ty, které v souvislosti s nerovnostmi potkáváme nejčastěji.

[28] Předem upozorňujeme, že předpoklad o nezáporných číslech nelze vypustit a je ho tedy potřeba v důkaze využít. Rozhodně nepůjde přímo aplikovat důkaz obyčejné permutační nerovnosti.

Na substitucích je nepříjemné, že pokud je neznáte, je téměř nemožné na ně za krátký čas (při soutěžích) přijít. Přitom ale může vhodná substituce úlohu prakticky vyřešit. Zkusíme začít od těch jednodušších případů. Budeme se zabývat nerovnostmi s podmínkou a naše snaha bude pomocí vhodné substituce tuto nerovnost převést (bezztrátově) na nerovnost bez podmínky. To již umíme pomocí homogenizace, ale někdy se mohou hodit i jiné postupy a v některých případech může být podmínka natolik nepříjemná, že vůbec není jasné, jak by se měla homogenizace provést.

Případ $xyz = 1$

Předpokládejme, že máme dokazovat nerovnost v proměnných x, y, z pro všechna kladná x, y, z splňující $xyz = 1$. Proč rovnou nedosadit $z = \frac{1}{xy}$? Nemusí to být vždy špatně, ale většinou dostaneme nerovnost, která ztratí veškeré symetrie a hlavně je nehomogenní, což je nepříjemné. Snahou je proto ekvivalentně přejít k novým proměnným a, b, c, které jednak budou na sobě zcela nezávislé (zbavíme se podmínky) a navíc nám nerovnost „neudělají škaredější“. Zkusme za x, y, z dosadit

$$x = \frac{a}{b}, \quad y = \frac{b}{c}, \quad z = \frac{c}{a}.$$

Tvrdíme, že taková $a, b, c > 0$ existují, právě když $xyz = 1$. Je-li $xyz = 1$, pak taková $a, b, c > 0$ existují, protože a zvolíme libovolně, z první rovnosti dopočteme b, z druhé dopočteme c a z musíme volit jako $z = \frac{1}{xy} = \frac{b}{a} \cdot \frac{c}{b} = \frac{c}{a}$. Pokud naopak taková a, b, c existují, zřejmě $xyz = \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{a} = 1$.

Cvičení. (Důležité!) Rozmyslete si, že přechod od nerovnosti v proměnných x, y, z s podmínkou $xyz = 1$ k nerovnosti v proměnných a, b, c bez podmínky dosazením $x = \frac{a}{b}$, $y = \frac{b}{c}$, $z = \frac{c}{a}$ je bezztrátový. Dále si rozmyslete, že nová nerovnost je vždy homogenní (stupně 0).

Návod. Ukažte, že pokud existuje trojice, pro niž neplatí jedna z nerovností, pak lze najít i trojici, pro niž neplatí druhá.

Cvičení. Pro kladná a, b, c splňující $abc = 1$ dokažte

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq a + b + c.$$

(Česká MO 2003)

Všimněte si, že ačkoliv vycházejí jiné nerovnosti než při homogenizaci, příslušné soustavy (pro AG nerovnost) mají tatáž řešení.

Cvičení. Pro kladná a, b, c splňující $abc = 1$ dokažte

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{1}{a^3(b+c)} \geq \frac{3}{2}.$$

(IMO 1995)

Návod. Po substituci hledejte CS zlomkobijce, AG potom práci dodělá. Dobře funguje i substituce $x = \frac{1}{a}$, opět ve spojení se zlomkobijcem.

Cvičení. Pro kladná čísla a, b, c splňující $abc = 1$ dokažte

$$\left(a - 1 + \frac{1}{b}\right)\left(b - 1 + \frac{1}{c}\right)\left(c - 1 + \frac{1}{a}\right) \leq 1.$$

(IMO 2000)

Návod. Nerovnost, kterou získáte po vynásobení xyz, je opravdu (možná překvapivě) jen jiný tvar Schurovy nerovnosti (z cyklické nerovnosti jsme dostali symetrickou!).

Poznámka. Z českých účastníků na IMO 1995 vyřešil tuto úlohu jeden, na IMO 2000 žádný.

Nakonec si shrneme, k čemu tato substituce vede. Nikdo nám nezaručuje, že nová nerovnost bude snadněji dokazatelná, ovšem příjemné je, že se bezztrátově zbavíme podmínky, a přitom se nerovnost nestane nepřehlednou, jak se tomu většinou stane po přímém dosazení.

Případ a, b, c strany trojúhelníku

Budeme pokračovat s dalšími užitečnými substitucemi. Uvažujme nerovnost v proměnných a, b, c, kde a, b, c tvoří strany trojúhelníku (tj. jsou to kladná čísla splňující rovnou tři podmínky $a+b > c$, $b+c > a$, $c+a > b$). Pokud nás tato podmínka spíše obtěžuje, máme možnost se jí zbavit pomocí substituce

$$a = y + z, \quad b = z + x, \quad c = x + y.$$

Ukážeme, že taková čísla $x, y, z > 0$ existují (a dokonce jsou určena jednoznačně), právě když a, b, c tvoří strany trojúhelníku. Tvoří-li a, b, c strany trojúhelníku, pak délky úseček od vrcholů trojúhelníku k bodům dotyku kružnice vepsané s jeho stranami jsou hledaná x, y, z. Lze je jednoznačně vyjádřit (pouhým vyřešením soustavy) jako

$$x = \frac{-a+b+c}{2}, \quad y = \frac{a-b+c}{2}, \quad z = \frac{a+b-c}{2},$$

což jsou jistě kladná čísla. Naopak pokud taková x, y, z existují, pak zřejmě $a + b = x + y + 2z >$ $> x + y = c$ a analogicky platí dvě zbývající nerovnosti. Stejně jako v předchozím případě není těžké si rozmyslet, že přechod od nerovnosti s podmínkou v proměnných a, b, c k nerovnosti bez podmínky v proměnných x, y, z je bezztrátový.

Cvičení. Nechť a, b, c jsou strany trojúhelníka. Dokažte

(i) $\sum_{\text{cyc}} a^2(b + c - a) \le 3abc$, (IMO 1964)

(ii) $\sum_{\text{cyc}} a^2b(a - b) \ge 0$. (IMO 1983)

Návod. Ve druhém cvičení buďte připraveni na použití permutační nerovnosti (nejlépe po vydělení xyz).

Případ $x + y + z = xyz$

Přidejme nepatrně na obtížnosti. Uvažujme nerovnost v proměnných $x, y, z > 0$ s podmínkou $x + y + z = xyz$. Porovnejme následující dva vztahy

$$z = -\frac{x+y}{1-xy}, \qquad \operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}.$$

Očividně mají naprosto stejnou strukturu. Přidáme-li ještě, že $\operatorname{tg}(\pi - (\alpha+\beta)) = -\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$, nabízí se, že podmínka $x + y + z = xyz$ má něco společného s trojúhelníkem. Ať už jsou x, y jakákoliv kladná čísla, existují $\alpha, \beta \in (0, \frac{\pi}{2})$ taková, že $x = \operatorname{tg}\alpha$, $y = \operatorname{tg}\beta$. Podle výše uvedeného je potom $z = \operatorname{tg}(\pi - (\alpha + \beta))$. Protože $z > 0$, je navíc $\gamma = \pi - (\alpha + \beta) \in (0, \frac{\pi}{2})$. Právě jsme ukázali, že z podmínky $x + y + z = xyz$ plyne existence ostroúhlého trojúhelníku s úhly α, β, γ takovými, že

$$x = \operatorname{tg} \alpha, \quad y = \operatorname{tg} \beta, \quad z = \operatorname{tg} \gamma.$$

Naopak má-li ostroúhlý trojúhelník úhly α, β, γ, pak platí $x + y + z = \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma = \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma = xyz$. Proto lze provést stejnou úvahu jako v důležitém cvičení a zjišťujeme, že i tentokrát je přechod k nerovnosti bez podmínky bezztrátový.[29]

Cvičení. Nechť x, y, z jsou kladná čísla splňující $x + y + z = xyz$. Dokažte

(i) $x + y + z \geq 3\sqrt{3}$,
(ii) $xyz \geq 3\sqrt{3}$,
(iii) $xy + yz + zx \geq 9$.

Návod. Jensenova nerovnost po substituci, nebo jen AG nerovnost bez substituce.

Samozřejmě je otázkou, zda si takovou substitucí pomůžeme a zda ji vůbec potřebujeme. Odpověď (jak už to tak bývá) není jednoznačná. Dá se říci, že substituci většinou nepotřebujeme tam, kde lze nerovnost nějak jednoduše homogenizovat, a tam, kde ji lze převést (třeba i pomocí ztrátových metod) na několik použití předchozího cvičení. Pokud se ale rozhodneme substituci použít, můžeme potom využívat všechny známé rovnosti a nerovnosti platné v trojúhelníku, které jsou mnohdy velmi silné.[30] Všimněte si ale, že jsme se podmínky nezbavili, protože proměnné α, β, γ (všechny z intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$) jsou vázané podmínkou $\alpha + \beta + \gamma = \pi$.

Další možností je upravit podmínku na tvar

$$\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} = 1.$$

Po substituci $x' = \frac{1}{x}$, $y' = \frac{1}{y}$, $z' = \frac{1}{z}$ dostaneme ještě hezčí podmínku tvaru $x'y' + y'z' + z'x' = 1$, se kterou se většinou dá nějak vypořádat (homogenizace bývá jednoduchá).

Cvičení. Dokažte, že přechod od nerovnosti v proměnných $x, y, z > 0$ s podmínkou $xy + yz + zx = 1$ pomocí substituce

$$x = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}, \quad y = \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}, \quad z = \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}$$

k nerovnosti v proměnných α, β, γ, které jsou úhly v trojúhelníku (může být i tupoúhlý), je bezztrátový.

Cvičení. Pro kladná x, y, z splňující $x + y + z = xyz$ dokažte

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} \leq \frac{3}{2}.$$

---

[29] Z právě ukázané substituce plyne i jedno obecné poučení. Pokud narazíte na nějaké vztahy, které vám svou strukturou připomínají trigonometrické vztahy, vyzkoušejte, zda je opravdu možné úlohu ekvivalentně přeformulovat do světa trigonometrie. Často to bývá trik při řešení nejrůznějších úloh.

[30] Kapitola nerovností platných v trojúhelníku je už nad rámec tohoto textu. Nicméně alespoň můžeme odkázat na článek

`http://reflections.awesomemath.org/2007_6/trig_substitution.pdf`.

(Korea 1998)

Návod. Vzpomeňte na varovný příklad u Jensenovy nerovnosti.

Případ $x+y+z+2=xyz$

Stejně jako v předchozích případech uvažujme nerovnost v proměnných $x, y, z > 0$ s podmínkou $x+y+z+2=xyz$.

Cvičení. Nechť x, y, z jsou kladná čísla splňující $x+y+z+2=xyz$. Dokažte

(i) $x+y+z \geq 6$,
(ii) $xyz \geq 8$,
(iii) $xy+yz+zx \geq 12$.

Návod. (i) Převeďte na polynomickou nerovnost v proměnné $s = x+y+z$. Ta má například kořen $s = 6$, ale je nutné najít i další kořeny.

Tato podmínka je již o poznání nepříjemnější, protože obecně není vůbec snadné nerovnost homogenizovat. Pro nalezení vhodné substituce je potřeba podmínku vhodně upravit. Není těžké ověřit (roznásobte si!), že je ekvivalentní s podmínkou

$$\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+y}+\frac{1}{1+z}=1.$$

To těžké je na tento ekvivalentní tvar přijít. Zvolíme-li substituci $a = 1/(1+x)$, $b = 1/(1+y)$, $c = 1/(1+z)$, má podmínka tvar $a+b+c = 1$. Je snadné dopočítat, že $x = (1-a)/a = (b+c)/a$. Celkem tedy dostáváme, že z podmínky $x+y+z+2=xyz$ plyne existence kladných čísel a, b, c takových, že

$$x=\frac{b+c}{a}, \quad y=\frac{c+a}{b}, \quad z=\frac{a+b}{c}.$$

Naopak pokud taková a, b, c existují, je jen otázkou jednoduchého výpočtu ověřit, že

$$x+y+z+2=\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}+2=\frac{b+c}{a}\cdot\frac{c+a}{b}\cdot\frac{a+b}{c}=xyz.$$

Jedná se tedy znovu o bezztrátový přechod. Nová nerovnost bude homogenní nerovnost bez podmínky.

Cvičení. Dokažte, že nerovnost v proměnných $x, y, z > 0$ s podmínkou $xy+yz+zx+2xyz = 1$ lze bezztrátově převést na nerovnost v proměnných $a, b, c > 0$ bez podmínky.

Návod. $x = \frac{1}{x'}$.

Cvičení. Pro kladná x, y, z splňující $xy+yz+zx+xyz = 4$ dokažte

$$x+y+z \geq xy+yz+zx.$$

(Indie 1998)

Návod. $x = 2x'$ a po substituci a vynásobení jmenovateli použijte Schurovu nerovnost.

Příklad. Pro kladná x, y, z splňující $x+y+z+2=xyz$ dokažte

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z} \leq \sqrt{2(x+y+z+3)}.$$

Řešení. Na první pohled se zdá, že možná ani nebudeme substituci potřebovat, protože nerovnost vybízí k použití CS na odmocniny.

Podle CS na odmocniny platí $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z} \le \sqrt{3(x+y+z)}$. To bychom ale potom potřebovali dokázat nerovnost $\sqrt{3(x+y+z)} \le \sqrt{2(x+y+z+3)}$, neboli $x+y+z \le 6$, která podle jednoho z předchozích cvičení neplatí.

Substituce nám ale pomůže velmi efektivně. Nerovnost přejde na

$$\sqrt{\frac{b+c}{a}}+\sqrt{\frac{c+a}{b}}+\sqrt{\frac{a+b}{c}} \le \sqrt{2\left(\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}+3\right)} = \\ = \sqrt{2(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)}.$$

Poslední rovnost je vidět přičtením jedničky ke každému zlomku. A teď už můžeme slavit úspěch s toutéž myšlenkou

$$\sqrt{\frac{b+c}{a}}+\sqrt{\frac{c+a}{b}}+\sqrt{\frac{a+b}{c}} \le \sqrt{(b+c+c+a+a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)}.$$

Případ $x^2+y^2+z^2+2xyz=1$

Pokud vám ze substitucí vstávají vlasy hrůzou, potěší vás, že tato bude poslední, kterou se budeme zabývat. Stejně jako v případě $x+y+z=xyz$ najdeme souvislost se světem trojúhelníků.[31]. Protože v tomto případě bývá homogenizace mnohem obtížnější, může být goniometrická substituce opravdu dobrým východiskem. Ukážeme, že jsou-li α, β, γ úhly v trojúhelníku, platí

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma=1.$$

Použitím vztahu $2\cos\alpha\cos\beta=\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)$ a dalších známých vztahů upravujme

$$\cos^2\gamma+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma=\cos(\alpha+\beta)\left(\cos(\alpha+\beta)-2\cos\alpha\cos\beta\right)= \\ =-\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)=-\frac{\cos 2\alpha+\cos 2\beta}{2}= \\ =-\frac{(2\cos^2\alpha-1)+(2\cos^2\beta-1)}{2}=1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta.$$

Cvičení. Rozmyslete si, že přechod od nerovnosti v proměnných $x, y, z > 0$ s podmínkou x^2+ $+y^2+z^2+2xyz=1$ k nerovnosti v proměnných α, β, γ, které jsou úhly ostroúhlého trojúhelníku, pomocí substituce

$$x=\cos\alpha, \quad y=\cos\beta, \quad z=\cos\gamma$$

je bezztrátový.

Návod. Nejdříve si rozmyslete, že zadanou podmínku mohou splňovat jen čísla z intervalu $(0,1)$.

---

[31] To, že bychom vůbec nějakou souvislost měli hledat, lze nahlédnout z toho, že pokud vyřešíme rovnici $x^2+y^2+z^2+2xyz=1$ jako kvadratickou rovnici vzhledem k z, dostaneme $z=-\left(xy-\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\right)$ (řešení je pouze jedno, protože $z>0$). Tato rovnost má stejnou strukturu jako rovnost $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$.

Cvičení. Nechť kladná x, y, z splňují $x^2 + y^2 + z^2 + xyz = 4$. Dokažte

$$\sqrt{\frac{2-x}{2+x}} + \sqrt{\frac{2-y}{2+y}} + \sqrt{\frac{2-z}{2+z}} \geq \sqrt{3}.$$

Návod. Po substituci přejděte pomocí známých vzorců k polovičním úhlům.

Cvičení. Dokažte, že nerovnost v proměnných $x, y, z > 0$ s podmínku $xy+yz+zx+2xyz = 1$ lze bezztrátově převést na nerovnost v proměnných α, β, γ, které jsou úhly ostroúhlého trojúhelníku.

Návod. $xy = (\sqrt{xy})^2$.

Úprava výrazu

Jak už jsme naznačili, v posledních letech se vyvinulo mnoho silných metod k dokazování nerovností. Většina z nich je obklopena rozsáhlou teorií a ani se v našem seriálu neobjeví. Potěšující však je, že jedna z vůbec nejsilnějších metod žádnou teorii nepotřebuje. Budeme prostě jen kouzlit při úpravách a nerovnost převedeme do očividného tvaru. Věříme, že tato část seriálu patří k jeho zlatým hřebům, tak neváhejte a čtěte!

O co tedy jde?

Začněme příklady!

Příklad. Pro kladná čísla a,b,c ukažte

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc.$$

Řešení. Nerovnost ekvivalentně upravíme do tvaru

$$\frac{1}{2}(a+b+c)\left((a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\right) \geq 0,$$

z něhož je platnost původní nerovnosti již zcela patrná (roznásobte si!).

Příklad. Pro kladná reálná čísla ukažte nerovnost

$$2\sum_{\text{cyc}} x^7 \geq \sum_{\text{cyc}} x^5y^2 + y^5x^2.$$

Řešení. I tentokrát nám k řešení stačí nerovnost upravit, a to do tvaru

$$\sum_{\text{cyc}} \left(x^2 - y^2\right)\left(x^5 - y^5\right) \geq 0.$$

Příklad. Dokažte obecnou Schurovu nerovnost pro x, y, z kladná čísla

$$\sum_{\text{cyc}} x^\alpha (x-y)(x-z) \geq 0,$$

v níž α je kladné reálné číslo.

Řešení. Nerovnost je symetrická, zvolme tedy búno $x \geq y \geq z$ a upravme ekvivalentně na

$$x^{\alpha}(x-y)^2 + (y-z)(x-y)(x^{\alpha}-y^{\alpha}) + z^{\alpha}(x-z)(y-z) \geq 0.$$

Platnost je nyní též zřejmá.

Cvičení. Ověřte, že naše úpravy byly správné a uvědomte si, že upravené nerovnosti jsou již zřejmé.

Návod. Pro Schurovu nerovnost jsme začali úpravou $(x-z) = (x-y) + (y-z)$.

Tolik malá ochutnávka toho, jak se dají dokazovat nerovnosti, pokud ovládáme úpravu výrazu. Neděste se, pokud máte pocit, že na takové řešení nemůžete nikdy přijít. Vše se za pár okamžiků naučíme. Nejprve se ale rozehřejme na symetrických nerovnostech.

Muirhead, Schur a kostičky

Jistě si vzpomenete na tu spoustu homogenních nerovností, které jsme byli schopni dokázat AG mašinkou. Ovšem matematici jsou líné bytosti a ani takto účinný nástroj jim nestačil. Chtěli vědět, kdy mohou o nějaké takové nerovnosti prohlásit, že platí, aniž by museli počítat soustavu rovnic. No a kvůli tomu vymysleli následující obecnou nerovnost. Její důkaz bude zároveň první aplikací šikovných úprav. Začněme tím, že zavedeme nové značení pro symetrické nerovnosti.

Definice. *Buďte a, b, c nezáporná celá čísla. Pak symetrický výraz*

$$\sum_{\text{cyc}} \left(x^a y^b z^c + x^b y^a z^c\right), \quad \textit{kde } x, y, z \in \mathbb{R},$$

budeme zkráceně značit $[a, b, c]$, přičemž zvykem bývá psát exponenty v sestupném pořadí, tedy tak, aby platilo $a \geq b \geq c$.

Poznámka. Pamatujte, že $[a, b, c]$ je vždy součet **šesti** členů. Platí tedy například

$$[1,1,1] = 6xyz, \qquad [3,0,0] = 2(x^3+y^3+z^3).$$

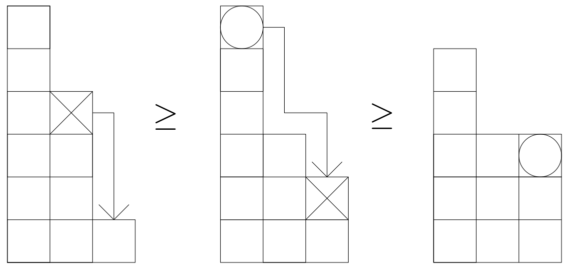
Tvrzení. (Muirheadova nerovnost) *Buďte a, b, c a a', b', c' nezáporná celá čísla taková, že $a \geq b \geq c$ a $a' \geq b' \geq c'$ a zároveň platí $a+b+c = a'+b'+c'$. Pak nerovnost $[a,b,c] \geq [a',b',c']$ platí pro všechna nezáporná x, y, z, právě když $a \geq a'$ a současně $a+b \geq a'+b'$.*

Poznámka. (O kostičkách) Předchozí neprůhledná podmínka má hezké grafické znázornění. Výraz $[a, b, c]$ znázorníme jako tři sloupce kostiček o výškách a, b, c.

V řeči kostiček pak nerovnost $[a,b,c] \geq [a',b',c']$ ($a \geq b \geq c$, $a' \geq b' \geq c'$) platí, právě když můžeme od sloupečků $[a,b,c]$ přejít k $[a',b',c']$ jen pomocí „shazování kostiček zleva doprava“.[32] Například nerovnost $[6,4,1] \geq [5,3,3]$ znázorníme takto:

---

[32] Muirheadova nerovnost ve skutečnosti platí i pro symetrické nerovnosti n proměnných, nejen pouze tří. K její přesné formulaci bychom využili právě „kostičkovou interpretaci“. Další zobecnění je, že exponenty a, b, c mohou být kladná reálná čísla. To ovšem ve skutečnosti Muirheadovu nerovnost nijak výrazně nezesiluje.



Pozorování. (SOS[33]) V jednom z motivačních příkladů jsme viděli, že nerovnost $[7,0,0] \geq$ $\geq [5,2,0]$ lze upravit do tvaru

$$\sum_{\text{cyc}} \left(x^2 - y^2\right)\left(x^5 - y^5\right) \geq 0.$$

Zkusme tedy, jaké nerovnosti lze získat modifikací tohoto tvaru. Buďte a, b nezáporná celá čísla a c, d přirozená čísla. Pak zcela jistě platí nerovnost

$$\sum_{\text{cyc}} x^a y^a z^b (x^c - y^c)(x^d - y^d) \geq 0.$$

Ta po roznásobení přejde v

$$[a+c+d, a, b] \geq [a+c, a+d, b],$$

přičemž na uspořádání čísel a, b, c, d neklademe žádné požadavky.

Cvičení. Dokažte Muirheadovu nerovnost.

Návod.

(i) Rozdělte na tři případy, z nichž se dá pak nerovnost sestavit. Prvním bude „shazování kostičky“ z první pozice na druhou (např. $[7,2,1] \geq [5,4,1]$), pak z druhé pozice na třetí (např. $[6,4,0] \geq [6,2,2]$) a nakonec z první pozice na třetí (např. $[2,1,0] \geq [1,1,1]$). Ukažte, že každou z možností umíme vyřešit pomocí SOS pozorování!

(ii) Při důkazu opačné implikace hledejte protipříklad ve tvaru ($x = y = 1$, z „velké“) pro $a' > a$ a ve tvaru $x = 1$, $y = z =$ „hodně“ pro $a' + b' > a + b$.

Poznámka. (Varovná!) Muirheadova nerovnost funguje opravdu jen pro symetrické nerovnosti. Například ani nerovnost $x^5 + y^5 + z^5 \geq x^4y + y^4z + z^4x$ není jejím důsledkem a je potřeba použít jiné metody (AG, permutační nerovnost atd.).

Poznámka. (O rovnosti) V Muirheadově nerovnosti nastává samozřejmě rovnost v případě $x = y = z$, ale to není všechno! Pokud „shazujeme kostičku“ pouze z první pozice na druhou, tak nastává rovnost i pro $x = y$ a $z = 0$ a cyklické obměny. To je velmi důležité, neb to znamená, že užití Muirheadovy nerovnosti není omezené pouze na nerovnosti s běžnou rovností (tj. $x = y = z$).

---

[33] Tuto podivnou zkratku brzy osvětlíme.

Cvičení. Sami si rozmyslete, že právě v tomto případě je v SOS pozorování $a > 0$ a tvrzení o rovnosti ověřte.

Než se vrhneme na sadu příkladů, ukažme si ještě jeden hodně obecný tvar Schurovy nerovnosti.

Tvrzení. (Schur) *Pro nezáporná čísla x, y, z a kladná čísla α, β platí nerovnost*

$$\sum_{\text{cyc}} x^{\alpha}\left(x^{\beta}-y^{\beta}\right)\left(x^{\beta}-z^{\beta}\right) \geq 0,$$

přičemž rovnost nastává v případech $x = y = z$, $x = 0, y = z$ a jejich cyklických obměnách.

Cvičení. Dokažte tento tvar Schurovy nerovnosti a ukažte, že po roznásobení má tvar

$$[\alpha+2\beta, 0, 0] + [\alpha, \beta, \beta] \geq 2[\alpha+\beta, \beta, 0].$$

Návod. Substitucí $x' = x^{\beta}$ atd. převeďte na jednodušší tvar, který jsme již dokázali v úvodu kapitoly o úpravě výrazu.

Cvičení. Pomocí Muirheada a Schura dokažte následující nerovnosti a pečlivě určete, kdy v nich nastává rovnost.

(i) $[12, 12, 0] + 2[12, 9, 3] + [9, 9, 6] \geq 3[11, 8, 5] + [8, 8, 8]$,
(ii) $4[5, 1, 0] + [4, 1, 1] + [2, 2, 2] \geq [4, 2, 0] + 3[3, 3, 0] + 2[3, 2, 1]$,
(iii) $3[6, 0, 0] + 2[5, 1, 0] + 2[3, 3, 0] \geq 2[4, 2, 0] + [4, 1, 1] + 4[3, 2, 1]$,
(iv) $[10, 1, 1] + 2[7, 5, 0] + [6, 3, 3] \geq [8, 2, 2] + [6, 5, 1] + [6, 4, 2] + [5, 5, 2]$,
(v) $25[6, 0, 0] + 230[5, 1, 0] + 115[4, 2, 0] + 10[3, 3, 0] + 80[4, 1, 1] \geq 336[3, 2, 1] + 124[2, 2, 2]$.

Roznásobování

Viděli jsme, že používáním symetrického zápisu lze i nerovnosti s mnoha členy rozumně napsat a pak kombinací Muirheada a Schura i dokázat. To je hlavní důvod, proč se velmi často vyplatí symetrické nerovnosti roznásobovat. Ve skutečnosti je to dokonce jedna z nejúčinnějších metod. Není sice zrovna elegantní a nápaditá, ale zato poměrně často funkční. Z minulého dílu už umíme pracovat s cyklickým zápisem, což se nám při roznásobování bude hodit. Ještě si řekneme něco o násobení v symetrickém zápisu.

Lemma. (O násobení) *Chceme-li vynásobit dva symetrické členy $[a, b, c]$ a $[a', b', c']$, můžeme očekávat, že vyjde 36 členů, tedy 6 symetrických členů. Tak tomu skutečně bude, a navíc tyto členy budou vypadat tak, že k exponentům a, b, c jednotlivě přičteme exponenty a', b', c', a to ve všech šesti možných pořadích (rozmyslete si, že ono násobení takhle opravdu funguje). Platí tedy*

$$[a, b, c] \times [a', b', c'] = [a+a', b+b', c+c'] + [a+a', b+c', c+b'] + [a+c', b+a', c+b'] + \ldots$$

Cvičení. Předchozí Lemma sice vypadá nevzhledně, ale velmi často se zjednodušuje. Zkuste si s jeho pomocí roznásobit

(i) $[3, 0, 0] \times [2, 1, 0]$
(ii) $[4, 2, 0] \times [3, 3, 0]$
(iii) $([3, 0, 0] - 2[1, 1, 1])^2$

Návod. Průběžně kontrolujte, že vám odpovídá počet členů. Všimněte si též, že poslední výraz je nezáporný, a rozmyslete si, že roznásobený výraz nejde „Muirheadovat".[34]

Nyní jste plně připraveni k tomu, abyste si zkusili pořádné roznásobování sami. Silně doporučujeme používat symetrický, a kde to nejde, tak alespoň cyklický zápis a stále si kontrolovat, že „sedí" počet členů. Tak tedy homogenizujte, roznásobujte a věřte, že to vyjde! V následujících cvičeních jsou x, y, z kladná čísla (ve třetím příkladě dokonce nezáporná).

Cvičení. Dokažte nerovnost

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{1}{x^3 + y^3 + xyz} \leq \frac{1}{xyz}.$$

(USAMO 1997)

Cvičení. Dokažte nerovnost

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{x^5 - x^2}{x^5 + y^2 + z^2} \geq 0, \quad \text{pro } xyz = 1.$$

(IMO 2005)

Cvičení. Dokažte nerovnost

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{1}{(x+y)^2} \geq \frac{9}{4}, \quad \text{pro } xy + yz + zx = 1.$$

(Írán 1996)

Vzpomeňte, že první dvě nerovnosti umíme řešit i bez roznásobení, takže se dá říci, že takhle pracný přístup není na místě.[35] Naopak u třetí nerovnosti není mezi matematickou veřejností znám žádný postup, který by se roznásobování zcela vyhnul. I to dokládá sílu roznásobování a Muirheadovy nerovnosti, navíc rovnost v poslední nerovnosti nastává i v nesymetrickém případě, jak jste si zajisté všimli. Pokud vás roznásobování nebaví, zcela to chápeme a slibujeme, že odteď dál budeme dělat už jen ony slibované „hezké úpravy".

Tvar SOS

Definice. *O výrazu $V(a, b, c)$ ve třech proměnných a, b, c řekneme, že jde zapsat ve tvaru SOS („Sum of squares"), pokud lze ekvivalentně upravit do tvaru*

$$S_a(b-c)^2 + S_b(c-a)^2 + S_c(a-b)^2,$$

kde S_a, S_b, S_c jsou nějaké výrazy proměnných a, b, c. Pokud po takové úpravě bude platit, že $S_a, S_b, S_c \geq 0$, je tím dokázána nerovnost $V(a, b, c) \geq 0$.

---

[34] To jen abyste viděli, že ani Muirhead není všemocný. Tady to ani není velké překvapení, neboť rovnost nastává ve velmi zvláštních případech (rozmyslete si).

[35] A byl by nejspíš odměněn $-i$.

Příklad. Například

$$\sum_{\text{cyc}} \left(x^5 - y^5\right)\left(x^2 - y^2\right)$$

je již téměř SOS tvarem. Stačí z každé závorky vytknout[36] $(x - y)$ atd. Všechny nerovnosti z SOS pozorování umíme tedy zapsat v SOS tvaru.

Poznámka. Může se ovšem stát, že platnou nerovnost upravíme do SOS tvaru, a přitom nebude platit $S_a, S_b, S_c \geq 0$. Už třeba pro Schurovu nerovnost získáme tvar

$$\frac{1}{2}\sum_{\text{cyc}}(a+b-c)(a-b)^2.$$

Takové případy budou ale velmi řídké, a navíc ani pak ještě není důvod skládat zbraně, jak později uvidíme. Ve skutečnosti je úprava do SOS tvaru v současnosti asi nejsilnější (široce použitelnou) zbraní na cyklické homogenní nerovnosti!

Pozorování. (Sčítání SOS) Pokud dva výrazy $V(a,b,c)$ a $V'(a,b,c)$ umíme zapsat ve tvaru SOS, pak tak umíme zapsat i jejich součet $V(a,b,c) + V'(a,b,c)$.

Důkaz. Prostě příslušné SOS tvary sečteme (rozmyslete si).

Tvrzení. (Zásadní!) *Každá homogenní (polynomická) symetrická nerovnost ve třech proměnných lze zapsat ve tvaru SOS.*

Příklad. Kupříkladu nerovnost $[6,1,0] \geq [3,2,2]$ zapíšeme v SOS tvaru díky šikovné úpravě

$$([6,1,0] - [5,2,0]) + ([5,2,0] - [3,2,2]) \geq 0,$$

po níž obě závorky umíme zapsat ve tvaru SOS (SOS pozorování). Právě s tímto úmyslem jsme také jeden člen přičítali a odečítali. Pak už snadno zapíšeme jako SOS celý součet.

Cvičení. Rozmyslete si, že každou roznásobenou homogenní symetrickou nerovnost půjde upravit podobně jako tu v předchozím příkladu.

Poznámka. Ve skutečnosti umíme takto upravit dokonce každou cyklickou nerovnost. Pro cyklické nerovnosti třetího stupně tento tvar snadno najdeme díky tomu, že umíme v SOS zapsat AG nerovnost pro tři prvky (a tedy i např. $x^3 + y^3 + z^3 \geq x^2y + y^2z + z^2x$). Vyšší stupně nás zatím nebudou zajímat.

Cvičení. Úpravou do SOS tvaru dokažte následující symetrickou nerovnost

$$[4,0,0] + 3[2,2,0] \geq 4[3,1,0]$$

a rozmyslete si, že Muirheadova nerovnost tu nestačí.

Návod. Opět si přičtěte a odečtěte vhodné členy tak, abyste mohli využít SOS pozorování.

Když se dva perou ...

Již víme, že pokud do SOS tvaru umíme upravit dva výrazy, umíme to i pro jejich součet. Tuto myšlenku využijeme při dokazování nerovností podobných té následující.

[36] Příslušný algebraický vzorec jistě znáte: $x^n - y^n = (x-y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \dots + xy^{n-2} + y^{n-1})$.

Příklad. Pro kladná čísla a, b, c dokažte

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+4\cdot\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}\geq 13.$$

Řešení. Rozložme pravou stranu na $9+4$. Zatímco odhad $(a+b+c)(1/a+1/b+1/c)\geq 9$ nám hraje do karet, pro zbylou část levé strany platí přesně opačný odhad, než jaký bychom potřebovali. Po úpravě na

$$\underbrace{(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)-9}_{\geq 0}+\underbrace{4\left(\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}-1\right)}_{\leq 0}\geq 0$$

můžeme dokazovanou nerovnost vnímat jako souboj dvou dílčích nerovností. Důležité ovšem je, že každou z těchto dílčích nerovností umíme zapsat v SOS tvaru. Půjde tak tedy zapsat i celá dokazovaná nerovnost. Tím je celá myšlenka odhalena a úlohu nyní snadno dokončíme

$$\sum_{\text{cyc}}\frac{(b-c)^2}{bc}+4\sum_{\text{cyc}}-\frac{(b-c)^2}{2(a^2+b^2+c^2)}=\sum_{\text{cyc}}S_a(b-c)^2\geq 0,$$

kde nerovnosti $S_a, S_b, S_c \geq 0$ dokážeme již bez mrknutí oka.

Podobné nerovnosti bývají opravdu silné (minimálně silnější než každá z dílčích), a proto velmi oceníme, že úprava výrazu je bezztrátová metoda. Běžné ztrátové postupy zde stačí málokdy.

Cvičení. Pro kladná čísla a, b, c dokažte nerovnost

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{3abc}\geq\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}.$$

Návod. Od obou stran odečtěte jedničku a upravte tak, aby se „zápasící“ nerovnosti daly zapsat v SOS tvaru.

Cvičení. Ukažte, že pro kladná čísla a, b, c platí nerovnost

$$\frac{abc}{a^3+b^3+c^3}+\frac{2}{3}\geq\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}.$$

(BRKOS 2009)

Návod. $2/3 = 1 - 1/3$.

Úprava do SOS

Nyní si ukážeme, jak do SOS tvaru upravovat cyklické nerovnosti se zlomky, aniž bychom je museli roznásobovat. Postup má vždy tutéž myšlenku, nerovnost rozdělíme na tři cyklické sčítance a snažíme se postupně vytýkat rozdíly. Mezikrokem tedy vždy bude tvar

$$\sum_{\text{cyc}}S'_a(b-c). \qquad (\heartsuit)$$

Při takových úpravách je dobré mít na paměti, že člen $(b-c)$ lze z nějakého (polynomického) výrazu vytknout, právě když je tento výraz pro $b=c$ nulový. Také není nutné upravovat přímo do SOS tvaru, jak víme z SOS pozorování, může stačit i tvar

$$\sum_{\text{cyc}} S'_a(b^r-c^r)(b^s-c^s), \qquad \text{kde } r,s>0.$$

Dá se říct, že výrazy a^n-b^n pro $n>1$, $n\in\mathbb{N}$ není třeba rozkládat dříve, než úplně na závěr úprav (o tom později). Dost řečí, je čas na příklady!

Příklad. Dokažte *Nesbittovu nerovnost* $\sum_{\text{cyc}} \frac{a}{b+c} \geq 3/2$ pro $a,b,c>0$.

Upravujme

$$\sum_{\text{cyc}} \left(\frac{a}{b+c}-\frac{1}{2}\right) = \sum_{\text{cyc}} \frac{(a-b)+(a-c)}{2(b+c)} = \frac{1}{2}\sum_{\text{cyc}}(a-b)\left(\frac{1}{b+c}-\frac{1}{c+a}\right)$$

(poslední úpravu důrazně doporučujeme si rozmyslet!). Nyní už alespoň tušíme, že i z posledních závorek bude možné vytknout $(a-b)$ (pro $a=b$ se rovnají) a dokončit tak úpravu na

$$\frac{1}{2}\sum_{\text{cyc}} \frac{(a-b)^2}{(b+c)(a+c)} \geq 0.$$

Cvičení. Pro $k,l\in\mathbb{N}$ a kladná čísla a,b,c dokažte nerovnost

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{a^{k+l}}{b^k+c^k} \geq \frac{1}{2}\cdot(a^l+b^l+c^l).$$

Návod. Od prvního zlomku odečtěte $(1/2)\cdot a^l$ apod. Vytýkejte rozdíly typu a^k-b^k.

V následujících cvičeních se při úpravě do tvaru ($\heartsuit$) v čitatelích objeví i smíšené členy (např. bc, b^2c atd.). Ty můžeme buď odhadnout (například jako $2bc \leq b^2+c^2$, $b^2c+c^2b \leq b^3+c^3$), anebo pokud toto nestačí (odhad je na špatnou stranu či slabší nerovnost neplatí), upravujeme tak, abychom si vyrobili jen rozdíly typu SOS a čiré mocniny (např. $2bc = b^2+c^2-(b-c)^2$ či $b^2c+c^2b = b^3+c^3-(b+c)(b-c)^2$). V těžších případech mohou opět pomoci SOS rozklady Muirheadova typu.

Cvičení. Buď $0<r\leq 1$ a a,b,c kladná čísla. Pak ukažte nerovnost

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{c^2-ab}{a^2+b^2+rc^2} \geq 0.$$

Návod. Zde stačí člen ab odhadnout.

Cvičení. Upravte do SOS tvaru následující nerovnost

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{bc}{b^2+c^2+3a^2} \leq \frac{3}{5}$$

a o její platnost se zatím nestarejte. :)

Návod. Zde dosaďte $2bc = b^2 + c^2 - (b-c)^2$.

Občas se stává, že nějaká nerovnost vzdoruje a nechce se jí nechat se pěkně upravit. Rozšíříme si proto náš arzenál šikovných (v tomto případě doslova trikových) úprav o tři další.

Trikové úpravy

Tvrzení. („Třetinová“ úprava)

$$\sum_{\text{cyc}} (b-c)S'_a = \frac{1}{3}\sum_{\text{cyc}} (b-c)\left((S'_a - S'_b) + (S'_a - S'_c)\right).$$

Důkaz. Označme levou stranu L a upravujme pomocí vztahu $(b-c) = (b-a) + (a-c)$

$$L = \sum_{\text{cyc}} \left((b-a) + (a-c)\right) S'_a = \sum_{\text{cyc}} (b-c)(-S'_b - S'_c) = L'.$$

Pak už jen napíšeme $3L = 2L + L'$ a jsme hotovi.

Tato úprava se samozřejmě hodí ve chvíli, kdy potřebujeme přejít od ($\heartsuit$) k SOS tvaru (rozdíly $S'_a - S'_b$ často pomohou).

Tvrzení. (VS[37] úprava)

$$\sum_{\text{cyc}} (a-b)(a-c)V'_a = \frac{1}{2}\sum_{\text{cyc}} (b-c)^2 \left(V'_b + V'_c - V'_a\right).$$

Cvičení. Dokažte úpravou pravé strany. Přesněji rozepsáním

$$(b-c)^2 = (b-c)\left((b-a) + (a-c)\right).$$

Tato úprava vlastně říká, že tvar z levé strany umíme snadno upravit na SOS, což se nám bude hodit například po použití „třetinové“ úpravy. Všimněte si, že přechod mezi koeficienty levé a pravé strany má stejnou strukturu jako známá substituce pro strany trojúhelníka ($a = x + y$ atd.).

Poslední úprava bude ihned jasná na příkladu, říkáme jí „přičtení nuly“. Sledujte

$$a^3b - b^3c = a^3b - a^3c + a^3c - b^3c = a^3(b-c) + c(a^3 - b^3).$$

Smysl této úpravy je též ve vytváření rozdílů.

Cvičení. Upravte do SOS následující výrazy

(i) $a^4 + b^4 + c^4 - a^3b + b^3c + c^3a$,
(ii) $a^3b^2 + b^3c^2 + c^3a^2 - a^2b^2c - b^2c^2a - c^2a^2b$,
(iii) $a^4b + b^4c + c^4a - a^3b^2 - b^3c^2 - c^3a^2$.

[37] VS znamená Vornicu-Schur, což je podobně jako SOS jeden z hezkých tvarů, do něhož lze nerovnosti upravovat. Ve VS úpravě ho naleznete na levé straně. Další vlastnosti tvaru VS jsou nad rámec tohoto textu.

Cvičení. Rozmyslete si, že tímto postupem lze upravit každou (roznásobenou) cyklickou nerovnost do tvaru SOS.

Když to vypadá zle ...

Nyní již budeme věřit tomu, že nerovnost do tvaru SOS upravit dokážeme. Doteď jsme museli doufat, že po úpravě bude platit $S_a, S_b, S_c \geq 0$, přičemž třeba již Schurova nerovnost ($S_a = \frac{1}{2}(b+c-a)$) toto nesplňuje. Ukažme si nyní dvě další podmínky, které nám platnost nerovnosti $\sum_{\mathrm{cyc}} S_a(b-c)^2 \geq 0$ zaručí. V obou z nich předpokládáme, že dokazovaná nerovnost je tohoto tvaru a je cyklická.

Tvrzení. (Podmínka A) *Vezměme búno uspořádání, v němž b je prostřední prvek (přesněji $\max(a,c) \geq b \geq \min(a,c)$). Pak dokazovaná nerovnost platí, pokud jsou splněny podmínky*

(i) $S_b \geq 0$,
(ii) $S_a + S_b \geq 0$,
(iii) $S_c + S_b \geq 0$.

Cvičení. Za pomocí rozkladu $(a-c)^2 = ((a-b)+(b-c))^2$ dokažte předchozí tvrzení.

Cvičení. V následujícím předpokládejte, že výrazy S_a, S_b, S_c $(a, b, c > 0)$ jsou jen cyklické záměny téhož výrazu, a dokažte pomocí předchozího tvrzení příslušné nerovnosti.

(i) $S_a = b^r + c^r - a^r$, kde $r > 0$ („dvojnásobný“ Schur),
(ii) $S_a = ab + ac - bc$,
(iii) $S_a = (b^2+c^2)(b+c-a)$,
(iv)
$$S_a = \frac{b+c-a}{2abc} - \frac{a}{(a+b)(b+c)(c+a)}.$$

Následující podmínka se hodí pouze pro symetrické nerovnosti (přesněji ukáže platnost nerovnosti pouze při jednom uspořádání).

Tvrzení. (Podmínka B) *Dokazovaná (symetrická) nerovnost platí, pokud jsou alespoň při jednom z uspořádání $a \geq b \geq c$, $c \geq b \geq a$ splněny následující podmínky:*

(i) $S_c \geq 0$,
(ii) $S_b \geq 0$,
(iii) $a^2 S_b + b^2 S_a \geq 0$.

Lemma. *Při obou uspořádáních $a \geq b \geq c$ i $c \geq b \geq a$ platí nerovnost*
$$\frac{a-c}{b-c} \geq \frac{a}{b}.$$

Cvičení. Dokažte předchozí lemma (pozor na násobení zápornými čísly) a použijte ho v důkazu podmínky B. Předtím ale vytkněte (při uspořádání $a \geq b \geq c$) ze součtu $S_b(c-a)^2 + S_a(b-c)^2$ člen $(b-c)^2$. Pro druhé uspořádání postupujte obdobně.

Cvičení. Předpokládejte, že výrazy S_a, S_b, S_c, $(a, b, c > 0)$ jsou opět cyklické záměny téhož výrazu a dokažte pomocí podmínky B příslušné symetrické nerovnosti.

(i) $S_a = b^r + c^r - a^r$, kde $r > 0$,
(ii) $S_a = a^2(c+b-a)$,
(iii) $S_a = 1 - a/(b+c)$,
(iv) $S_a = 2/(bc) - 1/a^2$, kde a, b, c jsou strany trojúhelníka.

Návod. Pro cvičení (iv) předpokládejte uspořádání $c \geq b \geq a$.

Poznámka. Upozorňujeme, že ani jedna z podmínek nemá tvar ekvivalence. Mohou se tedy vyskytnout (a opravdu se vyskytují) takové platné nerovnosti, které stále nebudeme umět z jejich SOS tvaru dokázat.[38] Ručíme vám ovšem za to, že takové nerovnosti jsou mimořádně obtížné. Vždyť musí být o dost jemnější než Schur i Muirhead, aby naším sítem prošly! Běžné odhady pak už téměř vůbec nemají šanci ...

Bijte je!

Vybaveni jednou z nejsilnějších technik k dokazování nerovností vůbec si nyní můžete zkusit dokázat ty nejdospělejší nerovnosti, které současný matematický svět zná (většina má vietnamský původ, což hovoří samo za sebe). Držte si klobouky!

Cvičení. Pro kladná čísla a, b, c dokažte nerovnost

$$\sum_{\text{cyc}} \left(\frac{a}{b+c}\right) + \frac{abc}{2(a^3+b^3+c^3)} \geq \frac{5}{3}.$$

Návod. V SOS tvaru rovnou dokažte $S_a, S_b, S_c \geq 0$.

Cvičení. Pro kladná čísla a, b, c dokažte nerovnost

$$(a+b)(b+c)(c+a)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) \leq 8a^2b^2c^2.$$

Návod. Napovíme, že $(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) \leq abc$ je jen jiný tvar Schurovy nerovnosti. Upravujte tak, aby se obě „zápasící“ nerovnosti objevily v základních tvarech. Pro SOS použijte podmínku A.

Cvičení. Jsou dána kladná čísla a, b, c. Nalezněte největší reálné číslo k takové, aby platila nerovnost

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) + k \cdot \frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2} \geq 9+k.$$

Návod. Upravte do SOS. Volbou $b = c$ odhadněte maximální k. K důkazu pak použijte podmínku A.

Cvičení. Dokažte nerovnost

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{1}{(x+y)^2} \geq \frac{9}{4},$$

v níž jsou x, y, z kladná čísla splňující $xy + yz + zx = 1$. (Írán 1996)

Návod. Homogenizujte, substituujte $a = x + y$ atd. a v SOS tvaru použijte podmínku B. Při převádění do SOS se nezapomeňte elegantně zbavovat smíšených členů.

Cvičení. (Těžší) Dokažte následující nerovnost

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{bc}{b^2+c^2+3a^2} \leq \frac{3}{5}$$

[38] Sice existují i další podmínky pro platnost nerovností v SOS tvaru, ale ty už přesahují rámec tohoto seriálu. A navíc ani ty nejsou všemocné.

pro kladná čísla a, b, c. (Vietnam)

Návod. Nelekněte se komplikovanějšího SOS tvaru a použijte podmínku A.

Hölderova nerovnost[39]

Nyní se naučíme používat jedno zobecnění CS, kterému se říká Hölderova nerovnost.[40] Rovnou řekněme, že odhady, které tato nerovnost dává, patří zpravidla mezi ty nejsilnější. Jelikož jsme již odhalili, že se jedná o zobecnění CS, asi tušíte, že půjde dobře používat na zlomky a odmocniny. O co tedy jde?

Tvrzení. (Hölderova nerovnost) *Buď $n \in \mathbb{N}$ a mějme kladná čísla $a_1, \dots, a_n$, $b_1, \dots, b_n$ a $c_1, \dots, c_n$. Platí následující nerovnost*

$$(a_1^3 + a_2^3 + \cdots + a_n^3)(b_1^3 + b_2^3 + \cdots + b_n^3)(c_1^3 + c_2^3 + \cdots + c_n^3) \geq (a_1b_1c_1 + a_2b_2c_2 + \cdots + a_nb_nc_n)^3,$$

přičemž rovnost nastává, právě když existují reálná čísla λ, κ taková, že $a_i = \lambda b_i = \kappa c_i$ pro každé $i \in \{1, 2 \dots n\}$.

Ano, to je přesně ta nerovnost, kterou jste měli dokázat v první seriálové sérii! Její důkaz, včetně vyšetření rovnosti, tedy najdete mezi vzorovými řešeními. Používání této nerovnosti je velmi obdobné používání CS. Zvykneme si snadno!

Cvičení. Pro kladná čísla dokažte následující nerovnosti:

(i) $(a^3 + b^3 + c^3)(1 + 1 + 1)(1 + 1 + 1) \geq (a + b + c)^3$,
(ii) $(a^3 + 1)(b^3 + 1)(c^3 + 1) \geq (abc + 1)^3$,
(iii) $(a^3 + 1 + 1)(1 + b^3 + 1)(1 + 1 + c^3) \geq (a + b + c)^3$,
(iv) $(a^3 + 1)^2(b^3 + 1) \geq (a^2b + 1)^3$,
(v) $(a^3 + 1 + 1)^2(2 + b^3) \geq (2a + b)^3$,
(vi) $(a^3 + 1 + 1)^2(2 + b^3) \geq (a^2 + b + 1)^3$,
(vii) $(a^2 + ab + b^2)(b^2 + bc + c^2)(c^2 + ac + a^2) \geq (ab + bc + ca)^3$.

Nyní si ukážeme, jak se Hölderova nerovnost používá při práci s odmocninami.

Příklad. Pro kladná čísla a, b, c ukažte

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{a}{\sqrt{a^2 + 8bc}} \geq 1.$$

(IMO 2001)

Řešení. Podle Hölderovy nerovnosti platí

$$\left(\sum_{\text{cyc}} \frac{a}{\sqrt{a^2 + 8bc}} \right)^2 \left(\sum_{\text{cyc}} a(a^2 + 8bc) \right) \geq (a + b + c)^3.$$

[39] Otto Hölder (1859-1937)

[40] Ve skutečnosti se běžně tento název používá spíše pro jinou nerovnost, známou z matematické analýzy. My budeme používat speciální tvar takzvané zobecněné Hölderovy nerovnosti. Mezi matematiky, kteří se věnují nerovnostem, se i tomuto tvaru neřekne jinak než Hölder, proto se budeme držet tohoto názvu.

Díky tomu máme (dostatečně těsný) odhad na levou stranu a zbytek už je velmi snadný.

Příklad. Kladná čísla a, b, c splňují $ab + bc + ca = 1$. Dokažte nerovnost

$$\sum_{\text{cyc}} \sqrt[3]{\frac{1}{a} + 6b} \leq \frac{1}{abc}.$$

(IMO shortlist 2004)

Řešení. Hölderovu nerovnost použijeme následovně

$$\left(\sum_{\text{cyc}} \frac{1}{a}\right)\left(\sum_{\text{cyc}}(6ab+1)\right)(1+1+1) \geq \left(\sum_{\text{cyc}} \left(\frac{1}{a} + 6b\right)^{\frac{1}{3}}\right)^3.$$

V prvních dvou závorkách můžeme použít zadanou podmínku. Zbyde dokázat $\left(\frac{1}{abc}\right)^3 \geq$ $\geq \frac{1}{abc} \cdot 9 \cdot 3$ což už je snadné (opět využijte podmínku).

Základní myšlenka práce s odmocninami je, doufáme, již jasná. Další zajímavá použití této nerovnosti najdete ve cvičeních.

Cvičení. Pro kladná čísla a, b, c dokažte

$$(a^5 - a^2 + 3)(b^5 - b^2 + 3)(c^5 - c^2 + 3) \geq (a + b + c)^3.$$

(USAMO 2002)

Návod. Nejprve ukažte $a^5 - a^2 + 3 \geq a^3 + 2$.

Cvičení. Buďte $a_1, a_2, \ldots, a_n$ kladná čísla. Dokažte nerovnost

$$(a_1^3 + 1) \cdots (a_n^3 + 1) \geq (a_1^2 a_2 + 1) \cdots (a_n^2 a_1 + 1).$$

(Česko–slovensko–polské střetnutí)

Návod. Vynásobte n Hölderových nerovností.

Cvičení. Pro kladná čísla a, b, c dokažte

$$\sum_{\text{cyc}} \sqrt{\frac{a^3}{a^3 + (b+c)^3}} \geq 1.$$

Návod. Použijte Höldera podobně jako v prvním příkladu. Na jeho pravé straně si vyrobte $(a^2 + b^2 + c^2)^3$. Po roznásobení zbude dokázat nerovnost $3 \cdot [4, 2, 0] + [2, 2, 2] \geq [3, 3, 0] + 3 \cdot [3, 2, 1]$.

Cvičení. Pro nezáporná čísla x, y, z platí $x^2 + y^2 + z^2 = 3$. Dokažte

$$\sum_{\text{cyc}} x \sqrt[3]{y + z} \leq 3\sqrt[3]{2}.$$

Návod. Postupujte jako ve druhém návodném příkladu.

Zbraň hromadného ničení

Metoda, kterou si za za chvíli popíšeme, se v angličtině nazývá *Abstract Concreteness Method*[41] a lze ji použít jen pro symetrické nerovnosti. My jí budeme soukromě říkat kanon na symetrické nerovnosti, protože (jak dále uvidíte) tato metoda je opravdu silná. Rovnou varujeme, že na některé úlohy je „až příliš silná“. Jinak řečeno, úloha může mít nějaké snadné řešení a pokud ji vyřešíte touto metodou, používáte ve skutečnosti mnohem silnější tvrzení. Navíc se jedná o poměrně novou metodu[42], takže vám zcela nezaručujeme, že vám projde například na českých olympiádách jako „známé“ tvrzení.

Budeme uvažovat symetrické nerovnosti $P(a, b, c) \geq 0$ třech proměnných a, b, c (tentokrát mohou být i záporné) bez podmínky a takové, že P je polynom. Nejdříve si formou cvičení rozmyslíme, že takové nerovnosti lze vždy přepsat pomocí nových proměnných

$$u = a + b + c, \quad v = ab + bc + ca, \quad w = abc,$$

což je tzv. symetrická substituce pro tři proměnné. S touto substitucí (pro dvě proměnné) jsme se již setkali v minulém dílu a myšlenka tohoto tvrzení a vlastně i celého kanonu je opravdu podobná.

Pro účely následujících cvičení si zavedeme vhodné označení. Budeme psát

$$\begin{aligned} S(m) &= a^m + b^m + c^m, \\ R(m, n) &= a^m b^n + b^m c^n + c^m a^n + a^n b^m + b^n c^m + c^n a^m, \\ T(m, n, p) &= a^m b^n c^p + a^p b^m c^n + a^n b^p c^m + a^n b^m c^p + a^p b^n c^m + a^m b^p c^n, \end{aligned}$$

kde $m, n, p \in \mathbb{N}_0$, $m \geq n \geq p \geq 0$.

Cvičení. Polynom P lze vyjádřit jako součet nějakých násobků polynomů „typu“ S, R, T.

Návod. Pokud P obsahuje člen $a^m b^n c^p$, pak obsahuje i dalších pět členů, které vzniknou permutací exponentů (P je symetrický!).

Cvičení. Ukažte, že stačí, když budeme umět pomocí u, v, w zapsat polynomy „typu“ S.

Návod. Použijte

(i) $T(m, n, p) = (abc)^p R(m - p, n - p)$,
(ii) $R(m, n) = S(m)S(n) - S(m + n)$.

Cvičení. Polynom $S(m)$ lze pro každé $m \in \mathbb{N}$ zapsat pomocí u, v, w.

Návod. Postupujte indukcí[43] a použijte

(i) $S(m) = (a + b + c)S(m - 1) - R(m - 1, 1)$,
(ii) $R(m-1, 1) = (ab+bc+ca)S(m-2)-T(m-2, 1, 1) = (ab+bc+ca)S(m-2)-abcS(m-3)$.

---

[41] Možná ještě častější pojmenování je *ABC method*, nebo *UVW method*. Našemu pojetí nejvíce odpovídá název *UVW method*.

[42] Na internetovém fóru *Mathlinks* jsou první zmínky o této metodě z roku 2005.

[43] Skutečně se jedná o analogii důkazu pro dvě proměnné, ačkoliv jsme jej tehdy formulovali sporem.

Nyní tedy místo polynomu $P(a, b, c)$ dostáváme polynom $Q(u, v, w)$, který už sice nemusí být vůbec symetrický, ale zato jsme poměrně výrazně snížili jeho stupeň (stupeň polynomu značíme deg) v následujícím smyslu: Budeme-li se na chvíli dívat na polynom $Q(u, v, w)$ jako na polynom pouze jedné proměnné w a budeme-li značit $\deg_w Q$ stupeň Q vzhledem k w, pak jistě $\deg_w Q \leq \frac{1}{3} \deg P$. To proto, že $w = abc$ je v původních proměnných stupně 3.

Vezměme teď u, v pevná a dívejme se na výraz $Q(u, v, w)$ jako na funkci jedné proměnné w, tj. $Q(w)$. Představme si na chvíli, že by byl polynom $Q(w)$ například lineární (to nastane pro všechny P až do pátého stupně!). V druhém dílu seriálu jsme ukazovali, že potom $Q(w)$ nabývá svých extrémů jen v krajních bodech svého definičního oboru. My sice definiční obor[44] neznáme, ukážeme však, že v každém jeho krajním bodě (a to pro naprosto libovolný polynom Q – nemusí být jen lineární) se alespoň dvě ze tří proměnných a, b, c rovnají. To znamená, že pro polynomy P do pátého stupně nám potom bude stačit původní nerovnost dokázat búno v případě $b = c$. Zda nám to pomůže i pro polynomy vyšších stupňů, rozebereme později.

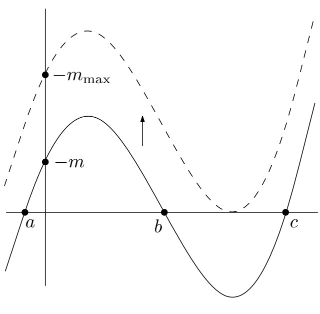
Krajní body definičního oboru

Předpokládejme, že jsme přešli od symetrického polynomu $P(a, b, c)$ k polynomu $Q(u, v, w)$ pomocí substituce $u = a + b + c$, $v = ab + bc + ca$, $w = abc$. Definičním oborem budeme rozumět množinu všech trojic (k, l, m), pro něž existují reálná a, b, c taková, že

$$a + b + c = k, \quad ab + bc + ca = l, \quad abc = m.$$

Budeme se nyní zabývat „určením“ definičního oboru. Uvozovky proto, že jej vlastně ani neurčíme, pouze zjistíme, že v každém jeho krajním bodě se musí alespoň dvě ze tří proměnných a, b, c rovnat.

Soupeř nám zadal dvě reálná čísla k, l. Naším cílem bude zjistit, pro jaká reálná m existují reálná čísla a, b, c taková, že $a + b + c = k$, $ab + bc + ca = l$, $abc = m$. K tomu použijeme trik s polynomem a Viètovými vzorci. Podle nich totiž kořeny α, β, γ polynomu $R_m(x) = x^3 - kx^2 + lx - m$ splňují právě vztahy $\alpha + \beta + \gamma = k$, $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = l$, $\alpha\beta\gamma = m$, a pokud jsou tato čísla reálná, jsou to hledaná a, b, c. Tím jsme úlohu přeformulovali tak, že hledaná reálná čísla a, b, c existují, právě když polynom $R_m(x)$ má tři reálné kořeny (ne nutně různé). Předpokládejme, že pro daná k, l existuje aspoň jedno $m \in \mathbb{R}$ takové, že $R_m(x)$ má tři reálné kořeny. S číslem m začneme pohybovat a zajímá nás, zda má polynom $R_m(x)$ stále tři reálné kořeny. Pomocí m měníme „výšku“ grafu funkce $R(x)$ jako na obrázku.



[44] O definičním oboru mluvíme proto, že zdaleka ne pro všechna čísla u, v, w existují reálná a, b, c taková, aby $a + b + c = u$, $ab + bc + ca = v$, $abc = w$. Například pro $u = 1$, $v = 1$ a $w = 0$ taková a, b, c jistě najít nelze.

V průběhu pohybu (na obrázku $-m$ zvětšujeme) se k sobě začnou nějaké dva kořeny (na obrázku b, c) přibližovat, až nakonec pro $m = m_{\max}$ splynou ve dvojnásobný kořen. Pokud $-m$ ještě zvětšíme, bude mít rovnice $R_m(x) = 0$ už jen jeden reálný kořen. Tedy právě trojice $(k, l, m_{\max})$ je krajní bod definičního oboru a právě v tomto okamžiku jsou dva kořeny stejné.

Uvedený důkaz je sice „důkaz obrázkem“, ale rozhodli jsme se jej upřednostnit před exaktním důkazem. Přesto nyní naznačíme, kudy by se jeho precizní provedení mělo ubírat.[45] Vezmeme trojici (k, l, m), pro kterou příslušná a, b, c existují. Pak existují a', b', pro něž $R'_m(a') = R'_m(b') = 0$ a přitom $R_m(a') \geq 0$, $R_m(b') \leq 0$. Existuje proto $m_{\max}$ takové, že $R_{m_{\max}}(b') = 0$, a zřejmě $R'_{m_{\max}}(b') = R'_m(b') = 0$, takže b' je dvojnásobný kořen polynomu $R_{m_{\max}}$ a navíc stále ještě existuje další kořen $\widetilde{a}$. Potom podle Viètových vzorců platí $\widetilde{a} + b' + b' = k$, $\widetilde{a}b' + b'b' + b'\widetilde{a} = l$, $\widetilde{a}b'b' = m_{\max} \leq m$ a přitom trojice $(k, l, m_{\max})$ je krajní bod definičního oboru.

Zobecnění a aplikace

Zformulujeme a dokážeme si několik tvrzení. Ve všech se předpokládá, že je dán symetrický polynom $P(a, b, c)$ a substitucí získáme polynom $Q(u, v, w)$.

Tvrzení. *Je-li Q monotónní vzhledem k w, pak P nabývá extrému pro $(a-b)(b-c)(c-a) = 0$.*

Důkaz. Monotónní funkce (například lineární) nabývá svých extrému v krajních bodech svého definičního oboru. Víme však, že ve všech krajních bodech definičního oboru polynomu Q se alespoň dvě z proměnných a, b, c rovnají, což lze ekvivalentně napsat jako $(a-b)(b-c)(c-a) = 0$.

Důsledkem tohoto tvrzení je, že každý polynom P stupně nejvýše 5 nabývá svých extrémů pro $(a-b)(b-c)(c-a) = 0$.

Tvrzení.

(i) *Je-li Q konvexní vzhledem k w, pak P nabývá svého maxima pro $(a-b)(b-c)(c-a) = 0$.*
(ii) *Je-li Q konkávní vzhledem k w, pak P nabývá svého minima pro $(a-b)(b-c)(c-a) = 0$.*

Důkaz.

(i) Konvexní funkce (například kvadratická s kladným vedoucím koeficientem) nabývá svého maxima v krajních bodech svého definičního oboru, proto nutně $(a-b)(b-c)(c-a) = 0$.
(ii) Podobně konkávní funkce (například kvadratická se záporným vedoucím koeficientem) nabývá minima na krajích a závěr je stejný.

Důsledkem tohoto tvrzení je, že každý polynom P stupně nejvýše 8 nabývá svého minima nebo maxima (záleží jen na znaménku před w) v případě $(a-b)(b-c)(c-a) = 0$.

Tvrzení. *Je-li P symetrický polynom v proměnných $a, b, c \geq 0$ a je-li jemu příslušný polynom Q monotónní vzhledem k w, pak P nabývá extrému pro $(a-b)(b-c)(c-a) = 0$ nebo $abc = 0$.*
Analogicky platí i předchozí dvě tvrzení.

Důkaz. Podmínka $a, b, c \geq 0$ znamená, že všechny tři kořeny polynomu R_m (viz předchozí sekce) musí být kladné. Při hýbání číslem m se tedy může stát, že jeden z kořenů bude roven nule dříve, než zbývající dva kořeny splynou ve dvojnásobný kořen, takže potom $w = abc = 0$.

Poznámka. Často bývá podmínka $a, b, c \geq 0$ nahrazena podmínkou $a, b, c > 0$. V takové situaci je rovněž bezpodmínečně nutné rozebrat případ $abc = 0$ (intuitivně proto, že se k nule můžeme

[45] V následujícím odstavci používáme pojem derivace. Pokud jsi dobře pochopil důkaz obrázkem, nic neztratíš, když jej nebudeš číst.

libovolně přiblížit). V momentě, kdy nerovnost dokážeme pro $a, b, c \geq 0$, dokázali jsme o něco více, než se po nás chtělo, takže původní nerovnost pro $a, b, c > 0$ jistě platí.[46]

Poznámka. Všechna tvrzení jsme sice formulovali pro polynomy, ale ve skutečnosti je lze ještě o něco více zobecnit. Kanon lze použít i v případech, kdy výrazy (například zlomky, odmocniny) lze prostě jen přepsat pomocí symetrické substituce a nová funkce je vzhledem k w monotónní, resp. konvexní nebo konkávní.

Pro úplnost ještě dodejme, že ani konvexita nebo konkavita není v důkazech vlastně nijak klíčová (použili jsme je jen pro názornost a proto, že to je nejčastější případ). Obecně by nám stačila jakákoliv funkce, u níž máme jistotu, že nabývá svého maxima nebo minima v krajních bodech svého definičního oboru.

Příklad. Pro kladná a, b, c dokažte

$$(ab + bc + ca)\left(\frac{1}{(a+b)^2} + \frac{1}{(b+c)^2} + \frac{1}{(c+a)^2}\right) \geq \frac{9}{4}.$$

(Írán 1996)

Řešení. Nerovnost je zřejmě symetrická. Po roznásobení je ekvivalentní s

$$4(ab + bc + ca)\left(\sum_{\text{cyc}}(a+b)^2(b+c)^2\right) - 9(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2 \geq 0.$$

Samozřejmě bychom nyní mohli najít přepis do proměnných u, v, w, ale to je poměrně dost počítání. Bude stačit, když si všimneme, že velká závorka je jen čtvrtého stupně, takže bude nejvýše lineární vzhledem k w. Součin $(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2$ je vzhledem k w kvadratický s kladným koeficientem před w^2. Proto je na levé straně nerovnosti funkce kvadratická vzhledem k w se záporným koeficientem před w^2, tedy o konkávní funkce, která svého minima nabývá jen v krajních bodech. Můžeme tedy použít kanon. Stačí dokázat dva případy

(i) $(a-b)(b-c)(c-a) = 0$. Búno $b = c$, takže potřebujeme dokázat

$$4(2ab + b^2)\left(2(a+b)^2(2b)^2 + (a+b)^4\right) - 9(a+b)^4(2b)^2 \geq 0,$$

což můžeme ihned vydělit $4(a+b)^2$. Navíc je nerovnost stále homogenní, takže můžeme búno položit $b = 1$. Zbývá dokázat jen nerovnost jedné proměnné tvaru

$$(2a+1)\left(8 + (a+1)^2\right) - 9(a+1)^2 \geq 0.$$

Ta je však velmi jednoduchá, protože je (po chvilce úprav) ekvivalentní s $a^3 + a \geq 2a^2$, která je zřejmá (AG).

(ii) $abc = 0$. Búno $c = 0$, takže potřebujeme dokázat

$$4ab\left((a+b)^2(a^2+b^2) + a^2b^2\right) - 9(a+b)^2a^2b^2 \geq 0.$$

Podobným postupem jako v předchozím případě (búno $b = 1$) zjistíme, že stačí dokázat jednoduchou ekvivalentní nerovnost $4a^4 + 4 \geq a^3 + 6a^2 + a$ (opět AG).

---

[46]Na první pohled ale není zcela jasné, zda si neuškodíme, protože nevíme, zda nerovnost $P(a, b, c) \geq 0$ platná pro $a, b, c > 0$ musí nutně platit i pro $a, b, c \geq 0$. Prozradíme, že nerovnost opravdu musí platit i pro $a, b, c \geq 0$, ale bohužel korektní zdůvodnění umíme provést jen pomocí pojmu limita, takže jej zde nebudeme uvádět.

Příklad. Pro kladná a, b, c splňující $ab + bc + ca = 1$ dokažte

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{1}{2a + 2bc + 1} \geq 1.$$

Řešení. Představme si, že nerovnost roznásobíme. Potom na levé straně straně bude polynom stupně 4 a na pravé polynom stupně 6. Musíme si ale rozmyslet, jak naložíme s podmínkou ze zadání, protože kvůli ní nelze kanon přímočaře použít. Lze ale velmi snadno provést homogenizaci pomocí výrazu $\sqrt{ab + bc + ca} = \sqrt{v} = 1$. Po homogenizaci sice můžeme dostat funkci, která není polynomem, ale na druhou stranu se nezmění stupeň vzhledem k w. Po substituci má nerovnost tvar $0 \geq 8w^2 + A(u, v)w + B(u, v)$, kde A, B jsou nějaké funkce proměnných u, v. Na pravé straně je zřejmě konvexní funkce. Hledáme její maximum, kterého nabývá jedině v krajních bodech definičního oboru. Vzhledem k tomu, že homogenizovaná nerovnost je ekvivalentní původní nerovnosti, můžeme použít kanon. Homogenizovanou nerovnost tedy stačí dokázat v případech $abc = 0$ a $(a - b)(b - c)(c - a) = 0$. Díky zmíněné ekvivalenci tak víme, že i původní nerovnost stačí dokázat v těchto dvou případech.

V prvním případě búno $a = 0$ a zbývá dokázat nerovnost

$$\frac{1}{2bc + 1} + \frac{1}{2b + 1} + \frac{1}{2c + 1} \geq 1$$

za podmínky $bc = 1$, což ponecháváme za cvičení. Ve druhém případě búno $b = c$ a zbývá dokázat

$$\frac{1}{2a + 2b^2 + 1} + \frac{2}{2b + 2ab + 1} \geq 1$$

za podmínky $2ab + b^2 = 1$, což rovněž přenecháme za cvičení (z podmínky vyjádřete a, dosaďte, roznásobte a využijte, že $b \in \langle 0, 1 \rangle$), nezapomeňte si hlídat znaménka.

Poznámka. Jak moc nám vlastně vadí nerovnosti s podmínkou při použití kanonu? Lze obecně říci, že nám nikdy nemůže bránit taková podmínka, která lze zapsat pomocí u, v. Pokud však podmínka obsahuje i w, musíme si dát pozor, jaká funkce vznikne po homogenizaci.

Poznámka. Zajisté jste si všimli, že v předchozích nerovnostech nastává rovnost v ne zcela symetrických případech. Síla metody ABC je v tom, že i takovéto nepříjemné nerovnosti (standardní prostředky mají pramalou šanci) dokáže bezztrátově (!) převést na (byť občas pracné) obyčejné počítání s polynomy.

Poznámka. Upozorňujeme, že existují i takové symetrické nerovnosti, v nichž nastává rovnost i pro tři naprosto různá čísla. Příkladem takové nerovnosti může být $([3, 0, 0] - 2[1, 1, 1])^2 \geq 0$, v níž nastává rovnost například pro $x = 1, y = 2, z = 3 \ldots$ Takže nikdy nelze říci, že díky symetrii nerovnosti nastane rovnost v symetrickém případě.

Cvičení. Pro $x, y, z > 0$ dokažte[47]

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz + 1 \geq 2(xy + yz + zx).$$

Cvičení. Pro libovolná (tedy ne nutně kladná!) reálná čísla x, y, z splňující $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ dokažte

$$2(x + y + z) - xyz \leq 10. \qquad \text{(Vietnam)}$$

[47] To je přesně úloha na přemýšlení z minulého dílu.

Návod. Polynom, který zbude dokázat, bude vypadat trochu hrůzostrašně, ale dvojka je jeho dvojnásobný kořen.

Cyklické nerovnosti

S cyklickými nerovnostmi se setkáváme mnohem častěji než se symetrickými, a to prostě proto, že bývají těžší. Jak jsme už viděli, na symetrické nerovnosti máme opravdu velmi silné zbraně, zatímco u těch pouze cyklických se náš arzenál značně ztenčuje. Přesto ale nejsme bezmocní, ukažme si některé z našich možností.

Bezztrátová symetrizace

Ano, prostě se pokusíme cyklickou nerovnost převést na symetrickou, u které jsou naše šance mnohonásobně větší. Postup je sice bezztrátový, ale jak už to tak bývá, za bezztrátovost těžce zaplatíme.

Tvrzení. *Nechť $V(a, b, c)$ je libovolný cyklický výraz v proměnných a, b, c. Potom pro všechna a, b, c platí $V(a, b, c) \geq 0$, právě když jsou splněny zároveň dvě nerovnosti:*

$$V(a, b, c) \cdot V(b, a, c) \geq 0, \qquad V(a, b, c) + V(b, a, c) \geq 0.$$

Důkaz. Pokud pro všechna[48] a, b, c platí $V(a, b, c) \geq 0$, pak zřejmě i $V(b, a, c) \geq 0$, takže i jejich součin a součet je nezáporný.

Opačnou implikaci si uvědomíme tak, že uvážíme dvě reálná čísla x, y, jejichž součet i součin je nezáporný, tj. $x + y \geq 0$, $xy \geq 0$. Pak jistě musí být obě nezáporná, tj. $x \geq 0$, $y \geq 0$. Místo x, y si lze však představit $V(a, b, c)$ a $V(b, a, c)$.

Tato metoda sice vypadá nádherně, ale bohužel přináší jen dočasný pocit vítězství. Jednak je potřeba dokázat dvě nerovnosti, ale hlavně jedna z nich je dvojnásobného stupně. Každopádně není od věci ji vyzkoušet (zvláště pokud už není jiný nápad).

Ztrátová symetrizace

Stále bude myšlenkou přejít k symetrické nerovnosti, ale tentokrát pomocí nějakého odhadu (tedy ztrátově). To lze někdy docela jednoduše – vzpomeňte si, kolik nerovností má třeba cyklickou levou stranu, ale pravou již symetrickou – a jindy to je úkol velmi obtížný.

Pro mnoho ukázek symetrizace stačí nalistovat o několik stránek zpět. Ukážeme si alespoň jeden nový trik – symetrizaci rozšířením o jmenovatel sousedního zlomku.

Příklad. Pro kladná a, b, c dokažte[49]

$$\sum_{\text{cyc}} \sqrt{\frac{a}{a+b}} \leq \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

Řešení. Ukážeme si řešení, které na Mathlinksu[50] dostalo název *the Myth solution*. Budeme chtít použít CS na odmocniny. Nyní přijde na řadu zmiňované trikové rozšíření o jmenovatel sousedního zlomku. Členy na levé straně přepíšeme jako

$$\sqrt{\frac{a}{a+b}} = \sqrt{(a+c) \cdot \left(\frac{a}{(a+b)(a+c)}\right)}.$$

[48] Tvrzení platí zcela analogicky pro $a, b, c > 0$.

[49] To je jen nepatrně upravená úloha na přemýšlení z minulého dílu.

[50] Mathlinks je matematické fórum na `http://www.mathlinks.ro`.

Ze dvou možností rozšíření o $b+c$, nebo $a+c$, byla právě možnost $a+c$ vybrána velmi pečlivě.[51] Po použití CS na odmocniny tedy zbude dokázat

$$\sqrt{\sum_{\text{cyc}} \frac{2a(a+b+c)}{(a+b)(a+c)}} \leq \frac{3\sqrt{2}}{2} = \sqrt{\frac{9}{2}},$$

což už je jen symetrická nerovnost! Navíc taková, že ji můžeme rovnou roznásobit, a po chvilce úprav dostaneme ekvivalentní nerovnost $6abc \leq \sum_{\text{cyc}}(a^2b + a^2c)$, která je velmi snadná.

Poznámka. Rozmyslete si, že téhož výsledku lze dosáhnout použitím Jensenovy nerovnosti pro konkávní funkci $\sqrt{x}$, a to opět pomocí vhodného rozšíření zlomků a vybírání váhových koeficientů. Dosud je ovšem zahaleno tajemstvím, co by v takových případech dokázala Hölderova nerovnost (je to přece zobecněná CS!). My, autoři seriálu, věříme, že potenciál Hölderovy nerovnosti v tomto směru není zdaleka vyčerpaný!

Cvičení. Pro kladná a, b, c dokažte

$$\sum_{\text{cyc}} \sqrt{\frac{a}{4a+4b+c}} \leq 1.$$

Cvičení. (Náročné[52]) Pro kladná a, b, c dokažte

$$\sum_{\text{cyc}} \sqrt{\frac{ab}{4a^2+b^2+4c^2}} \leq 1.$$

Návod. Při důkazu symetrické nerovnosti zatněte zuby a převeďte do tvaru SOS.

Když všechno zklame ...

Ani my nevíme, jak se má nerovnost dokázat, když žádný z řady pokusů nevyjde. Snad jen snažit se vymyslet nový trik. :-)

Příkladem nerovnosti, u které většina postupů selže, je následující nerovnost pocházející od jednoho z největších současných expertů na nerovnosti *Vasile Cirtoajeho*.[53]

Příklad. Pro kladná a, b, c dokažte

$$(a^2+b^2+c^2)^2 \geq 3(a^3b + b^3c + c^3a).$$

Řešení. Vezměme známou nerovnost

$$(x+y+z)^2 \geq 3(xy+yz+zx)$$

platnou pro libovolná reálná čísla x, y, z. Naší snahou bude na ni napasovat dokazovanou nerovnost. To je úkol nesnadný, nicméně není těžké ověřit, že zvolíme-li

$$x = a^2 - ab + bc, \quad y = b^2 - bc + ca, \quad z = c^2 - ca + ab,$$

[51] Po použití CS na odmocniny získáme výraz $a/((a+b)(a+c))$. Pokud uvážíme součet takových tří cyklicky získaných zlomků, jedná se o symetrický výraz.

[52] Jedná se o slabší verzi nerovnosti známé z loňského zahájení MO.

[53] Rumunský profesor, který se věnuje olympiádním soutěžím a především nerovnostem.

pak skutečně požadovanou nerovnost dostaneme.

Poznámka. Abychom alespoň trochu demonstrovali obtížnost předchozí úlohy, dodejme, že rovnost nenastává jen v případě $a = b = c$, ale rovněž pro a, b, c taková, že poměr $a : b : c$ je $\sin^2 \frac{4\pi}{7} : \sin^2 \frac{2\pi}{7} : \sin^2 \frac{\pi}{7}$. To je jeden z důvodů, proč je úloha tak těžká. Ještě ukážeme jiné důkazy, avšak není nám známa žádná rozumná metoda, jak na ně přijít. Platí[54]

$$(a^2 + b^2 + c^2)^2 - 3(a^3b + b^3c + c^3a) = \frac{1}{2}\left(\sum_{\text{cyc}}(a^2 - b^2 - ab + 2bc - ca)^2\right) =$$
$$= \frac{1}{4}\left(a^2 + b^2 - 3ab + 3ac - 2c^2\right)^2 + \frac{3}{4}\left(a^2 - ab - ac - b^2 + 2bc\right)^2 \geq 0.$$

Úlohy na přemýšlení

Nejtěžší z nejtěžších! Ukažte, že jste se něco naučili, a vyřešte nějakou z těchto ďábelských nerovností! Jako tradičně první, kdo pošlou řešení na chat, berou čokoládu! Používat můžete všechny prostředky, tedy i takové (znáte-li), co přesahují náš seriál. Dobrou zábavu!

Příklad. Kladná čísla a, b, c splňují $\min(a, b, c) \geq \frac{1}{4}\max(a, b, c)$. Dokažte

$$(ab + bc + ca)\left(\sum_{\text{cyc}} \frac{1}{(a+b)^2}\right) \geq \frac{9}{4} + \frac{1}{16}\sum_{\text{cyc}} \frac{(a-b)^2}{(a+b)^2}.$$

Příklad. Jsou dána reálná čísla a, b, c splňující $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Určete maximální možnou hodnotu výrazu

$$|(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)|\,.$$

Příklad. Dokažte, že pro libovolná kladná čísla a, b, c platí[55]

$$\frac{ab}{4a^2 + b^2 + 4c^2} + \frac{bc}{4b^2 + c^2 + 4a^2} + \frac{ca}{4c^2 + a^2 + 4b^2} \leq \frac{1}{3}.$$

Závěr

Zdá se to neuvěřitelné, ale skutečně nadešel čas loučení. Zcela jistě chceme poděkovat a zároveň poblahopřát všem nadšencům, kteří se pročetli až do konce letošní mimořádné porce matematiky. Dále nesmíme zapomenout poděkovat všem, kteří nám pomáhali odstraňovat chyby zejména pak *Pepovi Tkadlecovi*. Na samotný závěr nezbývá než popřát, ať vás matematika neomrzí a přináší vám radost znovu a znovu, jak je tomu v případě autorů seriálu. :)

Michal „Kenny“ Rolínek a Pavel Šalom.

[54] První identita je v podstatě první předvedený důkaz, neboť je důsledkem rovnosti $(x + y + z)^2 - 3(xy + yz + zx) = \frac{1}{2}\left((x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2\right)$.

[55] Ano, to je ta slavná nerovnost probíraná na loňském slavnostním zahájení MO!

Dodatky

Řešení 9. úlohy na přemýšlení

Příklad. Dokažte, že pro libovolná kladná čísla a, b, c platí

$$\frac{ab}{4a^2+b^2+4c^2}+\frac{bc}{4b^2+c^2+4a^2}+\frac{ca}{4c^2+a^2+4b^2}\le\frac{1}{3}.$$

Řešení. (podle *Vo Quoc Ba Can*) Dokážeme postupně dvě nerovnosti, jejichž zkombinováním a substitucí za druhé mocniny získáme tu dokazovanou. Budou to

$$\sum_{cyc}\frac{c^2-ab}{4a^2+b^2+4c^2}\ge 0,\quad \sum_{cyc}\frac{a}{4a+4b+c}\le\frac{1}{3}.$$

Důkaz první nerovnosti: V prvním kroku každý ze zlomků šikovně upravíme tak, aby v čitatelích figurovaly jen dvě proměnné. Nabízí se odečíst vždy čtvrtinu jmenovatele, čímž ovšem vyrobíme nehezké zlomky, a proto nejprve nerovnost vynásobíme čtyřmi. Upravíme tedy

$$1-\frac{4(c^2-ab)}{4a^2+b^2+4c^2}=\frac{(2a+b)^2}{4a^2+b^2+4c^2}$$

a zbývá ukázat, že součet tří takových zlomků je nejvýše tři. K odhadu překvapivě použijeme CS zlomkobijce, a to právě naopak, než jak se obvykle používá. Nalezneme tři zlomky takové, že kdybychom na ně vypustili zlomkobijce, tak je odhadneme přesně výrazem, s nímž nyní pracujeme (ten totiž pravou stranu zlomkobijce silně připomíná). Zlomkobijce napíšeme takto

$$\frac{a^2}{c^2+2a^2}+\frac{a^2}{c^2+2a^2}+\frac{b^2}{2c^2+b^2}\ge\frac{(2a+b)^2}{4a^2+b^2+4c^2}.$$

Posledním překvapením je, že teď už to rovnou vyjde

$$\sum_{cyc}\frac{(2a+b)^2}{4a^2+b^2+4c^2}\le\sum_{cyc}\left(\frac{2a^2}{c^2+2a^2}+\frac{b^2}{2c^2+b^2}\right)=3.$$

Důkaz druhé nerovnosti: Řešení má podobnou strukturu jako to předchozí, nejprve nerovnost upravíme a posléze použijeme *inverzního zlomkobijce*. Úpravu tentokrát volíme tak, abychom do čitatelů dostali naopak smíšený člen. Vynásobme tedy nerovnost číslem $4(a+b+c)$ a každý ze zlomků upravme

$$\frac{4a(a+b+c)}{4a+4b+c}-a=\frac{3ac}{4a+4b+c}.$$

Zbývá nám dokázat

$$\sum_{cyc}\frac{ac}{4a+4b+c}\le\frac{a+b+c}{9}.$$

Podobně jako u první nerovnosti odhadujme pomocí CS zlomkobijce

$$\frac{ac}{4a+4b+c}=\frac{ac}{(2b+c)+2(2a+b)}\le\frac{ac}{9}\cdot\left(\frac{1}{2b+c}+\frac{2}{2a+b}\right).$$

K dořešení celé úlohy si stačí rozmyslet, že posčítáním tří takových dvojic zlomků skutečně vyjde $\frac{a+b+c}{9}$. Úloha je vyřešena.

Řešení. (podle *Anh Dung Le*) Zvolme BÚNO $a^2 + b^2 + c^2 = 3$ a dokazujme nerovnost

$$\sum_{cyc} \frac{ab}{a^2 + c^2 + 1} \leq 1.$$

Nyní podobně jako v úloze IMO 2005/3 (bonusová úloha č. 3) použijeme CS na odhad jmenovatelů

$$(1 + 1 + b^2)(a^2 + c^2 + 1) \geq (a + b + c)^2.$$

Poté, co takto odhadneme jmenovatel každého zlomku, nám zbývá dokázat

$$\sum_{cyc} \frac{ab(2 + b^2)}{(a + b + c)^2} \leq 1,$$

což již není těžké. Po roznásobení přejde tato nerovnost do tvaru $\sum_{cyc} ab^3 \leq \sum_{cyc} a^2$ neboli (po zpětné homogenizaci) $3\sum_{cyc} ab^3 \leq (\sum_{cyc} a^2)^2$. To je ale přesně známá *Vasc inequality* ze závěru posledního dílu seriálu. Důkaz je hotov.

Literatura

Pokud máte zájem o dalši studium tohoto tématu, věřte, že arzenál metod, které jsme zde popsali, představuje ve skutečnosti jen špičku ledovce. Předkládáme vám proto seznam literatury, z níž jsme čerpali či kterou se jen inspirovali. Některé materiály lze sehnat volně na internetu, jiné zase objednat přes knihkupectví Amazon. Samozřejmě můžeš kontaktovat organizátory a poprosit je, zda by ti pomohli se sháněním článku nebo zapůjčili nějakou knihu.

[1] Vasile Cirtoaje, Vo Quoc Ba Can, Tran Quoc Anh: *Inequalities with Beautiful Solutions.*

[2] Titu Andreescu, Vasile Cirtoaje, Gabriel Dospinescu, Mircea Lascu: *Old and New Inequalities.*

[3] Vo Quoc Ba Can, Cosmin Pohoata: *Old and New Inequalities 2.*

[4] Pham Kim Hung: *Secrets in Inequalities.*

[5] Osobní stránky Vo Quoc Ba Can:
`http://can-hang2007.blogspot.com/search/label/Problems`

[6] Mathlinks (=Art of Problem Solving):
`http://www.artofproblemsolving.com/Forum/index.php`

[7] Hojoo Lee: *Topics in Inequalities – Theorems and Techniques.*

[8] Kiran Kedlaya: *Notes for the Math Olympiad Program.*

[9] Thomas J. Mildorf: *Olympiad Inequalities.*

[10] Pham Kim Hung: *Squares Analysis Method.*

[11] Pham Kim Hung: *The Entirely Mixing Variables Method.*

[12] Pham Van Thuan: *Square It!*

[13] Darij Grinberg: *The Vornicu-Schur Inequality and Its Variations.*

[14] K. Wu: *The Rearrangement Inequality.*

[15] Tran Phuong: *Diamonds in Mathematical Inequalities.*

[16] Titu Andreescu, Gabriel Dospinescu: *Problems From the Book.*