1. série

Dělitelnost

1. ÚLOHA

Nechť $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ jsou přirozená čísla a b jejich nejmenší společný násobek. Ukažte, že $b \geq n \cdot a_1$. Ukažte také, že pro každé přirozené číslo n existuje n-tice, pro niž nastane rovnost.

2. ÚLOHA

Označme $s(n)$ součet všech kladných dělitelů čísla n. Řešte rovnici $s(x) = x + 4$ s neznámou x v oboru přirozených čísel.

3. ÚLOHA

Označme $d(n)$ počet všech kladných dělitelů čísla n. Potom pro každá dvě nesoudělná kladná celá čísla a, b platí $d(a) \cdot d(b) = d(ab)$. Dokažte. (Pro zájemce: Jak je tomu pro soudělná a, b?)

4. ÚLOHA

Najděte nejmenší přirozené číslo, které je dělitelné 49, má právě 30 různých kladných dělitelů a jehož desítkový zápis končí číslicí 5.

5. ÚLOHA

Přirozené číslo m nazveme zeleným, má-li následující vlastnost: Pro každé celé číslo n platí: je-li $1 < n < m$ a čísla m, n jsou nesoudělná, potom n je prvočíslo. Najděte všechna zelená čísla menší než 1 000 000.

Řešení 1. série

1. ÚLOHA

Jsou-li $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ přirozená čísla, pak jistě $x_n \geq n$. Protože $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$, je $\frac{b}{a_1} > \frac{b}{a_2} > \cdots > \frac{b}{a_n}$. Číslo b je nejmenší společný násobek čísel $a_1, a_2, \ldots, a_n$, tedy čísla $\frac{b}{a_i}, i = 1, 2, \ldots, n$ jsou přirozená. Podle první věty platí $\frac{b}{a_1} \geq n$, tedy $b \geq a_1 n$, což jsme chtěli dokázat. Rovnost nastane např. pro n-tici $\frac{n!}{n}, \frac{n!}{n-1}, \ldots, \frac{n!}{1}$.

2. ÚLOHA

Pro $x = 1$ je $s(1) = 1 \neq 1 + 4$, tedy $x = 1$ není řešením rovnice. Každé přirozené číslo x různé od 1 má aspoň dva různé kladné dělitele: 1 a x. Potom je $s(x) = x + 1 + 3$ Kdybychom napsali 3 jako $1 + 2$, počítali bychom dělitele 1 dvakrát, tedy číslo 3 je jediný vlastní dělitel čísla x, které je kořenem zadané rovnice. Aby mělo číslo právě tři dělitele musí být tvaru $x = p^2$, kde p je prvočíslo. Děliteli čísla x pak budou $1, p, p^2$. Odtud je vidět, že $p = 3$ a $x = p^2 = 9$ je jediným kořenem rovnice.

3. ÚLOHA

Nechť $a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_m^{\alpha_m}$, pak $d(a) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \ldots (\alpha_m + 1)$. Toto tvrzení se dokáže snadno indukcí. Nechť $b = q_1^{\beta_1} \cdot q_2^{\beta_2} \cdot \ldots \cdot q_n^{\beta_n}, a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_m^{\alpha_m}$. Pak $d(ab) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \ldots (\alpha_m + 1)(\beta_1 + 1)(\beta_2 + 1) \ldots (\beta_n + 1) = d(a)d(b)$

4. ÚLOHA

Pro hledané číslo a musí platit $a = 5 \cdot 7^2 \cdot b$, kde $b \in \mathbb{N}$ a zároveň a je liché. Nechť $a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{\alpha_n}$ je prvočíselný rozklad čísla a, pak počet všech kladných dělitelů čísla a je $d(a) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \ldots (\alpha_n + 1)$, tedy v našem případě je $d(a) = 30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$. Máme následující čtyři možnosti:

(a) $\alpha_1 + 1 = 2, \alpha_2 + 1 = 3, \alpha_3 + 1 = 5$, nejmenším takovým číslem bude $a = 5 \cdot 7^2 \cdot 3^4$.
(b) $\alpha_1 + 1 = 2, \alpha_2 + 1 = 15$, tedy zde by muselo platit $a = 5 \cdot 7^{14}$
(c) $\alpha_1 + 1 = 3, \alpha_2 + 1 = 10$, nejmenším takovým číslem je $a = 7^2 \cdot 5^9$.
(d) $\alpha_1 + 1 = 5, \alpha_2 + 1 = 6$, zde je nejmenším číslem $a = 7^4 \cdot 5^5$.

Uspořádáním těchto čtyř čísel podle velikosti zjistíme, že nejmenší je $a = 3^4 \cdot 5 \cdot 7^2 = 19845$.

5. ÚLOHA

Pro zelená čísla m platí: je-li p prvočíslo a $p^2 < m$, pak p dělí m. Je-li $m > 30$, pak $2^2 < 3^2 < 5^2 < m$, tedy $m = 30k \geq 60$, ale $7^2 < 60$, tudíž $m \geq 210$. Protože $11^2 < 13^2 < 210$, je $m \geq 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$, pak je i 17^2 a 19^2 menší než m, z čehož plyne, že $m > 1000000$. Stačí tedy probrat čísla do třiceti a zjistíme, že 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 18, 24 a 30 jsou zelená.