2. série

Shodnost v konstrukčních úlohách

1. ÚLOHA
Je dána kružnice k, bod A a kladné číslo c. Sestrojte přímku, která prochází bodem A a na kružnici k vytíná tětivu délky c.

2. ÚLOHA
Jsou dány tři různé přímky a, b, c, procházející bodem T, a bod $A \in a$. Sestrojte trojúhelník ABC takový, aby jeho těžnice ležely na daných přímkách a zároveň $A \in a, B \in b, C \in c$.

3. ÚLOHA
Buď dán trojúhelník ABC. Dokažte, že ho lze rozdělit na rovnoramenné trojúhelníky. Z kolika nejméně rovnoramenných trojúhelníků lze trojúhelník ABC složit? (Proveďte diskusi vzhledem k trojúhelníku ABC.)

4. ÚLOHA
Složením sudého počtu středových souměrností vznikne posunutí. Dokažte. Jaké zobrazení vznikne složením lichého počtu středových souměrností?

5. ÚLOHA
Jsou dány nesoustředné kružnice k_1, k_2 a přímka q. Sestrojte přímku $p \parallel q$ takovou, aby na kružnicích k_1, k_2 vytínala shodné tětivy.

Řešení 2. série

1. ÚLOHA

Je-li c větší než průměr kružnice, úloha nemá řešení. Označme S střed k. Je-li $A = S$, má úloha řešení pouze pro c rovno průměru k a má jich nekonečně mnoho. Omezme se tedy na ta c, která jsou menší, nejvýš rovna průměru kružnice k a $A \neq S$. Sestrojme libovolnou tětivu KL kružnice k, která má délku c. Buďte B, C body přímky KL, které mají od bodu S stejnou vzdálenost jako A. Potom otočení kolem S o úhel ASB, resp. ASC převede přímku KL v hledanou přímku.

2. ÚLOHA

Je-li $A = T$, úloha zřejmě nemá řešení. Nechť $A \neq T$. Střed D strany BC umíme sestrojit. Bod C leží na přímce c. Protože bod B je středově souměrně sdružený s bodem C podle bodu D, leží bod B na přímce m, středově sdružené s přímkou c podle bodu D. Proto $B \in m \cap b$ (tento průnik je vždy jednobodový), další postup je zřejmý.

3. ÚLOHA

Rovnoramenný trojúhelník lze složit z jednoho rovnoramenného trojúhelníku, pravoúhlý ze dvou (daný trojúhelník rozdělte těžnicí nad přeponou). Libovolný ostroúhlý trojúhelník rozdělíme úsečkami OA, OB, OC, kde O je střed jemu opsané kružnice, na 3 rovnoramenné trojúhelníky. V tupoúhlém trojúhelníku sestrojíme výšku na nejdelší stranu a tou ho rozdělíme na dva pravoúhlé trojúhelníky, které už umíme rozdělit na rovnoramenné. Tím je existence dokázána a zároveň máme odhad minimálního počtu. Existují však i ostroúhlé trojúhelníky, které lze složit z méně než tří rovnoramenných, stejně tak i tupoúhlé, jež lze složit z méně než čtyř. Podrobný rozbor není těžký, je jen pracný a zdlouhavý. Žádný z řešitelů ho však neprovedl úplně. Pro zájemce jsme předvedli řešení na zimním soustředění. (Návod: je-li ABC složen ze tří trojúhelníků, musí mít všechny tři společný bod S. Uvažujte polohu bodu S.)

4. ÚLOHA

Skládejme středové souměrnosti se středy S_1, S_2. Je-li $S_1 = S_2$ vznikne identita (tj. posunutí o nulový vektor). Je-li $S_1 \neq S_2$, zvolme libovolný bod A a zobrazme ho v bod B středovou souměrností se středem S_1 a bod B v bod C středovou souměrností se středem S_2. Úsečka S_1S_2 je střední příčkou v trojúhelníku ABC. Z toho je vidět, že bod C vznikne posunutím bodu A o dvojnásobnou vzdálenost S_1S_2 ve směru od S_1 k S_2. Tedy složení dvou středových souměrností je posunutí. Ještě snáze dokážeme, že složením dvou posunutí je opět posunutí. Odtud indukcí odvodíme, že složení libovolného počtu posunutí je opět posunutí. Mějme nyní dáno $2k$ středových souměrností $S_1, S_2, \ldots, S_{2k}$. Protože skládání zobrazení je asociativní, můžeme napřed složit souměrnosti S_{2j-1}, S_{2j} $(j = 1, 2 \ldots, k)$ a potom složit vzniklá posunutí. Vyjde posunutí. Skládáme-li $2k+1$ středových souměrností, vychází vzhledem k předchozímu, že jde o složení posunutí a jedné středové souměrnosti. Dokažte si již sami, že vzniklé zobrazení je středová souměrnost.

5. Úloha

Označme P, Q průměty středů kružnic k_1, k_2 na přímku q. Potom v posunutí o vektor $\overrightarrow{PQ}$ přejde jedna z tětiv na druhou (nakreslete si obrázek a promyslete si podrobně). Označme l obraz kružnice k_1 ve zmíněném posunutí. Společné body kružnic k_2, l jsou krajní body jedné z tětiv.

Diskuse: Počet řešení závisí na vzájemné poloze kružnic k_2, l. Úloha může mít 0 řešení (k_2 a l nemají společné body), jedno řešení (k_2 a l se protínají), nekonečně mnoho řešení ($k_2 = l$). V případě, kdy se k_2 a l dotýkají, záleží na tom, jaké definice tětivy řešitel použil, tj. zdali připouštěl nulovou délku nebo ne.