3. série
Rovnice

1. ÚLOHA
Najděte všechny hodnoty reálného parametru a, pro které má soustava rovnic

$$y^2 + (x+1)^2 = 4 \qquad x^2 + (y+1)^2 = a$$

s neznámými x, y jediné řešení v oboru reálných čísel.

2. ÚLOHA
Řešte v oboru reálných čísel soustavu rovnic s neznámými x, y, z:

$$x^2 + y^2 + 3z^2 = 8y - 4 \qquad y - 2x = -4.$$

3. ÚLOHA
Je dána rovnice s parametrem m, který nabývá reálných hodnot, a neznámou x z oboru reálných čísel:

$$(m+1) \cdot x^2 + (3m-1) \cdot x + (2m+5) = 0. \tag{1}$$

(i) Určete počet řešení rovnice (1) v závislosti na hodnotě m.
(ii) Pro která m bude mít rovnice (1) nulový kořen?
(iii) Pro která m budou kořeny rovnice (1) čísla opačná?
(iv) Pro která m budou kořeny rovnice (1) reciproká (=převrácená) čísla?
(v) Určete hodnotu m, pro niž má rovnice (1) dva různé reálné kořeny a zároveň součet druhých mocnin jejích kořenů je minimální.

4. ÚLOHA
Řešte soustavu rovnic s neznámými x, y a parametry a, b z oboru reálných čísel. Proveďte úplnou diskusi vzhledem k parametrům a, b.

$$(a+b) \cdot x + (a+b) \cdot y = a^2 + b^2$$
$$(a-b) \cdot x + (a-b) \cdot y = a^2 - b^2$$

5. ÚLOHA
Určete počet řešení soustavy:

$$ax + \frac{b}{y} = 1 \qquad \frac{a}{x} + by = 1$$

s neznámými x, y z oboru reálných čísel a reálnými parametry a, b v závislosti na hodnotách a, b.

Řešení 3. série

1. ÚLOHA
Úlohu asi bylo nejlépe řešit graficky. Obě rovnice jsou rovnicemi kružnice, první má střed v bodě $(-1, 0)$ a poloměr 2, druhá má střed v bodě $(0, -1)$ a poloměr $\sqrt{a}$. Nakreslete si obrázek. Řešení soustavy v oboru reálných čísel pak budou znázorňovat společné body obou kružnic. Má-li existovat jediné řešení, musí se kružnice dotýkat. Bod dotyku leží na přímce, která prochází jejich středy (na tzv. středné). Teď již snadno spočteme hodnoty a — pro vnější dotyk obou kružnic vyjde $a = (2 + \sqrt{2})^2$, pro vnitřní dotyk vyjde $a = (2 - \sqrt{2})^2$.

2. ÚLOHA
Z druhé rovnice si vyjádříme y a dosadíme do první rovnice, dostaneme:

$$z = \frac{1}{3}\sqrt{-(5x^2 - 32x + 52)}$$

Aby měla pravá strana smysl, musel by být výraz pod odmocninou nezáporný, ale to není možné (rovnice $5x^2 - 32x + 52 = 0$ nemá řešení v reálných číslech, proto $5x^2 - 32x + 52 > 0$ pro všechna x). Soustava nemá řešení.

3. ÚLOHA
(i) Diskriminant rovnice $D = (3m-1)^2 - 4(m+1)(2m+5) = m^2 - 34m - 19$. Rovnice $D = 0$ má řešení $m_{1,2} = \frac{34 \pm \sqrt{1232}}{2}$. Pokud $m \in (m_1, m_2) \doteq (-0{,}5; 34{,}5)$, nemá rovnice řešení, pokud $m = m_1$ nebo $m = m_2$ nebo $m = -1$, má rovnice právě jedno řešení, pokud $m < m_1$ nebo $m > m_2$ a $m \neq -1$, má rovnice dvě řešení.

(ii) Kořeny rovnice jsou

$$x_{1,2} = \frac{(1 - 3m) \pm \sqrt{m^2 - 34m - 19}}{2(m + 1)}\ , \tag{2}$$

má-li výraz na pravé straně smysl. Aby rovnice měla nulový kořen, musí platit $m^2 - 34m - 19 = (1 - 3m)^2$, odkud dostáváme $m = -1$ (což nevyhovuje) a $m = -2{,}5$ (vyhovuje).

(iii) Mají-li být kořeny čísla opačná, musí být $(1 - 3m) = 0$ (plyne z (2)), tj. $m = \frac{1}{3}$, ale pro tuto hodnotu m nebude mít rovnice dva kořeny.

(iv) Vynásobíme-li oba kořeny ve tvaru (2) podle vzorce $(a - b)(a + b) = a^2 + b^2$, dostáváme

$$\frac{(1 - 3m)^2 - (m^2 - 34m - 19)}{4(m + 1)^2} = 1\ .$$

Vyřešením kvadratické rovnice získáme řešení $m = -1$ (nevyhovuje) a $m = -4$.

(v) Součet druhých mocnin kořenů rovnice (1) je roven

$$\frac{(1-3m)^2+(m^2-34m-19)}{2(m+1)^2}=10-\frac{30m+14}{(m+1)^2}\ .$$

Tento výraz chceme minimalizovat. Předpokládejme, že

$$\frac{30m+14}{(m+1)^2}=f(m)\ .$$

Pro $m<-\frac{14}{30}$ je $f(m)<0$. Zderivováním zjistíme, že $f(m)$ je rostoucí na $(-\frac{14}{30},m_1)$ a klesající na $(m_2,+\infty)$, z toho plyne, že f na těchto otevřených intervalech nenabývá svého maxima, tedy hledané minimum neexistuje.

4. Úloha

Sečtením a odečtením obou rovnic dostaneme

$$2ax+2ay=2a^2$$
$$2bx-2by=2b^2\ ,$$

z čehož plyne: $a=0$ nebo $x+y=a$ a $b=0$ nebo $x-y=b$, tedy pokud je aspoň jeden z parametrů nulový, má soustava nekonečně mnoho řešení, pokud jsou oba nenulové, má právě jedno řešení $x=\frac{a+b}{2}, y=\frac{a-b}{2}$.

5. Úloha

Vyhovuje-li dvojice (x,y) soustavě, vyjde dosazením za y z druhé rovnice do první kvadratická rovnice pro x:

$$ax^2+(b^2-a^2-1)x+a=0\ . \tag{3}$$

Naopak, je-li $a\neq 0$ a zároveň $b\neq 0$, každému kořenu x rovnice (3) odpovídá právě jedna dvojice (x,y), která vyhovuje dané soustavě. (Proveďte podrobněji.) Pro $a\neq 0$ a $b\neq 0$ je tedy daná úloha ekvivalentní s úlohou najít počet řesení rovnice (3). Diskriminant této rovnice je po úpravě

$$(a+b+1)(a+b-1)(a-b+1)(a-b-1)\ .$$

Výsledek je pro větší přehlednost znázorněn graficky (pozor na osách je to jinak).

Případy $a=0$ nebo $b=0$ je třeba probrat samostatně:

— je-li $a=0$ a $|b|\neq 1$, soustava nemá řešení

— je-li $a=0$ a $|b|=1$, má soustava nekonečně mnoho řešení (tvaru (t,b), kde $t\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$)

— je-li $b=0$, vyměníme úlohy parametrů a, b a neznámých x, y, na počtu řešení soustavy se nic nezmění.