4. série

Matematická indukce

1. ÚLOHA

V rovině je dáno několik přímek a kružnic, ty ji rozdělují na obrazce. Obrazce, které mají společnou úsečku nebo oblouk, nazneme sousedními. Dokažte, že vzniklé oblasti lze obarvit dvěma barvami tak, že libovolné dva sousední obrazce mají různou barvu.

2. ÚLOHA

Dokažte, že pro každé přirozené číslo $n \geq 3$ platí nerovnost

$$\frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \cdots + \frac{1}{n^3} < \frac{1}{4}$$

3. ÚLOHA

V rovině je dáno n bodů ($n \geq 4$) takových, že každé 4 z nich jsou vrcholy konvexního čtyřúhelníka. Dokažte, že dané body jsou vrcholy konvexního n-úhelníka.

4. ÚLOHA

Dokažte, že pro každé přirozené číslo n a pro libovolnou n tici reálných čísel $x_1, x_2, \ldots, x_n$ platí nerovnost

$$|\sin(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)| \leq |\sin x_1| + |\sin x_2| + \cdots + |\sin x_n|$$

5. ÚLOHA

Dokažte, že pro každé celé číslo n je $P(n) = \frac{1}{3}n^4 + \frac{1}{6}n^3 + \frac{1}{6}n^2 - \frac{2}{3}n + 1$ přirozené číslo.

Řešení 4. série

1. ÚLOHA

Důkaz provedeme matematickou indukcí. Celou rovinu jistě můžeme obarvit jednou barvou, stačí tedy dokázat indukční krok — máme v rovině několik přímek a kružnic, obrazce jsou obarveny dvěma barvami. Přidáme přímku nebo kružnici (různou od všech dosud narýsovaných), ta rozdělí rovinu na dvě části. Dokážeme, že zinvertujeme-li obarvení v jedné z částí, získáme hledané obarvení. Vezmeme-li dva sousední obrazce, pak leží buď oba ve stejné části vzhledem k nově přidané přímce či kružnici (pak mají jistě různou barvu), nebo leží každý v jiné části, pak jejich společná hranice leží na nové přímce (nebo kružnici) a před jejím přidáním tvořily jeden obrazec (obarvený jednou barvou), proto po zinvertování mají různou barvu.

2. ÚLOHA

Jistě

$$\frac{1}{(n-1)n} - \frac{1}{n(n+1)} = \frac{2}{n(n^2-1)} > \frac{2}{n^3}\ ,$$

tedy

$$\frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{n^3} < \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1\cdot 2} - \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 3} - \frac{1}{3\cdot 4} - \cdots + \frac{1}{(n-1)n} - \frac{1}{n(n+1)}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n(n+1)}\right) < \frac{1}{4}$$

3. ÚLOHA

Důkaz provedeme indukcí. Mějme v rovině čtyři body, které jsou vrcholy konvexního čtyřúhelníka, pak jsou tyto body jistě vrcholy konvexního čtyřúhelníka. Nechť pro n bodů tvrzení platí a chceme dokázat, že platí i pro $n+1$ bodů. Nechť je tedy dáno $n+1$ bodů splňujících podmínku ze zadání, uvažujme konvexní obal těchto $n+1$ bodů a předpokládejme, že některý z daných bodů leží uvnitř tohoto konvexního obalu (ne na obvodu). Ostatních n bodů tvoří dle předpokladu konvexní n-úhelník, spojíme-li jeden vrchol se všemi ostatními, dostaneme triangulaci, $(n+1)$-ní bod musí nutně ležet v některém z trojúhelníků, což je spor s tím, že každé čtyři vrcholy tvoří konvexní čtyřúhelník.

4. ÚLOHA

Pro $n = 1$ zřejmě nerovnost platí. Nechť platí pro libovolnou n-tici, pak

$$|\sin(x_1 + \cdots + x_n)| = |\sin(x_1 + \cdots + x_{n-1})\cos(x_n) + \cos(x_1 + \cdots + x_{n-1})\sin(x_n)| \leq$$

$$\leq |\sin(x_1 + \cdots + x_{n-1})||\cos(x_n)| + |\cos(x_1 + \cdots + x_{n-1})||\sin(x_n)| \leq$$

$$\leq |\sin(x_1 + \cdots + x_{n-1})| + |\sin(x_n)| \leq |\sin x_1| + |\sin x_2| + \cdots + |\sin x_n| \ .$$

5. Úloha

Stačí dokázat, že $2n^4 + n^3 + n^2 - 4n = n(n-1)(2n^2 + 3n + 4)$ je dělitelné šesti. Protože tento polynom nabývá sudých hodnot, stačí ukázat, že pro $n \equiv 0, 1, 2 \mod 3$ nabývá hodnot dělitelných třemi.