5. série

Podobnost v geometrii

1. ÚLOHA

Jsou dána reálná čísla $\alpha, \varepsilon \in \langle 0, 2\pi)$ a $m > 0$. Sestrojte trojúhelník ABC takový, že $b + 3r = m$, $|\sphericalangle CAB| = \alpha$ a $\beta - \gamma = \varepsilon$, kde r označuje poloměr kružnice opsané trojúhelníku ABC.

2. ÚLOHA

Tři mouchy o téže hmotnosti lezou po obvodu trojúhelníku ABC tak, že jejich těžiště zůstává stále v bodě P. Najděte množinu všech takových bodů P, víte-li, že aspoň jedna moucha oblezla trojúhelník ABC dokola.

3. ÚLOHA

Sestrojme v rovině nekonečnou síť rovnostranných trojúhelníků a označme množinu jejich vrcholů M. Najděte množinu S všech bodů dané roviny s následující vlastností: ke každému bodu $B \in S$ existuje reálné číslo k $(0 \neq k \neq 1)$ takové, že obraz množiny M ve stejnolehlosti se středem B a koeficientem k je částí M.

4. ÚLOHA

Sestrojte lichoběžník $ABCD$, je-li dáno: $|AC|, \alpha, b : d = k, |BD|$.

5. ÚLOHA

Jsou dány dvě nesoustředné kružnice k, m. Najděte množinu všech bodů, z nichž je kružnice k vidět pod stejným úhlem jako kružnice m.

Řešení 5. série

1. ÚLOHA

Narýsujeme úhel u vrcholu A velikosti α a jeho ramena označme AX, AY. Na AX zvolíme bod B' a narýsujeme bod D' na AX tak, že $|\sphericalangle AB'D'| = \varepsilon$. Víme, že trojúhelník $B'D'C'$ má být rovnoramenný, umíme tedy narýsovat bod C' na AX ($|B'D'| = |D'C'|$). Máme trojúhelník $AB'C'$, který je podobný hledanému trojúhelníku ABC, stačí ho stejnolehlostí zvětšit do potřebné velikosti.

2. ÚLOHA

Uvažujme body $A_B, A_C, B_A, B_C, C_A, C_B$ takové, že A_C leží v jedné třetině úsečky AC, A_B v jedné třetině úsečky AB, ... Jedna moucha oblezla trojúhelník kolem dokola, tedy navštívila i bod A, v tom okamžiku bylo těžiště much jistě v části trojúhelníka ohraničené úsečkou B_AC_A, ve které leží bod A. Podobně když byla moucha ve vrcholech B a C. Ale průnikem uvažovaných tří částí je pouze jeden bod, a to těžiště trojúhelníka.

Stačí dokázat, že těžiště vyhovuje. Předpokládejme, že na začátku je každá moucha v jednom vrcholu a všechny najednou vyrazí po směru hodinových ručiček takovou konstantní rychlostí, aby celou hranu přelezly všechny za stejnou dobu. Uvažujme souřadnicovou soustavu danou dvěma stranami trojúhelníka (např. AB a AC) — každý bod obvodu můžeme psát jako $A + k \cdot \overrightarrow{AC} + l\overrightarrow{AB}$, kde $k + l = 1, k, l \geq 0$. Když je první moucha v bodě $A + a \cdot \overrightarrow{AC}$, druhá moucha je v bodě $C + a \cdot \overrightarrow{CB} = A + a \cdot \overrightarrow{AB} + (1-a) \cdot \overrightarrow{AC}$ a třetí moucha je v bodě $B + a \cdot \overrightarrow{BA} = A + (1-a) \cdot \overrightarrow{AB}$. Těžiště těchto tří bodů je v bodě $A + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}AB$ (aritmetický průměr souřadnic). což je právě těžiště.

3. ÚLOHA

Uvažujme soustavu kartézských souřadnic s počátkem v bodě B. Každý bod roviny můžeme stotožnit s vektorem, stejnolehlost je pak násobení tohoto vektoru konstantou, tedy můžeme stejnolehlost rozložit na násobení x-ové a y-ové složky vektoru. Nechť jeden směr přímek trojúhelníkové sítě je rovnoběžný s osou x, strany trojúhelníků nechť mají velikost 2. Zvolme za počátek souřadného systému zkoumaný bod roviny. Souřadnice všech bodů sítě pak můžeme vyjádřit jako $\left[a + k, b + l\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$, kde k, l mají stejnou paritu. Nechť koeficient hledané stejnolehlosti je c, pak musí platit $ca = k + a$ pro nějaké $k \in \mathbb{Z}$ a také $c(a+1) = ca + c = k + a + c = a + m$ pro nějaké $m \in \mathbb{Z}$. Z toho vyplývá, že c je celé. Z rovnosti $ca = k + a$ dostáváme $a = \frac{k}{c-1}$. Podobně $cb = l\frac{\sqrt{3}}{2} + b$, kde l je celé číslo stejné parity jako k a $b = \frac{l}{c-1}\frac{\sqrt{3}}{2}$. Do S tedy mohou patřit pouze body se souřadnicemi (tentokrát je souřadný systém zvolen tak, že $[0,0] \in M$) $[p, q\frac{\sqrt{3}}{2}]$, kde $p, q \in \mathbb{Q}$. Na druhou stranu je zřejmé z předchozího, že všechny takové body do S skutečně patřit budou, neboť k p, q najdeme c rovno největšímu společnému násobku jmenovatelů p a q (případně jeho dvojnásobku kvůli paritě k a l) zvětšeného o jedničku.

5. ÚLOHA

Pokud bod B leží vně kruhu, je kružnice vidět z tohoto bodu pod úhlem 2α, právě když $\sin \alpha = \frac{r}{|SB|}$, kde r je poloměr kružnice a S její střed. Je tedy vidět, že dvě kružnice budou vidět z bodu B pod stejným úhlem, právě když poměr poloměrů kružnic bude roven poměru vzdáleností bodu B od středů kružnic, tedy poměr vzdáleností od středů kružnic bude roven konstantě. Množina takových bodů je Apolloniova kružnice. Pokud je B uvnitř kruhu, je kruh vidět pod úhlem $360°$, tedy do hledané množiny patří ještě všechny body z průniku obou kruhů.