1. podzimní série

Téma: Triky

Datum odeslání: 11. října 2010

1. ÚLOHA (3 BODY)

Miško vymyslel trik! Nejdříve požádá Tomáška, ať si vybere osmičku nebo devítku. Potom mu řekne, aby zvolené číslo vynásobil jakýmkoliv sudým číslem, to nevybrané jakýmkoliv lichým číslem, výsledky sečetl a součet mu oznámil nazpět. Miško pak dokáže určit, které číslo si Tomášek původně vybral. Jak to dělá?

2. ÚLOHA (3 BODY)

Předpokládejme, že máme na papíře napsaná všechna přirozená[1] čísla. Násobky čísla 2010 zakroužkujeme modrou fixou, násobky čísla 2011 červenou. Potom ještě zakroužkujeme fialovou fixou všechna čísla, která jsou součtem nějakého „modrého" a nějakého „červeného" čísla. Dokažte, že mezi milionem a dvěma miliony (obojí včetně) je přirozené číslo, které fialovou fixou zakroužkované není.

3. ÚLOHA (3 BODY)

Když se Lenka tuhle o zkouškovém nudila, přišla na to, že pokud pro reálná čísla a, b, c platí nerovnosti

$$|a| \geq |b+c|,$$
$$|b| \geq |c+a|,$$
$$|c| \geq |a+b|,$$

pak tato čísla už nutně musí splňovat $a+b+c=0$. Dokažte to.

4. ÚLOHA (5 BODŮ)

Možná jste už zaslechli, že existuje 1000 po sobě jdoucích přirozených čísel, mezi nimiž se nenachází žádné prvočíslo – jsou to třeba[2] $1001!+2, 1001!+3, \ldots, 1001!+1001$. Ukažte, že se dá najít i takových 1000 po sobě jdoucích přirozených čísel, že je mezi nimi prvočísel právě pět.

5. ÚLOHA (5 BODŮ)

Dokažte, že rovnice

$$a^2 + b^5 = c^3$$

má v oboru přirozených čísel nekonečně mnoho řešení.

6. ÚLOHA (5 BODŮ)

Franta zkoumal funkci

$$f(x) = \frac{9^x}{3+9^x}.$$

Po chvilce přišel na to, že když za x postupně dosadí čísla $\frac{1}{2010}, \frac{2}{2010}, \ldots, \frac{2009}{2010}$, umí získané funkční hodnoty sečíst. Jaký součet Frantovi vyšel?

---

[1] Nulu za přirozené číslo nepovažujeme.

[2] Číslo $n!$ (čti „en faktoriál") je definováno jako $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$.

7. ÚLOHA (5 BODŮ)

Honzík má celá čísla raději než reálná, a tak tráví mnoho času zaokrouhlováním. Teď se zrovna snaží zjistit, kolik je[3] $\left\lfloor (1+\sqrt{2})^{2010!} \right\rfloor$, ale protože je to už opravdu velké číslo, tak by rád věděl aspoň to, zda je sudé nebo liché. Pomůžete mu?

8. ÚLOHA (5 BODŮ)

Kenny s Pepou se domluvili, že večer při ohni předvedou trik. Pepa nechal Olina vybrat pět písní ze zpěvníku se 124 písněmi. Sám pak z těchto pěti písní vybral čtyři a určil, v jakém pořadí se budou hrát. Na to zavolali Kennyho a ony čtyři písně mu v daném pořadí zazpívali. Jakmile dozpívali, Kenny ihned začal zpívat zbývající pátou. Jak to Pepa s Kennym mohli udělat?[4]

[3]Symbol $\lfloor x \rfloor$ značí „celou část reálného čísla x“, tj. největší celé číslo, které je menší nebo rovno x.

[4]Pepa Kennymu v průběhu nic nenaznačoval, Kenny pátou píseň určil jenom ze zazpívaných písní, jejich pořadí a perfektní znalosti zpěvníku.

Řešení 1. podzimní série

1. úloha

Miško vymyslel trik! Nejdříve požádá Tomáška, ať si vybere osmičku nebo devítku. Potom mu řekne, aby zvolené číslo vynásobil jakýmkoliv sudým číslem, to nevybrané jakýmkoliv lichým číslem, výsledky sečetl a součet mu oznámil nazpět. Miško pak dokáže určit, které číslo si Tomášek původně vybral. Jak to dělá? *(Miško Szabados)*

Označme čísla, ktoré použije Tomášek pri násobení, ako $2k$ a $2l+1$ ($k, l \in \mathbb{Z}$). Pozrime sa na výsledok, keď si Tomášek vyberie číslo 8:

$$8 \cdot 2k + 9 \cdot (2l+1) = 2 \cdot (8k + 9l + 4) + 1,$$

čo je zjavne nepárne (liché). V prípade výberu čísla 9 dostávame

$$9 \cdot 2k + 8 \cdot (2l+1) = 2 \cdot (9k + 8l + 4)$$

a to je číslo párne (sudé).

Vidíme, že Tomášek povie párny výsledok práve v prípade, že si zvolil číslo 9. Miškovi sa teda stačí pozrieť na paritu výsledku a podľa nej určí zvolené číslo.

2. úloha

Předpokládejme, že máme na papíře napsaná všechna přirozená[5] čísla. Násobky čísla 2010 zakroužkujeme modrou fixou, násobky čísla 2011 červenou. Potom ještě zakroužkujeme fialovou fixou všechna čísla, která jsou součtem nějakého „modrého“ a nějakého „červeného“ čísla. Dokažte, že mezi milionem a dvěma miliony (obojí včetně) je přirozené číslo, které fialovou fixou zakroužkované není. *(Pepa Tkadlec)*

První řešení:

Všechna fialově zakroužkovaná čísla jsou tvaru $2010k + 2011l$, kde $k, l \in \mathbb{N}$. Aby bylo takové číslo menší než 2 000 000, musí být $k \leq \frac{2\,000\,000}{2010}$ a $l \leq \frac{2\,000\,000}{2011}$, tj. $k \leq 995$ a $l \leq 994$. Fialově zakroužkovaných čísel tedy rozhodně nebude více než $994 \cdot 995$ a to je méně než počet přirozených čísel v intervalu od jednoho do dvou milionů. Některá z nich tedy fialově zakroužkovaná být nemohou.

Druhé řešení:

Dokážeme, že žádné číslo mezi jedním a dvěma miliony, které je zakroužkované modře, už nemůže být zakroužkované fialově. Uvažme číslo c, které je modře zakroužkované, tj. $c = 2010m$ pro nějaké přirozené m, a zároveň fialově zakroužkované, tedy se dá zapsat také jako $c = 2010k + 2011l$ pro nějaká přirozená k, l. Z rovnosti $2010m = 2010k + 2011l$ vidíme, že číslo $2011l$ musí být dělitelné 2010, a protože čísla 2010 a 2011 jsou nesoudělná, je l dělitelné 2010. Proto $l \geq 2010$ (nulu za přirozené číslo nepovažujeme, jak jste se v zadání dočetli). Potom ale $c \geq 2010 + 2011l \geq 2010 + 2010 \cdot 2011$, což je něco přes čtyři miliony, a c tedy neleží ve vytyčeném intervalu.

Obdobně bychom mohli dokázat, že ani žádné červeně zakroužkované číslo mezi jedním a dvěma miliony nemůže být zakroužkované fialově.

[5] Nulu za přirozené číslo nepovažujeme.

Poznámka (třetí řešení):

Fialově nezakroužkovaných čísel je ale ještě mnohem více. Každé fialově zakroužkované číslo je tvaru $2010k + 2011l = 2010(k + l) + l$. Aby takové číslo nepřevyšovalo dva miliony, může být $k + l$ nejvýše rovno 994, tedy $l \leq 993$, a tudíž například všechna čísla mezi milionem a dvěma miliony, která dávají po dělení 2010 zbytek větší než 993, nemohou být fialově zakroužkovaná. Obecně čím menší čísla uvažujeme, tím menší musí mít zbytek po dělení 2010, aby byla fialově zakroužkovaná.

3. úloha

Když se Lenka tuhle o zkouškovém nudila, přišla na to, že pokud pro reálná čísla a, b, c platí nerovnosti

$$
\begin{aligned}
|a| &\geq |b + c|, \\
|b| &\geq |c + a|, \\
|c| &\geq |a + b|,
\end{aligned}
$$

pak tato čísla už nutně musí splňovat $a + b + c = 0$. Dokažte to. *(Lenka Slavíková)*

Umocněním zadaných nerovností získáme novou soustavu (ekvivalentní s tou původní)

$$
\begin{aligned}
a^2 &\geq b^2 + 2bc + c^2, \\
b^2 &\geq c^2 + 2ca + a^2, \\
c^2 &\geq a^2 + 2ab + b^2.
\end{aligned}
$$

Všechny tři nerovnosti nyní sečteme a vzniklou nerovnost upravíme pomocí známého vzorce pro druhou mocninu součtu tří členů $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)$. Dostáváme tedy

$$
\begin{aligned}
a^2 + b^2 + c^2 &\geq 2(a^2 + b^2 + c^2) + 2(ab + bc + ca), \\
0 &\geq (a + b + c)^2.
\end{aligned}
$$

Protože každý čtverec je nezáporný, máme dvojici nerovností $0 \geq (a + b + c)^2 \geq 0$. Zde ale musí nastat rovnost, a tedy $a + b + c = 0$, což jsme chtěli dokázat.

4. úloha

Možná jste už zaslechli, že existuje 1000 po sobě jdoucích přirozených čísel, mezi nimiž se nenachází žádné prvočíslo – jsou to třeba[6] $1001! + 2, 1001! + 3, \ldots, 1001! + 1001$. Ukažte, že se dá najít i takových 1000 po sobě jdoucích přirozených čísel, že je mezi nimi prvočísel právě pět. *(Michal „Kenny“ Rolínek)*

V zadání jsme dostali 1000 po sobě jdoucích přirozených čísel, mezi nimiž se nenachází žádné prvočíslo $(1001! + 2, \ldots, 1001! + 1001)$. Uvědomíme si, že mezi prvními 1000 přirozenými čísly $1, \ldots, 1000$ je prvočísel více než 5 (konkrétně 168). Dohodněme se, že *posunutím o jedna* budeme myslet přechod od tisícice $(k + 1, k + 2, \ldots, k + 1000)$ k tisícici $(k + 2, k + 3, \ldots, k + 1001)$.

Posunutím o jedna přibereme do tisícice jedno číslo a jedno číslo ztratíme, takže počet prvočísel v tisícici se změní nejvýše o jedna.

[6] Číslo $n!$ (čti „en faktoriál“) je definováno jako $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$.

Když se teď posouváním o jedna dostaneme od tisícice obsahující 168 prvočísel k tisícici s 0 prvočísly, musíme při tom někdy narazit na tisícici po sobě jdoucích přirozených čísel obsahující právě pět prvočísel. Tím je tvrzení dokázáno.

5. úloha
Dokažte, že rovnice

$$a^2 + b^5 = c^3$$

má v oboru přirozených čísel nekonečně mnoho řešení. *(Franta Konopecký)*

Nejdřív si všimneme, že řešením je například trojice $a = 10$, $b = 3$, $c = 7$. Z této jedné trojice teď vyrobíme nekonečně mnoho dalších trojic, které budou také řešením.

Definujme

$$\begin{aligned} a_n &= a \cdot n^{15}, \\ b_n &= b \cdot n^6, \\ c_n &= c \cdot n^{10}, \end{aligned}$$

kde $n \in \mathbb{N}$. Čísla a_n, b_n, c_n jsou řešením původní rovnice, což zjistíme dosazením. Opravdu totiž

$$a_n^2 + b_n^5 = a^2 n^{30} + b^5 n^{30} = (a^2 + b^5) \cdot n^{30} = c^3 n^{30} = c_n^3.$$

Jelikož za n můžeme dosadit libovolné přirozené číslo, existuje nekonečně mnoho různých řešení.

6. úloha
Franta zkoumal funkci

$$f(x) = \frac{9^x}{3 + 9^x}.$$

Po chvilce přišel na to, že když za x postupně dosadí čísla $\frac{1}{2010}, \frac{2}{2010}, \ldots, \frac{2009}{2010}$, umí získané funkční hodnoty sečíst. Jaký součet Frantovi vyšel? *(Franta Konopecký)*

Nejprve se podívejme, jak bude vypadat součet libovolných dvou funkčních hodnot oné funkce:

$$f(x) + f(y) = \frac{9^x}{3 + 9^x} + \frac{9^y}{3 + 9^y} = \frac{3 \cdot 9^x + 3 \cdot 9^y + 2 \cdot 9^{x+y}}{3 \cdot 9^x + 3 \cdot 9^y + 9^{x+y} + 9}.$$

Jestliže nyní položíme $x + y = 1$, dostaneme také $f(x) + f(y) = 1$ (trik!). Takové dvojice získáme, pokud spárujeme první dosazenou hodnotu s poslední, druhou s předposlední atd. Celkem tak vytvoříme 1004 dvojic, přičemž nám zbyde člen $\frac{1005}{2010} = \frac{1}{2}$, pro nějž zvlášť vypočteme, že $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$.

Součet všech funkčních hodnot je pak roven $1 \cdot 1004 + \frac{1}{2} = \frac{2009}{2}$.

7. úloha
Honzík má celá čísla raději než reálná, a tak tráví mnoho času zaokrouhlováním. Teď se zrovna snaží zjistit, kolik je[7] $\left\lfloor (1 + \sqrt{2})^{2010!} \right\rfloor$, ale protože je to už opravdu velké číslo, tak by rád věděl aspoň to, zda je sudé nebo liché. Pomůžete mu? *(Honzík Vaňhara)*

---

[7] Symbol $\lfloor x \rfloor$ značí „celou část reálného čísla x“, tj. největší celé číslo, které je menší nebo rovno x.

Hlavním trikem této úlohy bylo přijít na to, že číslo

$$N = \left(1+\sqrt{2}\right)^{2010!} + \left(1-\sqrt{2}\right)^{2010!}$$

je celé a navíc sudé. To dokážeme tak, že si pomocí binomické věty rozložíme:

$$\begin{aligned}\left(1+\sqrt{2}\right)^{2010!} &= \binom{2010!}{0} + \binom{2010!}{1}\sqrt{2} + \binom{2010!}{2}2 + \cdots + \binom{2010!}{2010!}\sqrt{2}^{2010!},\\ \left(1-\sqrt{2}\right)^{2010!} &= \binom{2010!}{0} - \binom{2010!}{1}\sqrt{2} + \binom{2010!}{2}2 - \cdots + \binom{2010!}{2010!}(-\sqrt{2})^{2010!}.\end{aligned}$$

Když rovnice sečteme, dostáváme

$$N = 2\cdot\left(\binom{2010!}{0}2^0 + \binom{2010!}{2}2^1 + \binom{2010!}{4}2^2 + \cdots\right).$$

Uvnitř závorky jsou celá čísla, tedy N je sudé, stejně jako číslo 2010!. Pak už stačí využít toho, že $1-\sqrt{2}$ je záporné číslo větší než -1. Jeho sudá mocnina tak bude kladná a menší než 1, tedy

$$0 < \left(1-\sqrt{2}\right)^{2010!} < 1.$$

Z rovnosti

$$\left\lfloor \left(1+\sqrt{2}\right)^{2010!} \right\rfloor = \left\lfloor N - \left(1-\sqrt{2}\right)^{2010!} \right\rfloor$$

vidíme, že zkoumáme dolní celou část ze sudého čísla, od kterého jsme odečetli něco mezi nulou a jedničkou. Vyjde nám tedy, že Honzíkovo číslo $N-1$ je liché.

Alternativní důkaz sudosti N (přes rekurentní posloupnost)

Označíme si

$$a = 1+\sqrt{2},\quad b = 1-\sqrt{2},\quad N_k = a^k + b^k,\ \text{tedy}\ N = N_{2010!}.$$

Teď si všimneme, že a, b jsou kořeny kvadratické rovnice $x^2 - 2x - 1$, takže

$$a^2 = 2a+1,\quad b^2 = 2b+1.$$

Vynásobením těchto rovnic čísly a^k, b^k obdržíme

$$a^{k+2} = 2a^{k+1} + a^k,\quad b^{k+2} = 2b^{k+1} + b^k,\quad \text{takže}\quad N_{k+2} = 2N_{k+1} + N_k.$$

Máme tak rekurentní vztah pro posloupnost N_k, ze kterého vyplývá, že pokud jsou čísla N_k i N_{k+1} sudá, pak i N_{k+2} je sudé. Stačí nám proto ověřit sudost prvních dvou hodnot. To je však snadné, neboť

$$N_0 = 1+1 = 2,\quad N_1 = 1+\sqrt{2}+1-\sqrt{2} = 2.$$

8. úloha

Kenny s Pepou se domluvili, že večer při ohni předvedou trik. Pepa nechal Olina vybrat pět písní ze zpěvníku se 124 písněmi. Sám pak z těchto pěti písní vybral čtyři a určil, v jakém pořadí se budou hrát. Na to zavolali Kennyho a ony čtyři písně mu v daném pořadí zazpívali. Jakmile dozpívali, Kenny ihned začal zpívat zbývající pátou. Jak to Pepa s Kennym mohli udělat?[8]

(Pepa Tkadlec)

Množinu písniček označme P a jednotlivým písničkám přiřaďme čísla od 1 do 124. Čísla přiřazená pěti Olinem vybraným písničkám označíme BÚNO[9] $p_0 < p_1 < p_2 < p_3 < p_4$. Pepa určí zbytek i součtu čísel $p_0, \dots, p_4$ po dělení pěti a vynechá píseň p_i.

Pokud označíme ještě součet čtyř ostatních písní jako $j \pmod 5$[10], pak z toho plyne, že

$$p_i \equiv i - j \pmod 5.$$

Ze zpěvníku nyní odeberme čtyři zazpívané písně a ty zbylé (příslušnou množinu označme Q) přečíslujme čísly od 1 do 120 tak, abychom zachovali pořadí z původního číslování. Kennym hledaná píseň bude mít v množině Q číslo o i menší než v množině P, protože v Q chybí písničky p_0 až p_{i-1}. Číslo hledané písničky v novém číslování dává tedy po dělení pěti zbytek $(i-j)-i = -j$ (trik!). Toto číslo Kenny zná, neboť zná součet čísel odpovídajících čtyřem zazpívaným písním.

Čísel od 1 do 120, která dávají po dělení pěti zbytek $-j$, je $120 : 5 = 24$. Aby byl Kenny schopen určit hledanou píseň jednoznačně, zbývá pomocí pořadí čtyř zpívaných písní zakódovat číslo z množiny $\{1, 2, \dots, 24\}$. To je však snadné, neboť 4 různě velká čísla lze uspořádat právě $4! = 24$ různými způsoby. Kennymu a Pepovi se tak stačí předem dohodnout, které pořadí odpovídá kterému číslu.

Kenny už tedy zná číslo hledané písně v novém číslování. Na závěr přičtením i (což je počet zpívaných písní, které mají v Q menší číslo než píseň nezpívaná) dostane její číslo v množině P.

[8] Pepa Kennymu v průběhu nic nenaznačoval, Kenny pátou píseň určil jenom ze zazpívaných písní, jejich pořadí a perfektní znalosti zpěvníku.

[9] Bez újmy na obecnosti.

[10] Tento zápis značí zbytek čísla j po dělení pěti. Podobně zápis $a \equiv b \pmod d$ značí, že čísla a, b dávají stejný zbytek po dělení číslem d. Takovému zápisu se říká kongruence a vše podstatné o něm nalezneš v naší knihovně na stránkách `http://mks.mff.cuni.cz/library/library.php`.