1. seriálová série

Téma:	Komplexní čísla
Datum odeslání:	6. prosince 2010

1. úloha (5 bodů)

Najděte všechna komplexní čísla z, která splňují

$$\left|\frac{z}{\overline{z}} + \frac{\overline{z}}{z}\right| = 1.$$

2. úloha (5 bodů)

Pro libovolné $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ a $n \in \mathbb{N}$ dokažte rovnost

$$1 + \frac{\cos\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\cos 2\alpha}{\cos^2\alpha} + \cdots + \frac{\cos n\alpha}{\cos^n\alpha} = \frac{\sin(n+1)\alpha}{\sin\alpha\ \cos^n\alpha}.$$

3. úloha (5 bodů)

Mějme p, q komplexní čísla, $q \neq 0$. Dokažte, že pokud pro oba (komplexní) kořeny x_1, x_2 kvadratické rovnice $x^2 + px + q^2 = 0$ platí $|x_1| = |x_2|$, pak podíl $\frac{p}{q}$ je reálné číslo.

Řešení seriálové série

1. úloha
Najděte všechna komplexní čísla z, která splňují

$$\left|\frac{z}{\overline{z}} + \frac{\overline{z}}{z}\right| = 1.$$

(Jarda Hančl)

Prvé riešenie: Označme si hľadané komplexné číslo ako $z = a + bi$, potom jeho združené číslo je $\overline{z} = a - bi$. Dosaďme si ich do zadaného zlomku:

$$\left|\frac{z}{\overline{z}} + \frac{\overline{z}}{z}\right| = \left|\frac{a+bi}{a-bi} + \frac{a-bi}{a+bi}\right| = \left|\frac{2a^2 - 2b^2}{a^2 + b^2}\right|,$$

kde $a \neq 0$ alebo $b \neq 0$, aby mal zlomok význam. Pretože vo výraze nemáme žiadnu imaginárnu zložku, dostávame „klasickú" absolútnu hodnotu, ktorá je závislá iba na znamienku $2a^2 - 2b^2$ (nakoľko vždy platí $a^2 + b^2 \geq 0$). Rozoberme teda dve možnosti:

(i) $a^2 > b^2$:

$$\begin{aligned} 2a^2 - 2b^2 &= a^2 + b^2 \\ a^2 &= 3b^2 \\ a &= \pm\sqrt{3}b, \end{aligned}$$

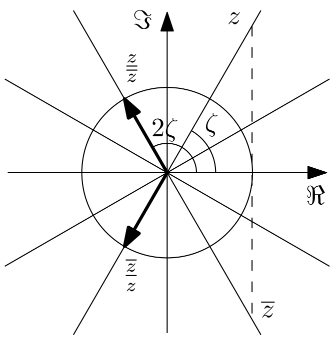
z čoho dostávame riešenia $z = \sqrt{3}k \pm ki$ $(k \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$.

(ii) $a^2 < b^2$:

$$\begin{aligned} 2b^2 - 2a^2 &= a^2 + b^2 \\ b^2 &= 3a^2 \\ b &= \pm\sqrt{3}a, \end{aligned}$$

preto zadanie spĺňajú aj čísla tvaru $z = k \pm \sqrt{3}ki$ $(k \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$.

Skúškou overíme, že všetky čísla, ktoré sme takto dostali, naozaj spĺňajú podmienku zo zadania. Hľadanými číslami teda sú $z = \sqrt{3}k \pm ki$ a $z = k \pm \sqrt{3}ki$ pre $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.



Druhé řešení: Zapišme si z v exponenciálním tvaru $z = re^{i\zeta}$. Pak $\overline{z} = re^{-i\zeta}$ a můžeme snadno odvodit ze vzorečku pro dělení čísel v goniometrickém tvaru, že $z/\overline{z} = e^{2i\zeta}$ a také $\overline{z}/z = e^{-2i\zeta}$.

Nyní si všimneme, že čísla $z/\overline{z}$ a $\overline{z}/z$ jsou komplexně sdružená, jejich součet tedy není nic jiného než dvojnásobek reálné části

$$\frac{z}{\overline{z}} + \frac{\overline{z}}{z} = 2\Re(e^{2i\zeta}) = 2\cos 2\zeta.$$

Řešíme tedy rovnici

$$|2\cos 2\zeta| = 1$$
$$\cos 2\zeta = \pm\frac{1}{2}.$$

Tedy $2\zeta + 2k\pi \in \{\pm\pi/3, \pm 2\pi/3\}$. Podělíme-li dvěma a podíváme se na na řešení v intervalu $(-\pi, \pi\rangle$, dostaneme

$$\zeta \in \{\pm\pi/6, \pm\pi/3, \pm 2\pi/3, \pm 5\pi/6\}.$$

Tedy řešením jsou právě všechna z na polopřímkách s těmito argumenty, tj. z tvaru $re^{i\zeta}$, kde ζ je z výše popsané množiny a $r \in (0, \infty)$.

2. úloha

Pro libovolné $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ a $n \in \mathbb{N}$ dokažte rovnost

$$1 + \frac{\cos\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\cos 2\alpha}{\cos^2\alpha} + \cdots + \frac{\cos n\alpha}{\cos^n\alpha} = \frac{\sin(n+1)\alpha}{\sin\alpha\ \cos^n\alpha}.$$

(Jakub „šnEk“ Opršal)

Pro začátek si všimněme, že úlohu řešíme pro α z intervalu $(0, \pi/2)$, kde jsou $\sin\alpha$ i $\cos\alpha$ nenulové, takže jimi můžeme bez obav dělit.

Komplexní řešení: Podíváme se na zadaný součet, čitatele zlomků připomínají reálné části čísel $e^{in\alpha} = (\cos n\alpha + i\sin n\alpha)$. Tedy zadaný součet je reálnou částí součtu

$$T = 1 + \frac{e^{i\alpha}}{\cos\alpha} + \frac{e^{2i\alpha}}{\cos^2\alpha} + \cdots + \frac{e^{ni\alpha}}{\cos^n\alpha}.$$

Označme si $z = e^{i\alpha}/\cos\alpha$, pak součet T je jen součtem geometrické posloupnosti s kvocientem z, tedy

$$T = \frac{z^{n+1} - 1}{z - 1}.$$

Spočtěme si nejdříve jmenovatel zlomku $z - 1 = (\cos\alpha + i\sin\alpha - \cos\alpha)/\cos\alpha = i\,\mathrm{tg}\,\alpha$. Tedy $z - 1$ je ryze imaginární. Protože nás zajímá jen reálná složka celého součtu, stačí nám spočítat jen imaginární složku čitatele a vydělit ji imaginární složkou jmenovatele.[1]

$$\Im(z^{n+1} - 1) = \Im\left(\frac{\cos(n+1)\alpha + i\sin(n+1)\alpha}{\cos^{n+1}\alpha}\right) = \frac{\sin(n+1)\alpha}{\cos^{n+1}\alpha}.$$

[1] To si můžeme dovolit jen a jen proto, že $\Re(z - 1) = 0$.

Nakonec podělením dostaneme, že hledaný součet je

$$\Re(T) = \frac{\sin(n+1)\alpha}{\cos^{n+1}\alpha \operatorname{tg}\alpha} = \frac{\sin(n+1)\alpha}{\sin\alpha\cos^n\alpha},$$

což jsme chtěli dokázat.

Pro úplnost uvádíme ještě řešení bez použití komplexních čísel, můžete si však všimnout, že k němu potřebujeme už předem znát součet řady. První řešení funguje i bez znalosti součtu.

Řešení matematickou indukcí: Dokážeme tvrzení dokonce pro $n = 0, 1, 2, \ldots$. Budeme tedy postupovat indukcí, pro $n = 0$ říká dokazovaná rovnost $1 = \sin\alpha / \sin\alpha$, což zřejmě platí.

Dále předpokládejme, že tvrzení platí pro $n-1$ a dokažme ho pro n. Označme pro přehlednost $S(n)$ součet na levé straně pro n. Pak platí (za použití indukčního předpokladu)

$$S(n) = S(n-1) + \frac{\cos n\alpha}{\cos^n\alpha} = \frac{\sin n\alpha}{\sin\alpha\cos^{n-1}\alpha} + \frac{\cos n\alpha}{\cos^n\alpha} = \frac{\sin n\alpha\cos\alpha + \cos n\alpha\sin\alpha}{\sin\alpha\cos^n\alpha} = \frac{\sin(n+1)\alpha}{\sin\alpha\cos^n\alpha}.$$

V poslední rovnosti jsme použili součtový vzorec pro $\sin(n\alpha + \alpha)$.

3. úloha

Mějme p, q komplexní čísla, $q \neq 0$. Dokažte, že pokud pro oba (komplexní) kořeny x_1, x_2 kvadratické rovnice $x^2 + px + q^2 = 0$ platí $|x_1| = |x_2|$, pak podíl $\frac{p}{q}$ je reálné číslo. *(Jarda Hančl)*

První řešení: Z Viétových vztahů máme pro oba kořeny vztahy

$$x_1 + x_2 = -p, \qquad x_1x_2 = q^2.$$

Abychom dokázali, že nějaké komplexní číslo je reálné, stačí dokázat, že jeho čtverec je reálný a kladný. Kladnost druhé mocniny totiž vyloučí ryze imaginární čísla, jejichž čtverec je též reálný. Máme

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2 = \frac{(x_1+x_2)^2}{x_1x_2} = \frac{x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2}{x_1x_2} = \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} + 2.$$

Znač $z = x_1/x_2$. Protože $|x_1| = |x_2|$, tak $|z| = |1/z| = 1$, a proto jsou čísla z a $1/z$ komplexně sdružená (jejich argument se liší pouze ve znaménku a obě mají stejnou absolutní hodnotu rovnou 1). Nyní již jen použijeme vlastnost komplexně sdruženého čísla, čímž dostáváme

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2 = z + \frac{1}{z} + 2 = z + \overline{z} + 2 = 2\Re(z) + 2 \in \mathbb{R}.$$

Navíc jelikož $|z| = 1$, tak $\Re(z) \in [-1, 1]$, a proto $2\Re(z) + 2 \geq 0$, což jsme chtěli dokázat.

Druhé řešení: Převedeme si zadanou kvadratickou rovnici substitucí $y = qx$ na rovnici $q^2y^2 + 2pqy + q^2 = 0$, jejíž kořeny označíme y_1 a y_2. Vydělením q^2 dostaneme rovnici

$$y^2 + \frac{p}{q}y + 1 = 0.$$

Nyní z Viétových vztahů dostaneme soustavu

$$y_1 + y_2 = -\frac{p}{q}, \qquad y_1y_2 = 1.$$

Jelikož platilo $|x_1| = |x_2|$, tak máme též $|y_1| = |y_2|$, což společně s $y_1 y_2 = 1$ implikuje $|y_1| = |y_2| = 1$. Tedy máme dvě komplexní čísla se stejnou absolutní hodnotou rovnou jedné, jejichž součin je 1, proto jsou tato čísla nutně komplexně sdružená. Důkaz jednoduše dokončíme výpočtem

$$-\frac{p}{q} = y_1 + y_2 = y_1 + \overline{y_1} = 2\Re(y_1) \in \mathbb{R}.$$

Třetí řešení – účastnické: Zapíšeme oba kořeny v exponenciálním tvaru, tj.

$$x_1 = re^{i\alpha}$$
$$x_2 = re^{i\beta}.$$

Z Viétových vztahů máme pro oba kořeny vztahy

$$-p = x_1 + x_2 = re^{i\alpha} + e^{i\beta)} \quad \Rightarrow \quad p = -re^{i\alpha} + e^{i\beta}$$
$$q^2 = x_1 x_2 = r^2 e^{i(\alpha+\beta)} \quad \Rightarrow \quad q = \pm re^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}.$$

A po dosazení dostáváme

$$\frac{p}{q} = \frac{re^{i\alpha} + e^{i\beta}}{\pm re^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}} = \mp e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}} \mp e^{i\frac{\beta-\alpha}{2}} = \mp 2\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \in \mathbb{R},$$

neboť se jedná o součet dvou komplexně sdružených čísel.

2. seriálová série

Téma:	Komplexní čísla
Datum odeslání:	14. února 2011

4. úloha (5 bodů)

Vně trojúhelníku ABC připíšeme jeho stranám čtverce $ABMM'$, $ACNN'$ a $BCPP'$. Dále označme A_0, B_0 a C_0 středy $M'N'$, MP' a PN. Dokažte, že trojúhelníky ABC a $A_0B_0C_0$ mají stejné těžiště.

5. úloha (5 bodů)

V konvexním tětivovém čtyřúhelníku $ABCD$ označme F_A, F_B, F_C a F_D středy Feuerbachových kružnic trojúhelníků BCD, ACD, ABD a ABC. Dokažte, že se přímky AF_A, BF_B, CF_C a DF_D protínají v jednom bodě.

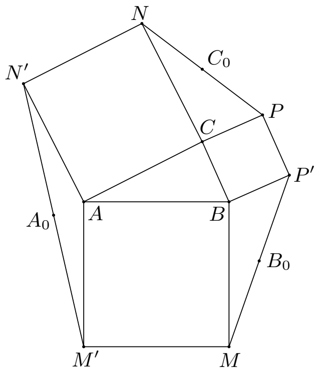
6. úloha (5 bodů)

Mějme konvexní tětivový pětiúhelník $VOJTA$. Vyberme některé tři jeho vrcholy a nalezněme těžiště trojúhelníku, který je jimi tvořen. Tímto těžištěm veďme kolmici na přímku procházející zbylými dvěma vrcholy pětiúhelníku. Dokažte, že všech deset takto vytvořených kolmic prochází jedním bodem.

Řešení seriálové série

4. úloha

Vně trojúhelníku ABC připíšeme jeho stranám čtverce $ABMM'$, $ACNN'$ a $BCPP'$. Dále označme A_0, B_0 a C_0 středy $M'N'$, MP' a PN. Dokažte, že trojúhelníky ABC a $A_0B_0C_0$ mají stejné těžiště. *(Jarda „Jardáč“ Hančl)*



Označme si souřadnice všech bodů vždy odpovídajícím malým písmenkem, tj. $A(a)$, $M(m)$, $M'(m')$ atd. A předpokládejme, že trojúhelník ABC je značený standardně, tj. proti směru hodinových ručiček (viz obrázek). Potom bod N' je obraz bodu C při rotaci o úhel $\pi/2$ kolem bodu A. Položme $\varphi = \pi/2$. Analogicky nahlížíme i na ostatní body ze zadání a máme

$$\begin{aligned} n' &= (c-a)e^{i\varphi} + a, & m' &= (a-b)e^{i\varphi} + a,\\ m &= (a-b)e^{i\varphi} + b, & p' &= (b-c)e^{i\varphi} + b,\\ p &= (b-c)e^{i\varphi} + c, & n &= (c-a)e^{i\varphi} + c. \end{aligned}$$

Bod A_0 je středem úsečky $M'N'$ a můžeme a_0, b_0, c_0 vyjádřit pomocí a, b, c jako

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{(c-a+a-b)e^{i\varphi} + 2a}{2} = \frac{(c-b)e^{i\varphi}}{2} + a,\\ b_0 &= \frac{(a-b+b-c)e^{i\varphi} + 2b}{2} = \frac{(a-c)e^{i\varphi}}{2} + b,\\ c_0 &= \frac{(b-c+c-a)e^{i\varphi} + 2c}{2} = \frac{(b-a)e^{i\varphi}}{2} + c. \end{aligned}$$

Nakonec stačí upravit

$$\frac{a_0+b_0+c_0}{3} = \frac{(c-b+a-c+b-a)e^{i\varphi}}{6} + \frac{a+b+c}{3} = \frac{a+b+c}{3},$$

což znamená, že těžiště trojúhelníků ABC a $A_0B_0C_0$ se shodují.

Pokud bychom trojúhelník ABC značili po směru hodinových ručiček, byl by bod N' obrazem bodu C při rotaci o úhel $-\pi/2$ kolem bodu A (aby byl čtverec $ABMM'$ připsán vně trojúhelníku ABC) a podobně i všechny další rotace by byly provedeny o úhel $-\pi/2$. Stačí tedy položit $\varphi = -\pi/2$ a důkaz proběhne stejně jako v předchozím případě.

5. úloha

V konvexním tětivovém čtyřúhelníku $ABCD$ označme F_A, F_B, F_C a F_D středy Feuerbachových kružnic trojúhelníků BCD, ACD, ABD a ABC. Dokažte, že se přímky AF_A, BF_B, CF_C a DF_D protínají v jednom bodě. *(Jarda „Jardáč“ Hančl)*

Body $ABCD$ leží na jedné kružnici k, proto si definujeme Gaussovu rovinu s počátkem ve středu k. Body A, B, C a D reprezentujme komplexnímy čísly a, b, c a d, obdobně i u dalších bodů.

Při takto definovaném počátku jsou absolutní hodnoty komplexních čísel a, b, c a d stejné a ze seriálového textu už umíme snadno dopočítat komplexní čísla reprezentující středy Feuerbachových kružnic. Máme tedy

$$f_A = \frac{b+c+d}{2}, \quad f_B = \frac{a+c+d}{2}, \quad f_C = \frac{a+b+d}{2}, \quad f_D = \frac{a+b+c}{2}.$$

Dokažme nyní, že přímky AF_A, BF_B, CF_C a DF_D procházejí bodem $X(x)$, kde $x = (a + + b + c + d)/3$. Na tento bod můžeme do jisté míry přijít, pokud si všimneme, že situace je pro všechny body (čísla) symetrická.

Jelikož

$$\frac{2}{3} f_A + \frac{1}{3} a = \frac{2}{3} \left(\frac{b+c+d}{2} \right) + \frac{1}{3} a = \frac{a+b+c+d}{3} = x,$$

leží bod X na úsečce AF_A. Obdobné vztahy můžeme napsat i pro zbylé tři body, proto bude bod X ležet na všech čtyřech přímkách AF_A, BF_B, CF_C i CF_C.

6. úloha

Mějme konvexní tětivový pětiúhelník $VOJTA$. Vyberme některé tři jeho vrcholy a nalezněme těžiště trojúhelníku, který je jimi tvořen. Tímto těžištěm veďme kolmici na přímku procházející zbylými dvěma vrcholy pětiúhelníku. Dokažte, že všech deset takto vytvořených kolmic prochází jedním bodem. *(Michal „Kenny“ Rolínek)*

Zvolme počátek ve středu kružnice opsané pětiúhelníku $VOJTA$ a označme si body $V(v)$, $O(o)$, $J(j)$, $T(t)$ a $A(a)$. Ukážeme, že bod $X(x)$

$$x = \frac{v+o+j+t+a}{3}$$

je hledaným průsečíkem daných přímek. Chceme vlastně dokázat, že spojnice těžišť uvažovaných trojúhelníků a bodu X jsou vždy kolmé na zbývající stranu pětiúhelníku.

Podívejme se tedy například na trojúhelník VOJ, jeho těžiště, které má souřadnice $t_{VOJ} = = (v + o + j)/3$, a přímku TA. Aby byly tyto dvě přímky na sebe kolmé, musí být podíl

$$\frac{x - t_{VOJ}}{t-a} = \frac{\frac{v+o+j+t+a}{3} - \frac{v+o+j}{3}}{t-a} = \frac{1}{3} \cdot \frac{t+a}{t-a}$$

ryze imaginární. To ale platí z Thaletovy věty posané v seriálu, neboť body T a A leží na jedné kružnici se středem v počátku.

Pro zbylých devět trojúhelníků se kolmost ukáže podobně. Všimni si, že vyjádření bodu X je symetrické vůči proměnným v, o, j, t a a.

3. seriálová série

Téma: Komplexní čísla

Datum odeslání: 11. dubna 2011

7. úloha (5 bodů)

Buď k přirozené číslo. Dokažte, že součin dvou čísel tvaru $x^2 + ky^2$ pro nějaká celá čísla x, y je téhož tvaru. Tedy ukažte, že pro každá celá čísla x_1, x_2, y_1 a y_2 existují celá čísla x a y, že $x^2 + ky^2 = (x_1^2 + ky_1^2)(x_2^2 + ky_2^2)$.

8. úloha (5 bodů)

Najděte všechny trojice celých čísel x, y a z, která splňují

$$x^2 + y^2 = 2011^z.$$

9. úloha (5 bodů)

Najděte všechny dvojice celých čísel x a y, která řeší rovnici

$$y(y + 1) = x^5 - 1.$$

Řešení seriálové série

7. úloha

Buď k přirozené číslo. Dokažte, že součin dvou čísel tvaru $x^2 + ky^2$ pro nějaká celá čísla x, y je téhož tvaru. Tedy ukažte, že pro každá celá čísla x_1, x_2, y_1 a y_2 existují celá čísla x a y, že $x^2 + ky^2 = (x_1^2 + ky_1^2)(x_2^2 + ky_2^2)$. *(Jakub „šnEk“ Opršal)*

Volně podle Kristýny Zemkové: Kořeny polynomu x^2+ky^2 jsou všechny druhé odmocniny z $(-ky^2)$. Jelikož $k \in \mathbb{N}$ a $y^2 \geq 0$, je $-ky^2 \leq 0$ a odmocninou bude ryze imaginární číslo $\pm iy\sqrt{k}$. Pak platí

$$\begin{aligned}(x_1^2 + ky_1^2)(x_2^2 + ky_2^2) &= (x_1 + iy_1\sqrt{k})(x_1 - iy_1\sqrt{k})(x_2 + iy_2\sqrt{k})(x_2 - iy_2\sqrt{k}) = \\ &= \Big((x_1 + iy_1\sqrt{k})(x_2 + iy_2\sqrt{k})\Big)\Big((x_1 - iy_1\sqrt{k})(x_2 - iy_2\sqrt{k})\Big) = \\ &= \Big(x_1x_2 + i\sqrt{k}(x_1y_2 + x_2y_1) - ky_1y_2\Big)\Big(x_1x_2 - i\sqrt{k}(x_1y_2 + x_2y_1) - ky_1y_2\Big).\end{aligned}$$

To je však součin dvou komplexně sdružených čísel, který je roven

$$(x_1x_2 - ky_1y_2)^2 + k(x_1y_2 + x_2y_1)^2.$$

Položme $x = x_1x_2 - ky_1y_2$ a $y = x_1y_2 + x_2y_1$. Jelikož x_1, x_2, y_1, $y_2 \in \mathbb{Z}$, také $x, y \in \mathbb{Z}$ a výsledkem je $x^2 + ky^2$.

8. úloha

Najděte všechny trojice celých čísel x, y a z, která splňují

$$x^2 + y^2 = 2011^z.$$

(Jarda „Jardáč“ Hančl & Jakub „šnEk“ Opršal)

Předně si všimneme, že $x^2 + y^2$ je celé číslo, tím pádem musí být $z \geq 0$. Předpokládejme nejprve, že $x \neq 0$. Levou stranu rovnice rozložíme na součin jako

$$x^2 + y^2 = (x + iy)(x - iy).$$

Jelikož je $2011 \equiv 3 \pmod 4$, je 2011 Gaussovým prvočíslem a pravou stranu rovnice lze tedy v Gaussových číslech rozložit pouze na mocniny 2011 a invertibilní prvky, neboli

$$\begin{aligned}x + iy &= \varepsilon_1 \cdot 2011^k,\\ x - iy &= \varepsilon_2 \cdot 2011^l\end{aligned}$$

pro nějaká $k, l \in \mathbb{Z}$ a $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \{\pm 1, \pm i\}$. Z rovnosti $|x + iy| = |x - iy|$ dostáváme $k = l$, což spolu s $k + l = z$ dává $k = l = z/2$, tedy z musí být sudé číslo. Pokud by bylo $\varepsilon_1 = \pm i$, bylo by číslo $x + iy$ ryze imaginární, což není možné vzhledem k předpokladu $x \neq 0$. Musí tedy být $\varepsilon_1 = \pm 1$ a z rovnosti $\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 = 1$ plyne $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$. Potom je ovšem číslo $x + iy = \varepsilon_1 \cdot 2011^k = \pm 2011^{z/2}$ reálné, což vynucuje $y = 0$. Za předpokladu $x \neq 0$ tedy dostáváme pro nezáporná sudá z pouze řešení

$$x = \pm 2011^{z/2}, \quad y = 0.$$

Možnosti $x = 0$ pak odpovídá symetrický výsledek

$$x = 0, \quad y = \pm 2011^{z/2}.$$

9. úloha

Najděte všechny dvojice celých čísel x a y, která řeší rovnici

$$y(y + 1) = x^5 - 1.$$

(Jakub „šnEk“ Opršal)

Nejprve si rovnici upravíme do tvaru

$$y^2 + y + 1 = x^5$$

a rozložíme levou stranu v Eisensteinových celých číslech:

$$(y - \omega)(y + 1 + \omega) = x^5.$$

Bedeme chtít použít větu o mocninách, k čemuž potřebujeme, aby čísla $y - \omega$ a $y + 1 + \omega$ byla nesoudělná. Jejich největší společný dělitel dělí jejich rozdíl, který je $1 + 2\omega$. Jelikož $1 + 2\omega$ je Eisensteinovo prvočíslo, máme pro největšího společného dělitele dvě možnosti: $1 + 2\omega$ a 1.

Nechť je tedy největší společný dělitel závorek na levé straně $1 + 2\omega$. Pak $(1 + 2\omega)^2 = -3 \mid x^5$, tedy $3 \mid x^5$ v celých číslech, proto musí platit dokonce $3^5 \mid x^5$. Když se podíváme na upravenou rovnost modulo 9, dostaneme

$$y^2 + y + 1 \equiv 0 \pmod 9.$$

Tato kongruence však nemá řešení. Aby y bylo řešení, musí platit $y(y + 1) \equiv 2 \pmod 3$, tedy $y \equiv 1 \pmod 3$. Máme tedy celkem tři možnosti modulo 9, a to 1, 4 a 7, ale dosazením do levé strany dostaneme vždy 3, tedy ani jedno z těchto čísel není řešením.

Pokud jsou závorky na levé straně nesoudělné, můžeme použít tvrzení o mocninách. Existují tedy celá čísla a, b a invertibilní prvek ε v $\mathbb{Z}[\omega]$, že

$$y - \omega = \varepsilon(a + b\omega)^5.$$

Uvědomme si, že v $\mathbb{Z}[\omega]$ je každý invertibilní prvek pátou mocninou (např. $1+\omega = -\omega^5$). Můžeme tedy ε z naší rovnice vynechat.

Spočtěme $(a + b\omega)^5$, platí

$$(a + b\omega)^5 = a^5 + 5a^4b\omega + 10a^3b^2(-1 - \omega) + 10a^2b^3 + 5ab^4\omega + b^5(-1 - \omega).$$

Porovnáním složek u ω dostáváme rovnici v celých číslech

$$5a^4b - 10a^3b^2 + 5ab^4 - b^5 = -1,$$

odkud je vidět, že $b \mid -1$, a navíc $-b^5 \equiv -1 \pmod 5$, tedy $b = 1$. Dosadíme tuto hodnotu do rovnice a dostaneme novou rovnici s neznámou a

$$5a^4 - 10a^3 + 5a = 0,$$

$$a(a - 1)(a^2 - a - 1) = 0,$$

která má jediná celočíselná řešení $a = 0$ a $a = 1$.

Víme, že $y - \omega = \omega^5$, resp. $y - \omega = (1 + \omega)^5$. Po umocnění pravých stran dostaneme $y - \omega = -1 - \omega$, resp. $y - \omega = -\omega$, tedy $y = -1$, resp. 0 a v obou případech dostáváme $x = 1$. Úloha má tedy dvě řešení – dvojice $(x, y) = (1, -1)$ a $(x, y) = (1, 0)$.