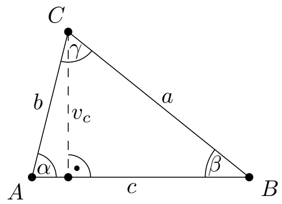
Povídání ke třetí jarní sérii

Milé PraSátko, i k poslední tematické sérii letošního ročníku jsme pro Tebe připravili krátké povídání, tentokrát na téma obsahy. Nejspíše už budeš znát vše nutné ze školy, a pokud se tedy cítíš jisté v kopýtkách, můžeš přeskočit rovnou k úlohám. V textu si uvedeme některé vzorce pro výpočet obsahu trojúhelníka a vyřešíme dva příklady. Pro přehlednost se dohodneme, že obsah trojúhelníka ABC budeme značit jako $[ABC]$.



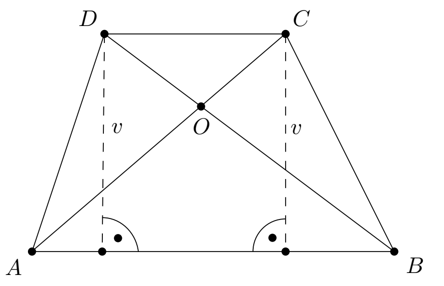
V trojúhelníku ABC označme popořadě a, b, c délky stran, v_a, v_b, v_c délky příslušných výšek, α, β, γ odpovídající úhly, ϱ poloměr kružnice vepsané a konečně $s = \frac{a+b+c}{2}$ polovinu obvodu. Pak

(i) $[ABC] = \frac{1}{2}av_a = \frac{1}{2}bv_b = \frac{1}{2}cv_c$,
(ii) $[ABC] = \frac{1}{2}ab\sin\gamma = \frac{1}{2}bc\sin\alpha = \frac{1}{2}ac\sin\beta$,
(iii) $[ABC] = \varrho s$,
(iv) $[ABC] = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$.

Všimni si, že ve druhém vzorci jsme jen vyjádřili výšku pomocí sinu úhlu a jiné strany. Poslední vzorec se nazývá *Heronův*. Všechny výše uvedené vzorce můžeš ve svých řešeních používat bez důkazu.

Příklad. Mějme lichoběžník $ABCD$ se základnami AB a CD. Označme O průsečík jeho úhlopříček. Dokažte, že trojúhelníky AOD a BOC mají stejný obsah.

Řešení.



Protože jsou úsečky AB a CD rovnoběžné, mají výšky příslušné straně AB v trojúhelnících ABC a ABD shodnou délku v. Můžeme tedy psát

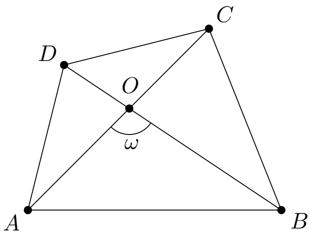
$$[ABC] = \frac{1}{2}|AB| \cdot v = [ABD].$$

Výsledek dostáváme odečtením $[ABO]$ od první a třetí strany rovnice.

Příklad. Mějme konvexní čtyřúhelník $ABCD$. Označme O průsečík jeho úhlopříček. Dokažte, že platí

$$[ABO] \cdot [CDO] = [BCO] \cdot [ADO].$$

Řešení.



Označme $|\sphericalangle AOB| = \omega$. Pak

$$\begin{aligned}
[ABO] \cdot [CDO] &= \frac{1}{2}|OA||OB| \sin\omega \cdot \frac{1}{2}|OC||OD| \sin\omega,\\
[BCO] \cdot [ADO] &= \frac{1}{2}|OB||OC| \sin(180^\circ - \omega) \cdot \frac{1}{2}|OD||OA| \sin(180^\circ - \omega).
\end{aligned}$$

Jelikož $\sin\omega = \sin(180^\circ - \omega)$, jsme hotovi.

3. jarní série

Téma: Obsahy

Datum odeslání: 11. dubna 2011

1. úloha (3 body)

Je možné sestrojit trojúhelník s výškami 1 cm, 2 cm a 3 cm? Svou odpověď zdůvodněte.

2. úloha (3 body)

Pepa vykrojil z obdélníkového těsta kroužek a snědl ho. Alča teď chce rovným řezem rozdělit zbylé těsto na dvě části stejného obvodu i obsahu. Jak to má udělat?

3. úloha (3 body)

Jsou dány rovnoběžníky $ABCD$ a $AB'C'D'$ tak, že bod B' leží na straně BC a bod D leží na straně $C'D'$. Ukažte, že obsahy těchto rovnoběžníků jsou shodné.

4. úloha (5 bodů)

Martina si vzala ostroúhlý trojúhelník a nad jeho stranami (jakožto nad průměry) sestrojila kružnice. Poté ty body, které leží uvnitř právě jednoho kruhu, obarvila žlutě a ty body, které leží uvnitř všech tří, zeleně. Dokažte, že pokud od obsahu žluté plochy odečetla obsah zelené, získala dvojnásobek obsahu trojúhelníka.

5. úloha (5 bodů)

Mějme jednotkový čtverec $ABCD$ a na jeho stranách AB, BC, CD, DA postupně body K, L, M, N tak, že přímka KM je rovnoběžná s přímkou BC a přímka LN je rovnoběžná s přímkou AB. Určete obsah trojúhelníka NMD, víte-li, že obvod trojúhelníka KLB je roven jedné.

6. úloha (5 bodů)

Je možné rozdělit pravoúhlý rovnoramenný trojúhelník na 2011 pravoúhlých rovnoramenných trojúhelníků tak, aby žádné dva neměly stejný obsah? Svou odpověď zdůvodněte.

7. úloha (5 bodů)

Přímky p, q se protínají v bodě P, mimo ně leží bod U. Bodem U vedeme přímku t, která protne přímky p, q v bodech K, L tak, že U leží na úsečce KL. Dokažte, že součet převrácených hodnot obsahů trojúhelníků KUP a LUP nezávisí na volbě přímky t.

8. úloha (5 bodů)

Dokažte, že všechny přímky, které dělí obvod trojúhelníka ve stejném (nenulovém) poměru jako jeho obsah, procházejí jedním bodem.

Řešení 3. jarní série

1. úloha
Je možné sestrojit trojúhelník s výškami 1 cm, 2 cm a 3 cm? Svou odpověď zdůvodněte.
(Pepa Tkadlec)

Dokážeme sporem, že takový trojúhelník sestrojit nelze. Předpokládejme, že existuje trojúhelník se stranami a, b, c a s příslušnými výškami $v_a = 1$ cm, $v_b = 2$ cm, $v_c = 3$ cm. Obsah S trojúhelníku lze dle známého vzorce vyjádřit třemi způsoby jako

$$S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot v_a, \qquad S = \frac{1}{2} \cdot b \cdot v_b, \qquad S = \frac{1}{2} \cdot c \cdot v_c.$$

Vyjádřením stran a dosazením za délky výšek získáme

$$a = \frac{2S}{v_a} = 2S, \qquad b = \frac{2S}{v_b} = S, \qquad c = \frac{2S}{v_c} = \frac{2}{3} \cdot S.$$

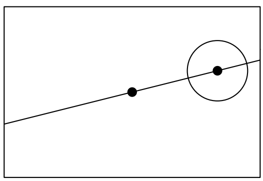
Všimněme si, že

$$b + c = S + \frac{2}{3} \cdot S = \frac{5}{3} \cdot S < 2S = a.$$

Pro strany a, b, c není splněna trojúhelníková nerovnost, což je spor. Trojúhelník s výškami 1 cm, 2 cm a 3 cm tedy nemůže existovat (a tudíž nelze ani sestrojit).

2. úloha
Pepa vykrojil z obdélníkového těsta kroužek a snědl ho. Alča teď chce rovným řezem rozdělit zbylé těsto na dvě části stejného obvodu i obsahu. Jak to má udělat? *(Pepa Tkadlec)*

Alče stačí vést řez po spojnici středu obdélníkového těsta a středu vyříznutého kroužku. Libovolný řez procházející středem obdélníku jej rozdělí na dva shodné (středově souměrné) útvary, které tedy mají stejný obvod i obsah. Je-li navíc z takového těsta vyříznut kroužek a vedeme-li řez jeho středem, pak se obsahy obou částí těsta zmenší o stejnou část – polovinu obsahu kroužku – a jejich obvody zvětší o stejnou část – polovinu obvodu kroužku zmenšenou o jeho průměr.

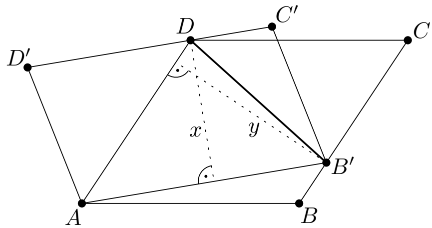


3. úloha
Jsou dány rovnoběžníky $ABCD$ a $AB'C'D'$ tak, že bod B' leží na straně BC a bod D leží na straně $C'D'$. Ukažte, že obsahy těchto rovnoběžníků jsou shodné. *(Pepa Tkadlec)*

Označme délky výšek z vrcholů D a B' v trojúhelníku DAB' postupně písmeny x a y. Pak

$$[AB'C'D'] = |AB'| \cdot x = 2 \cdot [DAB'] = |AD| \cdot y = [ABCD]$$

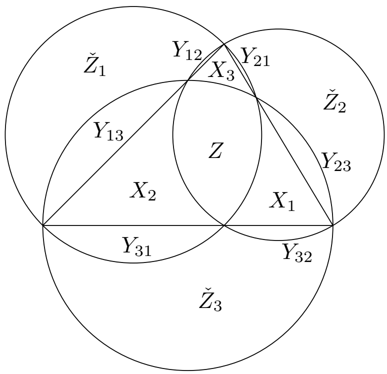
a jsme hotovi.



4. úloha

Martina si vzala ostroúhlý trojúhelník a nad jeho stranami (jakožto nad průměry) sestrojila kružnice. Poté ty body, které leží uvnitř právě jednoho kruhu, obarvila žlutě a ty body, které leží uvnitř všech tří, zeleně. Dokažte, že pokud od obsahu žluté plochy odečetla obsah zelené, získala dvojnásobek obsahu trojúhelníka. *(Martina Vaváčková)*

Nejprve si uvědomíme, že průsečík Thaletových kružnic nad dvěma stranami ostroúhlého trojúhelníka leží na jeho třetí straně, neboť se jedná o patu výšky (tj. bod, z něhož jsou dvě strany vidět pod úhlem 90°). Označme $\check{Z}_1$, $\check{Z}_2$, $\check{Z}_3$ postupně obsahy těch částí, které náleží pouze jedné z kružnic, Z obsah části, která náleží všem třem kružnicím, X_1, X_2, X_3 obsahy částí uvnitř trojúhelníka, které náleží právě dvěma kružnicím, a Y_{12}, Y_{13}, …, Y_{32} obsahy částí vně trojúhelníka, které náleží právě dvěma kružnicím. Vše je patrné z následujícího obrázku.



Protože strana trojúhelníka dělí jí příslušný kruh na dvě části se stejným obsahem, můžeme psát

$$\begin{aligned}
\check{Z}_1 + Y_{12} + Y_{13} &= Z + X_2 + X_3 + Y_{21} + Y_{31},\\
\check{Z}_2 + Y_{23} + Y_{21} &= Z + X_3 + X_1 + Y_{32} + Y_{12},\\
\check{Z}_3 + Y_{31} + Y_{32} &= Z + X_1 + X_2 + Y_{13} + Y_{23}.
\end{aligned}$$

Po sečtení těchto tří rovnic dostaneme

$$\check{Z}_1 + \check{Z}_2 + \check{Z}_3 = 2(X_1 + X_2 + X_3) + 3Z,$$
$$\text{tedy} \quad (\check{Z}_1 + \check{Z}_2 + \check{Z}_3) - Z = 2(X_1 + X_2 + X_3 + Z).$$

Na levé straně rovnosti je rozdíl obsahu žluté a zelené části, na pravé je dvojnásobek obsahu trojúhelníka. Tím je důkaz hotov.

Jiné řešení (podle Filipa Hláska): Označme S součet obsahů všech tří kruhů, $S_\triangle$ obsah trojúhelníka, S_z obsah zelené plochy a $S_ž$ obsah žluté plochy. Nyní dvěma způsoby vyjádříme obsah celého útvaru. Nejprve vezmeme obsah trojúhelníka a k němu přičteme obsah vnějších půlkruhů, poté vezmeme součet obsahů všech tří kruhů, odečteme od něho obsah zelené části, která byla započítána třikrát, přičteme obsah žluté části, která byla započítána jednou, a výsledek vydělíme dvěma.

$$\frac{S}{2} + S_\triangle = \frac{S - S_z + S_ž}{2}.$$

Po úpravě dostáváme

$$2S_\triangle = S_ž - S_z,$$

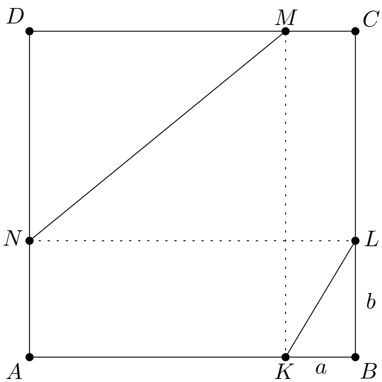
což jsme měli dokázat.

5. úloha

Mějme jednotkový čtverec $ABCD$ a na jeho stranách AB, BC, CD, DA postupně body K, L, M, N tak, že přímka KM je rovnoběžná s přímkou BC a přímka LN je rovnoběžná s přímkou AB. Určete obsah trojúhelníka NMD, víte-li, že obvod trojúhelníka KLB je roven jedné.

(Petr Ryšavý)

Označme $|KB| = a$, $|BL| = b$. Pak $|KL| = \sqrt{a^2 + b^2}$.



Podmínku ze zadání přepíšeme jako $a + b + \sqrt{a^2 + b^2} = 1$ a upravíme

$$\begin{aligned} \sqrt{a^2 + b^2} &= 1 - a - b, \\ a^2 + b^2 &= 1 + a^2 + b^2 + 2ab - 2a - 2b, \\ -\frac{1}{2} &= ab - a - b. \end{aligned}$$

Nyní už můžeme vypočítat obsah trojúhelníku DMN jako

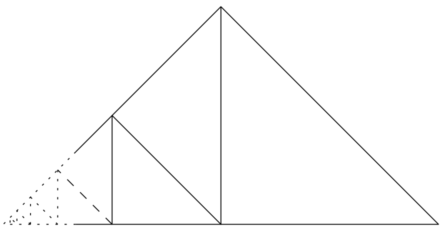
$$[DMN] = \frac{1}{2} \cdot |DM| \cdot |DN| = \frac{1}{2}(1-a)(1-b) = \frac{1}{2}(1 + \underbrace{ab - a - b}_{=-\frac{1}{2}}) = \frac{1}{4}$$

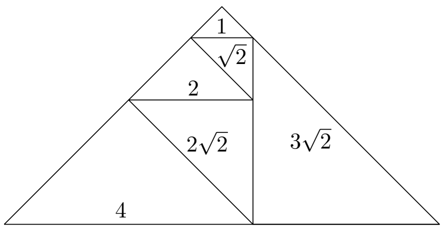
a jsme tedy hotovi.

6. úloha

Je možné rozdělit pravoúhlý rovnoramenný trojúhelník na 2011 pravoúhlých rovnoramenných trojúhelníků tak, aby žádné dva neměly stejný obsah? Svou odpověď zdůvodněte. *(Petr Ryšavý)*

Na příkladu ukážeme, že pravoúhlý rovnoramenný trojúhelník lze podle zadání rozdělit. Nejprve ho rozpůlíme na dva shodné trojúhelníky, a poté jeden z nich opět rozdělíme. Tento postup opakujeme, až získáme 2006 trojúhelníků podobných původnímu, přičemž pouze dva nejmenší mají stejný obsah. Jeden z nich pak jako na obrázku rozdělíme na šest trojúhelníků, jejichž přepony jsou v poměru $1 : \sqrt{2} : 2 : 2\sqrt{2} : 4 : 3\sqrt{2}$. Takto získáme 2011 trojúhelníků podobných zadanému, z nichž každé dva mají různý obsah.



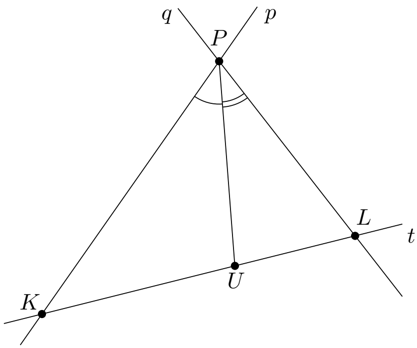


7. úloha

Přímky p, q se protínají v bodě P, mimo ně leží bod U. Bodem U vedeme přímku t, která protne přímky p, q v bodech K, L tak, že U leží na úsečce KL. Dokažte, že součet převrácených hodnot obsahů trojúhelníků KUP a LUP nezávisí na volbě přímky t. *(Jarda „Jardáč“ Hančl)*

Podle Domnika Lachmana: Upravme nejdříve

$$\frac{1}{[KUP]} + \frac{1}{[LUP]} = \frac{[LUP] + [KUP]}{[KUP] \cdot [LUP]} = \frac{[PKL]}{[KUP] \cdot [LUP]}.$$



Trojím užitím vzorce pro obsah trojúhelníka $[ABC] = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |AC| \cdot \sin |\sphericalangle BAC|$ teď dostáváme

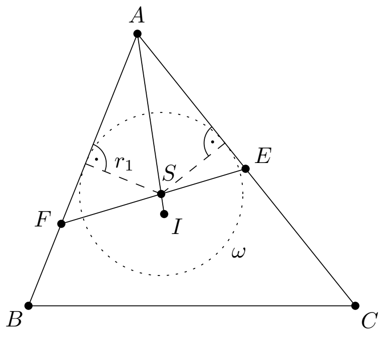
$$\begin{aligned}\frac{[PKL]}{[KUP] \cdot [LUP]} &= \frac{\frac{1}{2} \cdot |PK| \cdot |PL| \cdot \sin |\sphericalangle KPL|}{\left(\frac{1}{2} \cdot |PK| \cdot |PU| \cdot \sin |\sphericalangle KPU|\right) \cdot \left(\frac{1}{2}|PL| \cdot |PU| \cdot \sin |\sphericalangle LPU|\right)} \\ &= \frac{2 \cdot \sin |\sphericalangle KPL|}{|PU|^2 \cdot \sin |\sphericalangle KPU| \cdot \sin |\sphericalangle LPU|}.\end{aligned}$$

Hodnota získaného výrazu nezávisí na pozici přímky t, což jsme měli dokázat.

8. úloha

Dokažte, že všechny přímky, které dělí obvod trojúhelníka ve stejném (nenulovém) poměru jako jeho obsah, procházejí jedním bodem. *(Michal „Kenny“ Rolínek)*

Ukážeme, že přímka dělí obsah i obvod trojúhelníka ABC ve stejném poměru, právě když prochází středem I jeho kružnice vepsané. Vezměme tedy nějakou přímku p, která protne strany AB a AC postupně v bodech F a E. Označme S průsečík AI a EF a uvažme kružnici ω se středem S, která je vepsaná do úhlu BAC. Budiž její poloměr r_1.



Nyní vyjádříme obsahy příslušných trojúhelníků. Platí

$$[AEF] = [AFS] + [ASE] = \frac{1}{2} r_1 (|AF| + |AE|).$$

a podle známého vzorce pro obsah též $[ABC] = \frac{1}{2}r(|AB| + |BC| + |CA|)$, kde r je poloměr kružnice vepsané.

Přímka p dělí obsah i obvod trojúhelníka ABC ve stejném poměru, právě když

$$\frac{[AEF]}{[ABC]} = \frac{|AE| + |AF|}{|AB| + |BC| + |CA|}.$$

Pokud dosadíme vyjádření obsahů, zjistíme, že toto nastane právě když $r = r_1$. Jinými slovy, právě když ω je vepsaná kružnice $\triangle ABC$, neboli ekvivalentně $I \in EF$.

Všechny takové přímky tedy skutečně procházejí jedním bodem.