Hry a soutěže

1. podzimní série Termín odeslání: 3. října 2011

Úloha 1. (3 body)
Znuděný πtr si hází mincí. Vždy, když mu padne panna, jeden bod si přičte, naopak když padne orel, jeden bod ztrácí. Kolik bodů může mít po 17 hodech, pokud na začátku neměl žádné? Nalezněte všechny možnosti a ukažte, že jiné nejsou.

Úloha 2. (3 body)
Každý ze šesti bratrů hodil kostkou a každému padlo jiné číslo. Přitom Adam hodil dvakrát víc než Bedřich, Cyril dokonce třikrát víc než Bedřich a David třikrát víc než Emil. Kolik padlo Filipovi?

Úloha 3. (3 body)
Po svých prvních pěti utkáních na mistrovství světa v koulené měl Miškův tým skóre vstřelených a obdržených branek 5:3. Kolikrát nejvíce a kolikrát nejméně mohl vyhrát? Své tvrzení podpořte i příkladem, jak mohly jednotlivé zápasy dopadnout.

Úloha 4. (5 bodů)
Alča a Háňa hrají hru, na začátku níž si Háňa vymyslí dvojciferné přirozené číslo. V každém tahu pak Alča poví Háně nějaké přirozené číslo $d > 1$. Pokud je d dělitelem Hánina čísla, Alča vyhrává. V opačném případě Háňa odečte číslo d od svého čísla a hra pokračuje dalším Alčiným tahem. Jakmile Háňa dostane záporné číslo, Alča prohraje. Poraďte Alčе, jak má hrát, aby vždy vyhrála.

Úloha 5. (5 bodů)
Kenny, Olin a Šavlík hráli fotbal, přičemž jeden z nich byl vždy brankář a zbylí dva útočili. Ten, kdo vstřelil branku, šel na následující hru do brány. Později Vejtkovi prozradili, že Kenny útočil 12 her, Olin 21 her a Šavlík bránil 8 her, z čehož Vejtek ihned bystře poznal, kdo vstřelil šestou branku. Kdo to byl?

Úloha 6. (5 bodů)
Vojenskou základnu obývají tři seržanti a několik vojínů. Seržanti se po dnech střídají ve službě. Od generála dostali následující instrukce:

(i) Každý den musí alespoň jeden vojín dostat rozkaz.
(ii) Žádný vojín nesmí za celou dobu dostat více než dva rozkazy, přitom během jednoho dne může dostat rozkaz nejvýše jeden.
(iii) Seznam vojínů, jimž byl během dne udělen rozkaz, nesmí být pro žádné dva různé dny stejný.
(iv) První seržant, který tyto instrukce během svého dne nenaplní, bude poslán do vězení.

Všichni seržanti vědí, kteří vojíni dostali ve kterých dnech rozkaz. Dokáže některý z nich (bez toho, aby spolupracoval s ostatními dvěma) udílet rozkazy tak, aby se vězení jistě vyhnul?

Úloha 7. (5 bodů)
Do tenisového turnaje se přihlásilo 2^n soutěžících. V každém kole se všichni ještě nevypadlí hráči rozdělí do dvojic a odehrají zápas. Vítězové postupují do dalšího kola, poražení vypadávají. Na konci turnaje, když zůstane pouze jediný hráč, je potřeba vytvořit výsledkovou listinu, ve které

nikdo nesmí být na horší pozici než hráč, kterého porazil. Kolika způsoby je možné takové pořadí vytvořit, pokud žádní dva hráči nesmí skončit na stejné příčce?

Úloha 8. (5 bodů)

Kdesi ve čtverci o straně 10 sedí neviditelná blecha. Ač ji Pepa nevidí, hraje s ní hru. Ve svém n-tém tahu nakreslí přímku a blecha poposkočí libovolným směrem o $\frac{1}{n}$ tak, aby neopustila čtverec a nepřeskočila žádnou z již nakreslených přímek. Pepa vyhraje, pokud blecha nemá kam skočit. Dokáže Pepa vyhrát nezávisle na tom, kde blecha začíná a jak skáče?

Hry a soutěže

1. PODZIMNÍ SÉRIE VZOROVÉ ŘEŠENÍ

Úloha 1.

(149; 133; 2,60; 3)

Znuděný πtr si hází mincí. Vždy, když mu padne panna, jeden bod si přičte, naopak když padne orel, jeden bod ztrácí. Kolik bodů může mít po 17 hodech, pokud na začátku neměl žádné? Nalezněte všechny možnosti a ukažte, že jiné nejsou. *(Peter „πtr“ Korcsok)*

ŘEŠENÍ:

Keďže nás zaujíma celkový počet bodov B a body len pričítame alebo odčítame, nezáleží na poradí, v akom sme panny a orlov hádzali. Označme si počet hodených panien p, orol teda musel padnúť v $o = 17 - p$ hodoch. Zo zadania pre celkový počet bodov platí

$$B = p - o = p - (17 - p) = 2p - 17.$$

Ďalej vieme, že panna mohla padnúť 0 až 17-krát, dosadením týchto hodnôt do predchádzajúceho vzorca dostaneme všetky možné riešenia – všetky nepárne čísla od -17 do 17 vrátane.

POZNÁMKY:

Chcem vás na začiatok pochváliť **:)**. Prišlo mi veľmi veľa pekných riešení, ale niektorí sa dopustili drobnej chybičky, že zabudli overiť, či sa naozaj dajú všetky nepárne body dosiahnuť. Preto som strhával 1 – 2 bodíky, záležalo na vážnosti previnenia **:)**.

(Viktor Szabados & Peter „πtr“ Korcsok)

Úloha 2.

(163; 161; 2,88; 3)

Každý ze šesti bratrů hodil kostkou a každému padlo jiné číslo. Přitom Adam hodil dvakrát víc než Bedřich, Cyril dokonce třikrát víc než Bedřich a David třikrát víc než Emil. Kolik padlo Filipovi? *(Radek Olšák)*

ŘEŠENÍ:

Označme si čísla, ktoré bratom padli, postupne A, B, C, D, E a F. Zo zadania platí $A = 2B$, $C = 3B$ a $D = 3E$. Pretože C a D sú trojnásobky B a E, musia byť v nejakom poradí 3 a 6, a teda B a E musia byť 1 a 2. Na A, ktoré je vďaka prvej rovnici párne, nám zostáva len číslo 4. Filipovi teda padlo číslo 5.

POZNÁMKY:

Všetci ste sa dostali k správnemu výsledku. Je síce pravda, že úloha je jednoduchá a riešenie vidieť na prvý pohľad, ale nestačilo napísať priradenie bratov k číslam. Bolo potrebné zdôvodniť, ako ste naň prišli. *(Kaťa Duníková)*

Úloha 3.

(146; 136; 2,51; 3)

Po svých prvních pěti utkáních na mistrovství světa v koulené měl Miškův tým skóre vstřelených a obdržených branek 5:3. Kolikrát nejvíce a kolikrát nejméně mohl vyhrát? Své tvrzení podpořte i příkladem, jak mohly jednotlivé zápasy dopadnout. *(Pepa Tkadlec)*

Řešení:

Protože Miškův tým víc branek vstřelil než inkasoval, musel alespoň jednou vyhrát. To se mohlo stát, pokud zápasy dopadly například 5:3, 0:0, 0:0, 0:0, 0:0. Minimální počet výher je tedy 1.

Miškův tým mohl také vyhrát právě čtyřikrát – tomu odpovídají například výsledky 1:0, 1:0, 1:0, 1:0, 1:3. Na závěr dvěma způsoby ukážeme, že Miškův tým všech pět zápasů vyhrát nemohl a maximální počet výher tak je 4.

1. způsob: Předpokládejme, že Miškův tým vyhrál všech 5 zápasů. Pak při každém získal alespoň o jeden bod víc než soupeř, celkem tedy získal alespoň o 5 bodů víc. Na konci má ale pouze o 2 body víc, což je spor.

2. způsob: Opět předpokládejme, že Miškův tým vyhrál všech 5 zápasů. V každém musel vstřelit branku, a protože dal právě 5 branek, musel dát v každém zápase právě jednu. Protože ale dostal alespoň jednu branku, tak zápas, ve kterém ji dostal, už nemohl vyhrát. A tedy nevyhrál všech 5 zápasů.

Poznámky:

Většina vyřešila úlohu správně. Potom byla skupinka lidí, která zapsala pouze výsledek. To nemůže být nikdy správně, protože musíte dokázat (vysvětlit), že je váš výsledek správný. Tato řešení jsem ohodnotil 2 body. Našlo se pár lidí, kteří si špatně vyložili zadání a řešili úlohu tak, že v koulené zakázali remízy, to pak byla trochu rozdílná úloha. Za to jsem (pokud se nenašla další chyba) nic nestrhával. Někteří to vyřešili šikovně tak, že vyřešili příklad pro obě možnosti, a ty bych tady rád pochválil. *(Majkl Bílý)*

Úloha 4.

(158; 155; 4,64; 5)

Alča a Háňa hrají hru, na začátku níž si Háňa vymyslí dvojciferné přirozené číslo. V každém tahu pak Alča poví Háně nějaké přirozené číslo $d > 1$. Pokud je d dělitelem Hánina čísla, Alča vyhrává. V opačném případě Háňa odečte číslo d od svého čísla a hra pokračuje dalším Alčiným tahem. Jakmile Háňa dostane záporné číslo, Alča prohraje. Poraďte Alče, jak má hrát, aby vždy vyhrála. *(Lenka Slavíková)*

Řešení:

Ukážeme, že Alča vyhraje, když bude hádat postupně 2, 3, 2. Označme Hánino číslo H.

Pokud Alča nevyhraje prvním tahem, víme, že H je liché. Teď má Háňa číslo $H - 2$, které také musí být liché, protože parita se odečtením dvojky nezměnila. Po svém druhém tahu Alča buď vyhraje, nebo Háňa získá číslo $H - 5$, které už je sudé (odečtením lichého čísla se parita změnila). Alče tedy stačí opět hádat dvojku a vyhraje.

Musíme ještě ověřit, zda se Hánino číslo nemohlo odečítáním Alčiných tipů stát záporným. K tomu ale dojít nemohlo, protože H bylo dvojciferné a Háňa od něho odečetla maximálně pět.

Poznámky:

Jak poznamenali někteří řešitelé, Alča má víc možností, jak vyhrát. Je to způsobené tím, že Alča se nemůže dostat nejen do záporných čísel, ale ani pod pět. *(Anča Chejnovská)*

Úloha 5. (141; 137; 4,73; 5)

Kenny, Olin a Šavlík hráli fotbal, přičemž jeden z nich byl vždy brankář a zbylí dva útočili. Ten, kdo vstřelil branku, šel na následující hru do brány. Později Vejtkovi prozradili, že Kenny útočil 12 her, Olin 21 her a Šavlík bránil 8 her, z čehož Vejtek ihned bystře poznal, kdo vstřelil šestou branku. Kdo to byl? *(Michal „Kenny“ Rolínek)*

Řešení:

Ze svých 21 útoků útočil Olin 8× na Šavlíka, což znamená, že zbylých 13 útoků musel útočit na Kennyho. Tím pádem byl Kenny 13× v bráně a hrálo se celkem $12 + 13 = 25$ her. Jelikož nikdo nebyl v bráně dvakrát po sobě, musel Kenny v bráně již začínat a pak dát gól vždycky, když byl v útoku. To znamená, že dal Kenny každý sudý gól, tedy i ten šestý.

Poznámky:

Kenny je borec. A Vejtek to ví, proto věděl, že gól dal Kenny. :) Nejčastější chybou bylo, že svůj postup dostatečně nevysvětlíte a opravovatel pak tápe a vy zbytečně přicházíte o body. Za slova navíc body nestrháváme. ;) *(Monča Pospíšilová)*

Úloha 6. (108; 77; 3,49; 5)

Vojenskou základnu obývají tři seržanti a několik vojínů. Seržanti se po dnech střídají ve službě. Od generála dostali následující instrukce:

(i) *Každý den musí alespoň jeden vojín dostat rozkaz.*
(ii) *Žádný vojín nesmí za celou dobu dostat více než dva rozkazy, přitom během jednoho dne může dostat rozkaz nejvýše jeden.*
(iii) *Seznam vojínů, jimž byl během dne udělen rozkaz, nesmí být pro žádné dva různé dny stejný.*
(iv) *První seržant, který tyto instrukce během svého dne nenaplní, bude poslán do vězení.*

Všichni seržanti vědí, kteří vojíni dostali ve kterých dnech rozkaz. Dokáže některý z nich (bez toho, aby spolupracoval s ostatními dvěma) udílet rozkazy tak, aby se vězení jistě vyhnul?

(Mirek Olšák)

Řešení:

Dokážeme, že třetí seržant se vězení vyhnout dokáže. Seznamu vojínů, kterým seržant udělí rozkaz během dne, v němž má službu, říkejme *tah* seržanta.

Předpokládejme, že první a druhý seržant udělili korektní rozkazy. Jelikož tyto rozkazy musely být různé, existuje minimálně jeden vojín, který dostal právě jeden rozkaz. Všem takovým vojínům udělí ve svém tahu rozkaz třetí seržant.

Tento jeho tah zřejmě splňuje podmínky (i) a (ii). Splňuje rovněž podmínku (iii) – kdyby se totiž shodoval s tahem řekněme prvního seržanta, nemohl druhý seržant udělit rozkaz nikomu, což odporuje podmínce (i).

Po tahu třetího seržanta navíc každý vojín buď žádný rozkaz nedostal, nebo dostal rozkazy dva. Tahy v dalších kolech se proto musí týkat výhradně vojínů, kteří ještě žádný rozkaz nedostali, a tedy se jistě budou lišit od tahů ve všech kolech předchozích. Třetí seržant tak může opět použít výše popsanou taktiku, která mu zajišťuje možnost korektního tahu.

Poznámky:

Plný zisk si odnášeli všichni, kdo dokázali, že třetí seržant má vyhrávající strategii. Některá řešení navíc dokazovala, že ostatní seržanti vyhrávající strategii nemají, přestože to zadání nevyžadovalo. Za samotné důkazy toho, že první dva seržanti nemají neprohrávající strategii, jsem uděloval po bodu.

Často jsem se také setkával s názory, že výsledek je vždy jen otázkou náhody, což většinou bylo podloženo jen případy pro určitý počet vojínů a určitými strategiemi seržantů. Taková řešení jsem bodem neodměnil. Pro příště snad jen mnoha lidem doporučuji lépe si přečíst zadání, neboť další opravdu častou chybou bylo, že si lidé mysleli, že seznamy příkazů vydané za minulé dny nejsou známy, přičemž zadání říká opak. *(Lukáš Zavřel)*

Úloha 7.

(96; 76; 2,63; 2)

Do tenisového turnaje se přihlásilo 2^n soutěžících. V každém kole se všichni ještě nevypadlí hráči rozdělí do dvojic a odehrají zápas. Vítězové postupují do dalšího kola, poražení vypadávají. Na konci turnaje, když zůstane pouze jediný hráč, je potřeba vytvořit výsledkovou listinu, ve které nikdo nesmí být na horší pozici než hráč, kterého porazil. Kolika způsoby je možné takové pořadí vytvořit, pokud žádní dva hráči nesmí skončit na stejné příčce? *(Pepa Tkadlec)*

Řešení:

Ukážeme si dva způsoby, jak úlohu vyřešit. První je trikový, druhý přímočarý.

První způsob: Uvažme nejdříve všech $2^n!$ možných výsledkových listin. Dokážeme, že zohledněním výsledku každého zápasu se počet vyhovujících výsledkových listin sníží na polovinu.

Uvažme libovolnou listinu L vyhovující všem dosud odehraným zápasům a zkoumejme dosud nezahrnutý zápas A s B. Označme $a_1, \ldots, a_k$, resp. $b_1, \ldots, b_k$ hráče, kteří vypadli v podpavoucích majících za vítěze právě hráče A, resp. B v pořadí, v němž se vyskytují v listině L (zápasům prvního kola odpovídá $k = 0$). Potom listina L' vzniklá z L prohozením dvojice hráčů A a B a prohozením všech dvojic a_i, b_i pro $i = 1, \ldots, k$ opět vyhovuje všem dosud odehraným zápasům. Všechny doposud vyhovující výsledkové listiny lze popárovat výše popsaným způsobem. Z každé takové dvojice listin však právě jedna zohledňuje výsledek zápasu A s B. Počet vyhovujících listin se tedy skutečně odehráním každého zápasu sníží na polovinu.

Jelikož zápasů proběhlo celkem $2^n - 1$ (v každém zápase někdo prohrál a každý až na vítěze prohrál právě jednou), je hledaný výsledek roven

$$\frac{2^n!}{2^{2^n-1}}.$$

Druhý způsob: Označme si $f(n)$ počet způsobů, jimiž lze vytvořit výsledkovou listinu pro 2^n hráčů. Zřejmě $f(0) = 1$.

Rozdělme si turnajového pavouka na finále a dva menší podpavouky o 2^{n-1} soutěžících. V každém z nich lze vytvořit listinu $f(n-1)$ způsoby. Pokud by na sobě byly oba podpavouky nezávislé, šlo by listinu pro celého pavouka sestavit $\binom{2^n}{2^{n-1}}$ způsoby (vybíráme, na kterých 2^{n-1} z celkových 2^n pozic umístíme hráče z prvního turnaje). Ze symetrie bude přesně v polovině těchto listin na prvním místě vítěz prvního podpavouka a v polovině vítěz druhého podpavouka. Po zahrnutí výsledku finále tak dostáváme vztah

$$f(n) = \frac{1}{2}\binom{2^n}{2^{n-1}} \cdot \big(f(n-1)\big)^2.$$

Aplikováním téhož vzorce na $f(n-1)$ a podobně dále získáme

$$f(n) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2^n!}{2^{n-1}!2^{n-1}!} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{2^{n-1}!}{2^{n-2}!2^{n-2}!}\right)^2 \cdots \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{2^{n-(n-1)}!}{2^{n-n}!2^{n-n}!}\right)^{2^{n-1}} \cdot \big(f(0)\big)^{2^n}.$$

Pomineme-li poloviny, lze jmenovatel každého členu zkrátit s čitatelem následujícího členu, čímž dostaneme

$$f(n) = \frac{2^n!}{2^1 \cdot 2^2 \cdot 2^4 \cdots 2^{2^{n-1}}} = \frac{2^n!}{2^{1+2+4+\cdots+2^{n-1}}} = \frac{2^n!}{2^{2^n-1}},$$

kde v poslední rovnosti jsme sečetli geometrickou řadu.

Poznámky:
Více než polovina řešitelů bohužel špatně pochopila zadání. Předpokládala, že soutěžící, kteří vypadli v k-tém kole, musí nakonec skončit pod těmi, kdo se dostali do dalších kol (speciálně například poražený finalista by musel být vždy druhý). Tak to v běžných turnajových pavoucích sice funguje, ale tady ze zadání podobný způsob počítání umístění neplynul. Ti, kdo měli správně vyřešenou tuto modifikovanou úlohu, dostali vesměs dva body. Správných řešení bylo poměrně málo a skoro každé se k výsledku dostalo jiným způsobem. Ale všechna byla více či méně podobná jednomu z výše uvedených. *(Honza Bílek & Pepa Tkadlec)*

Úloha 8. (52; 4; 0,52; 0)

Kdesi ve čtverci o straně 10 sedí neviditelná blecha. Ač ji Pepa nevidí, hraje s ní hru. Ve svém n-tém tahu nakreslí přímku a blecha poposkočí libovolným směrem o $\frac{1}{n}$ tak, aby neopustila čtverec a nepřeskočila žádnou z již nakreslených přímek. Pepa vyhraje, pokud blecha nemá kam skočit. Dokáže Pepa vyhrát nezávisle na tom, kde blecha začíná a jak skáče? (Pepa Tkadlec)

Řešení:
Pepa dokáže vyhrát nezávisle na tom, jak blecha skáče, například následující strategií. V prvních 198 tazích Pepa rozdělí čtverec na 100×100 čtvercových buněk, které mají stranu 0,1. Od té doby bude již blecha uvězněna stále v jedné buňce. Ukážeme, že nezávisle na počtu dosud odehraných tahů dokáže Pepa *zastavět* jednu buňku tak, že byla-li blecha v této buňce, Pepa ji určitě chytil. Takto Pepa *zastaví* všech 10000 buněk a blechu tak chytí.

Předpokládejme, že Pepa chce *zastavět* jednu buňku a před tím bylo odehráno k tahů. Rozdělí buňku n svislými a n vodorovnými přímkami na čtverečky o straně $\frac{0{,}1}{n+1}$, které mají úhlopříčku $\frac{0{,}1\sqrt{2}}{n+1}$. Po těchto $2n$ tazích bude muset blecha poposkočit o $\frac{1}{k+2n+1}$. Dokážeme, že nezávisle na k existuje takové n, že zmíněná úhlopříčka čtverečku je menší než velikost skoku blechy, takže ať je blecha ve kterémkoliv z nich, tak Pepa vyhrává. Upravujme ekvivalentně uvedenou nerovnost:

$$\frac{0{,}1\sqrt{2}}{n+1} < \frac{1}{k+2n+1}$$
$$(k+1)\cdot 0{,}1\sqrt{2} + 2n \cdot 0,1\sqrt{2} < n+1$$
$$(k+1)\cdot 0{,}1\sqrt{2} - 1 < n(1 - 0{,}2\sqrt{2}).$$

Jelikož k se nemění a $1 > 0{,}2\sqrt{2}$, tak určitě existuje takové n, že nerovnost platí, a buňka bude *zastavěna.*

Poznámky:
Úloha se ukázala být velice obtížná. Vyřešil ji pouze Pepa Svoboda, který se snadno vžil do role a nad blechou zvítězil. Zajímavé je, že 23 řešitelů tvrdilo, že Pepa má vyhrávající strategii a zbylých 28 řešení dokazovalo Pepovu nemožnost vyhrát. Mnoho z vás ztroskotalo na tom, že uvažovalo tloušťku čáry, ale Pepa kreslí přímky, které žádnou tloušťku nemají. Jiní naopak došli ke špatnému závěru, protože tvrdili, že je nejlepší rozdělit čtverec na obyčejnou čtvercovou síť.
(Filip Hlásek & Pepa Tkadlec)