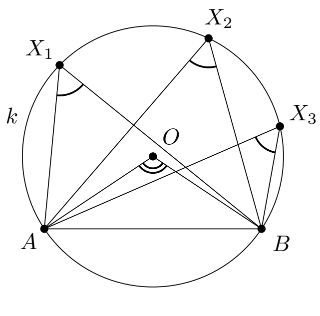
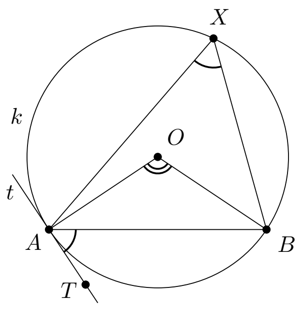
Povídání ke druhé podzimní sérii

Aby se Ti druhá série řešila snáze, připravili jsme pro Tebe kratičké povídání, ve kterém shrneme a připomeneme několik faktů, které by se Ti při řešení příkladů mohly hodit.

Věta. (O obvodovém a středovém úhlu) *Nechť k je kružnice se středem O a AB její tětiva. Pak velikost úhlu AXB se nemění, probíhá-li X některý z oblouků kružnice k určených tětivou AB. Navíc je $|\sphericalangle AXB| = \frac{1}{2}|\sphericalangle AOB|$, kde úhlem AOB rozumíme vnější úhel ve čtyřúhelníku $AXBO$.*

Tvrzení. (Úsekový úhel) *Nechť k je kružnice se středem O a AB její tětiva. Označme t tečnu ke kružnici k vedenou bodem A. Na kružnici k uvažme bod X různý od A i B a na přímce t nalezněme bod T tak, že přímka AB odděluje body X a T. Pak $|\sphericalangle AXB| = |\sphericalangle TAB|$.*



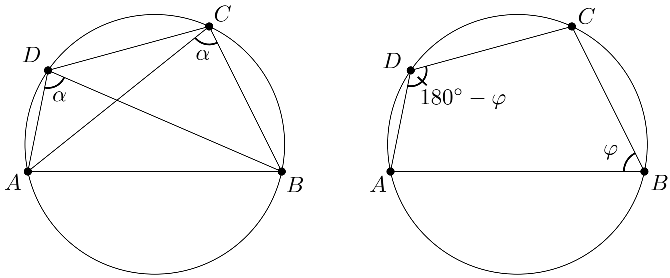


Důkazy věty o obvodovém a středovém úhlu stejně jako důkaz tvrzení o úhlu úsekovém můžeš najít ve středoškolských učebnicích planimetrie. Jejich bezprostředním důsledkem je následující užitečné tvrzení charakterizující *tětivové* čtyřúhelníky (to jsou čtyřúhelníky, jejichž všechny čtyři vrcholy leží na jedné kružnici).

Tvrzení. (Tětivové čtyřúhelníky)

(i) *Jestliže je některá strana čtyřúhelníka $ABCD$ vidět ze zbylých dvou vrcholů pod stejným úhlem, je čtyřúhelník $ABCD$ tětivový.*
(ii) *Jestliže je některá úhlopříčka čtyřúhelníka $ABCD$ vidět ze zbylých dvou vrcholů pod úhly, jejichž součet je $180°$, je čtyřúhelník $ABCD$ tětivový.*

Na druhou stranu v tětivovém čtyřúhelníku $ABCD$ platí, že každá jeho strana je ze zbylých dvou vrcholů vidět pod stejným úhlem a každá jeho úhlopříčka je ze zbylých dvou vrcholů vidět pod úhly, jejichž součet je $180°$.



Pomocí tvrzení o tětivových čtyřúhelnících tak umíme dobře „úhlově“ popsat to, že čtyři body leží na kružnici. Zároveň je mnohdy užitečné tětivový čtyřúhelník v úloze najít – jeho objevením se naše informace o velikostech úhlů v obrázku podstatně rozšíří.

Konečně zmíníme ještě jednu klasickou větu, která rovněž nakládá s velikostmi úhlů.

Věta. (Sinová) *V trojúhelníku ABC se standardně značenými velikostmi vnitřních úhlů a poloměrem kružnice opsané R platí*

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R.$$

Na samotný závěr ještě uděláme malou reklamu kreslicím programům. Ty jsou velmi užitečné obzvláště tehdy, pokud se Ti těžko kreslí obrázky od ruky a jsi líný je rýsovat ;-). Za všechny jmenujme například program *GeoGebra*, který si lze zdarma stáhnout (nebo jen spustit z okna prohlížeče) na stránce *http://www.geogebra.org/*.

Úhly

2. podzimní série Termín odeslání: 7. listopadu 2011

Úloha 1. (3 body)
Ťam se vsadil, že dokáže rozdělit pravidelný desetiúhelník na 8 rovnoramenných trojúhelníků s vrcholy ve vrcholech původního desetiúhelníku, ale teď za boha neví, jak na to. Lze něco takového vůbec provést?

Úloha 2. (3 body)
V rovnoběžníku $ABCD$ o stranách $|AB| = 2$ a $|BC| = 1$ označme M střed strany CD. Ukažte, že $|\sphericalangle AMB| = 90^\circ$.

Úloha 3. (3 body)
Lenka si namalovala rovnoramenný trojúhelník ABC a s překvapením zjistila, že na jeho ramenech AB, resp. AC lze najít body P, resp. Q takové, že $|BC| = |CP| = |PQ| = |QA|$. Určete velikost úhlu BAC.

Úloha 4. (5 bodů)
Kulečníkový stůl má tvar konvexního čtyřúhelníku $ABCD$. Z bodu K uvnitř strany AB vystřelíme kouli. Ta se postupně odrazí od stran BC, CD a DA (úhel dopadu je roven úhlu odrazu) a znovu dospěje do bodu K z takového směru, že kdyby se v bodě K znovu odrazila, pokračovala by po své původní trase. Ukažte, že vrcholy stolu leží na jedné kružnici.

Úloha 5. (5 bodů)
Pepa si nakreslil kruhovou úseč s tětivou AB. Vejtek do obrázku přikreslil kružnici, která se dotýká úsečky AB v jejím vnitřním bodě E a protíná oblouk úseče ve dvou různých bodech C a D tak, že body A, D, C, B leží na úseči v tomto pořadí. Dokažte, že $|\sphericalangle ADE| = |\sphericalangle ECB|$.

Úloha 6. (5 bodů)
Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC. Označme A_0, B_0 paty jeho výšek z vrcholů A, B. Rovnoběžka s AC vedená bodem A_0 protne úsečku AB v bodě K. Rovnoběžka s BC vedená bodem B_0 protne úsečku AB v bodě L různém od K. Ukažte, že $|\sphericalangle AA_0L| = |\sphericalangle BB_0K|$.

Úloha 7. (5 bodů)
To Alča našla na ramenech AB, AC jiného rovnoramenného trojúhelníku ABC pro změnu body K, L takové, že $|KL| = |BK| + |LC|$. Středem M úsečky KL pak vedla přímku rovnoběžnou s AC a označila N její průsečík se stranou BC. Zjistěte velikost úhlu KNL.

Úloha 8. (5 bodů)
Na úhlopříčce AC konvexního čtyřúhelníku $ABCD$ zvolíme bod K tak, že $|KD| = |DC|$, $|\sphericalangle BAC| = \frac{1}{2}|\sphericalangle KDC|$ a $|\sphericalangle DAC| = \frac{1}{2}|\sphericalangle KBC|$. Ukažte, že $|\sphericalangle KDA| = |\sphericalangle KBA|$ nebo $|\sphericalangle KDA| = |\sphericalangle BCA|$.

Úhly

2. podzimní série Vzorové řešení

Úloha 1.

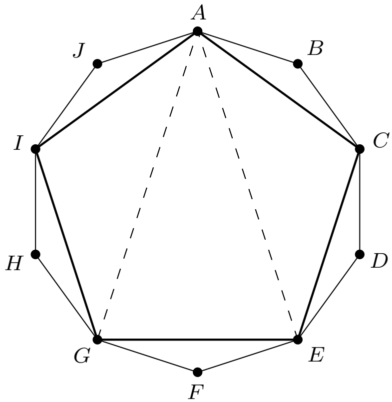
(116; 109; 2,50; 3)

Ťam se vsadil, že dokáže rozdělit pravidelný desetiúhelník na 8 rovnoramenných trojúhelníků s vrcholy ve vrcholech původního desetiúhelníku, ale teď za boha neví, jak na to. Lze něco takového vůbec provést? *(Pepa Tkadlec)*

Řešení:

Ukážeme si, že pravidelný desaťuholník (označme ho $ABCDEFGHIJ$) sa na 8 rovnoramenných trojuholníkov rozdeliť dá.

Keďže $|AB| = |BC| = \cdots = |IJ| = |JA|$, trojuholníky $\triangle ABC$, $\triangle CDE$, $\triangle EFG$, $\triangle GHI$ a $\triangle IJA$ sú rovnoramenné a dokonca podľa vety *sus* sú všetky zhodné. Preto platí $|AC| = |CE| = |EG| = |GI| = |IA|$. To znamená, že $\triangle ACE$ a $\triangle GIA$ sú takisto rovnoramenné. Zo symetrie podľa AF platí $|AG| = |AE|$, teda $\triangle AEG$ je rovnoramenný tiež a príklad je vyriešený.



Poznámky:

Áno, Ťam mohol ísť kľudne do stávky (=sázky) bez nakreslenia obrázku a hneď vedel, že vyhrá, pretože riešenie sa dá ľahko predstaviť, a že dané trojuholníky sú rovnoramenné, je vidieť na prvý pohľad. Ale musíte uznať, že odpoveď „Áno, dá sa to.“ a k tomu náčrt nemôže byť za plný počet bodov. Úplne stačilo dvoma vetami opísať, prečo sú všetky trojuholníky rovnoramenné, a plný počet máte vo vačku. Ešte by som rada pochválila tých borcov, ktorí popísali celý postup k tomuto jedinému riešeniu. Cením si snahu naviac. *(Kaťa Duníková)*

Úloha 2.

(125; 111; 2,69; 3)

V rovnoběžníku $ABCD$ o stranách $|AB| = 2$ a $|BC| = 1$ označme M střed strany CD. Ukažte, že $|\sphericalangle AMB| = 90^\circ$. *(Pepa Tkadlec)*

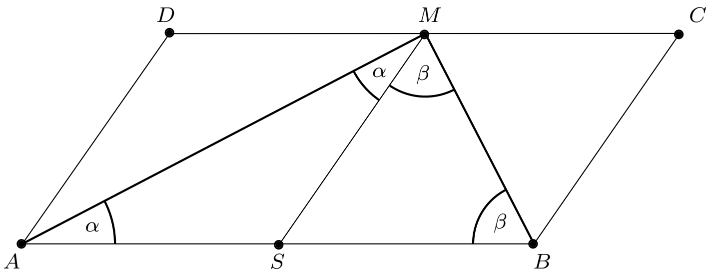
Řešení:

Označme S střed úsečky AB. Všimneme si, že $AD \parallel SM$, proto $|AD| = |SM| = 1$. A protože $|AS| = |SB| = |SM| = 1$, bod M leží na Thaletově kružnici nad průměrem AB. Úhel AMB je tedy pravý.

Jiné řešení (podle Jana Mikla):

Označme S střed úsečky AB. Úsečka SM rozděluje daný rovnoběžník na dva shodné kosočtverce o straně 1. Protože $|AS| = |SM|$, trojúhelník ASM je rovnoramenný a $|\sphericalangle SAM| = |\sphericalangle AMS| = \alpha$. Podobně $|BS| = |SM|$, trojúhelník BSM je rovnoramenný a $|\sphericalangle MBS| = |\sphericalangle SMB| = \beta$. V trojúhelníku ABM je součet vnitřních úhlů roven $180°$, takže $180° = \alpha + \alpha + \beta + \beta$, a proto

$$|\sphericalangle AMB| = \alpha + \beta = \frac{1}{2} 180° = 90°.$$



Poznámky:

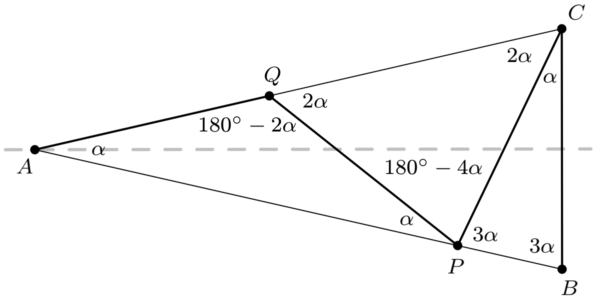
Asi půlka z Vás dokazovala tvrzení standardním dopočítáváním úhlů, druhá půlka o něco elegantněji pomocí Thaletovy kružnice (Slováci pomocí Tálesovej kružnice) a pár výjimek na to šlo přes shodnost a s využitím toho, že kosočtverec má kolmé úhlopříčky (to bylo oceněno imaginárním bodem). Našly se i dvě kosinové věty a jeden součin vektorů. Hodně chyb bylo v myšlence důkazu, často jste došli k tomu, že to tak je, protože to tak je v zadání, nebo jste se pravý úhel snažili dokázat konstrukcí. Překvapivě hodně lidí si úlohu zjednodušilo na obdélník, ačkoli byl zadán rovnoběžník. *(Monča Pospíšilová)*

Úloha 3. (100; 85; 2,62; 3)

Lenka si namalovala rovnoramenný trojúhelník ABC a s překvapením zjistila, že na jeho ramenech AB, resp. AC lze najít body P, resp. Q takové, že $|BC| = |CP| = |PQ| = |QA|$. Určete velikost úhlu BAC. *(Vít „Vejtek“ Musil)*

Řešení:

Hledanou velikost úhlu BAC označme α. Jelikož je trojúhelník QAP rovnoramenný, je i $|\sphericalangle QPA| = \alpha$. Tedy $|\sphericalangle PQC| = 2\alpha$ a díky rovnoramennosti trojúhelníku PCQ také $|\sphericalangle PCQ| = 2\alpha$. Dopočteme nyní $|\sphericalangle BPC| = 180° - |\sphericalangle APQ| - |\sphericalangle CPQ| = 180° - \alpha - (180° - 4\alpha) = 3\alpha$. Rovnoramennost trojúhelníku CPB pak dává $|\sphericalangle CBP| = 3\alpha$. Součet úhlů v rovnoramenném trojúhelníku ABC je tak roven $\alpha + 3\alpha + 3\alpha = 7\alpha = 180°$, odkud dostáváme, že $\alpha = \frac{180°}{7}$.



V případě, že připouštíme i hraniční polohy bodů P a Q (ve vrcholech trojúhelníku ABC), může velikost úhlu BAC nabývat ještě hodnot $36°$ ($P = B$, Q leží uvnitř ramene AC) nebo $60°$ ($P = B$ nebo $P = A$, $Q = C$).

Poznámky:
Všichni, kteří předložili výsledek $\frac{180°}{7}$ (a takových byla většina), ode mě dostali 3 body. Ti, kteří objevili pouze rovnostranný trojúhelník ABC (takových také nebylo úplně málo), si odnesli po bodu. Zajímavé je, že se našli pouze 4 řešitelé, kteří se dobrali k výsledku $\frac{180°}{7}$ a zároveň prokoukli řešení s rovnostranným trojúhelníkem. Pochvala patří pánům *Michalu Punčochářovi* a *Romanu Stránskému*, kteří jako jediní rozebrali opravdu všechny hraniční případy. Dále mě zaujalo, že čtyři řešitelé tvrdí, že velikost úhlu BAC je $20°$, podporujíce to vesměs rozdílnými argumenty.

(Háňa Bendová)

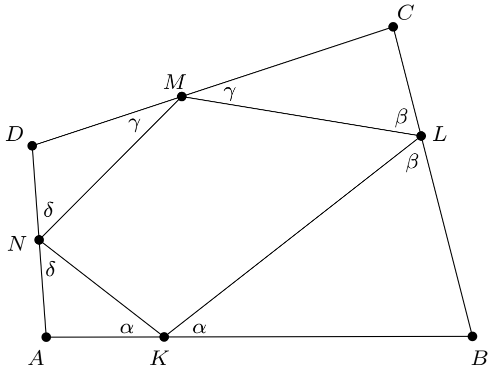
Úloha 4.

(110; 101; 4,51; 5)

Kulečníkový stůl má tvar konvexního čtyřúhelníku $ABCD$. Z bodu K uvnitř strany AB vystřelíme kouli. Ta se postupně odrazí od stran BC, CD a DA (úhel dopadu je roven úhlu odrazu) a znovu dospěje do bodu K z takového směru, že kdyby se v bodě K znovu odrazila, pokračovala by po své původní trase. Ukažte, že vrcholy stolu leží na jedné kružnici. (Pepa Tkadlec)

Řešení:
Vrcholy stolu leží na jedné kružnici právě tehdy, když $|\sphericalangle ABC| + |\sphericalangle CDA| = 180°$ (viz úvodní text k sérii). Součet velikostí vnitřních úhlů čtyřúhelníka je $360°$, proto stačí ukázat, že $|\sphericalangle DAB| + |\sphericalangle BCD| = |\sphericalangle ABC| + |\sphericalangle CDA|$.

Označme body odrazu na stranách BC, CD, DA postupně L, M, N a velikosti jim příslušných „odrazových" úhlů u vrcholů K, L, M a N postupně α, β, γ a δ (viz obrázek).



Z trojúhelníků AKN, BLK, CML, resp. DNM vyjádříme úhly u vrcholů A, B, C, resp. D

$$\begin{aligned}|\sphericalangle NAK| &= 180^\circ - \alpha - \delta,\\ |\sphericalangle KBL| &= 180^\circ - \alpha - \beta,\\ |\sphericalangle LCM| &= 180^\circ - \beta - \gamma,\\ |\sphericalangle MDN| &= 180^\circ - \gamma - \delta.\end{aligned}$$

Potom platí

$$\begin{aligned}|\sphericalangle DAB| + |\sphericalangle BCD| = |\sphericalangle NAK| + |\sphericalangle LCM| = 360^\circ - (\alpha+\beta+\gamma+\delta) = \\ = |\sphericalangle KBL| + |\sphericalangle MDN| = |\sphericalangle ABC| + |\sphericalangle CDA|,\end{aligned}$$

což je přesně to, co jsme chtěli dokázat, a tedy body A, B, C, D leží na jedné kružnici.

Poznámky:

Většina z vás si s úlohou hravě poradila, což nás těší.

Značení úhlů bylo opravdu různorodé, a tak mi postupně prošla pod rukama celá malá řecká abeceda. Jenom bych chtěla upozornit, že značit nějaký úhel π není úplně šťastné, neboť π je zároveň konkrétní velikost úhlu, počítáme-li v radiánech, a mohlo by pak docházet ke kuriozitám typu „úhel π má velikost $\frac{\pi}{2}$“ a podobně. Není to chyba, ale snažte se vystačit si se zbytkem abecedy. (-:

(Alča Skálová)

Úloha 5.

(78; 67; 4,13; 5)

Pepa si nakreslil kruhovou úseč s tětivou AB. Vejtek do obrázku přikreslil kružnici, která se dotýká úsečky AB v jejím vnitřním bodě E a protíná oblouk úseče ve dvou různých bodech C a D tak, že body A, D, C, B leží na úseči v tomto pořadí. Dokažte, že $|\sphericalangle ADE| = |\sphericalangle ECB|$.

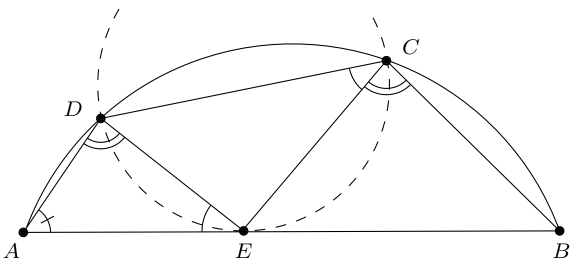
(Pepa Tkadlec)

Řešení:

Podle věty o obvodovém a úsekovém úhlu je úhel nad tětivou ED Vejtkovy kružnice roven úsekovému úhlu, tudíž $|\sphericalangle DCE| = |\sphericalangle DEA|$. Součet vnitřních úhlů v trojúhelníku AED je roven 180° a také součet protějších úhlů tětivového čtyřúhelníku $ABCD$ je roven 180°, takže

$$|\sphericalangle ECB| = (180^\circ - |\sphericalangle BAD|) - |\sphericalangle DCE| = 180^\circ - |\sphericalangle EAD| - |\sphericalangle DEA| = |\sphericalangle ADE|,$$

což jsme měli dokázat.



Poznámky:

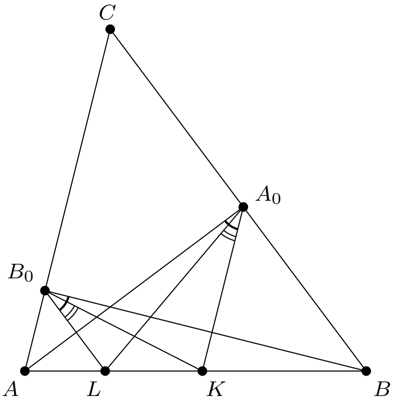
Většina z došlých řešení si s úlohou hravě poradila a vysloužila si plný počet bodů. Několik řešitelů si udělalo úlohu těžší, když dokazovali větu o obvodovém a úsekovém úhlu (to není třeba – v textu k této sérii jsme řekli, že ji můžete bez obav používat). Občas jste chybovali, když jste pracovali se středy zadaných kružnic a zapomněli jste uvažovat všechny možné polohy toho středu. Za takové řešení jsem strhával bod. Naopak imaginární bod si vysloužili ti, kterým se podařilo vyřešit úlohu jednoduše, stručně a bez použití zbytečných věcí navíc. *(Filip Hlásek)*

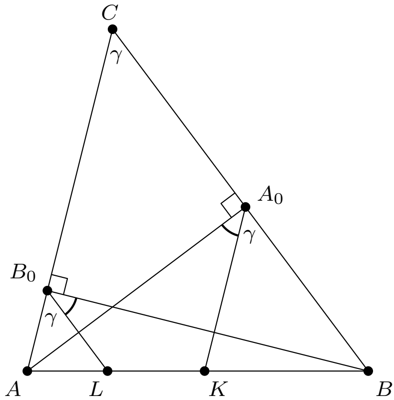
Úloha 6.

(69; 56; 3,70; 4)

Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC. Označme A_0, B_0 paty jeho výšek z vrcholů A, B. Rovnoběžka s AC vedená bodem A_0 protne úsečku AB v bodě K. Rovnoběžka s BC vedená bodem B_0 protne úsečku AB v bodě L různém od K. Ukažte, že $|\sphericalangle AA_0L| = |\sphericalangle BB_0K|$. *(Pepa Tkadlec)*

Řešení:
Nejdříve dokážeme, že $|\sphericalangle AA_0K| = |\sphericalangle BB_0L|$. Dále ukážeme, že $|\sphericalangle KB_0L| = |\sphericalangle KA_0L|$. Z těchto dvou tvrzení nám již požadovaný závěr bude plynout.

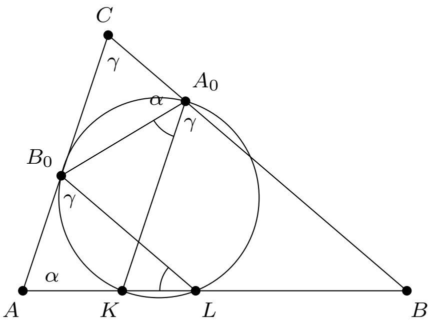


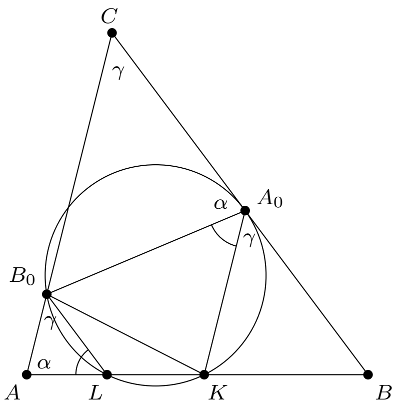


Víme, že $|\sphericalangle AB_0L| = |\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle KA_0B|$ (souhlasné úhly). Platí proto

$$|\sphericalangle AA_0K| = 90^\circ - |\sphericalangle KA_0B| = 90^\circ - |\sphericalangle LB_0A| = |\sphericalangle BB_0L|,$$

čímž je první část našeho tvrzení dokázána. Ve druhé části stačí dokázat, že body A_0, B_0, K, L leží na jedné kružnici.





Čtyřúhelník ABA_0B_0 je tětivový (jeho opsaná kružnice je Thaletovou kružnicí nad AB). Díky tomu $|\sphericalangle B_0A_0C| = |\sphericalangle B_0AL|$, takže

$$|\sphericalangle B_0A_0K| = 180^\circ - |\sphericalangle B_0A_0C| - |\sphericalangle KA_0B| = 180^\circ - |\sphericalangle B_0AL| - |\sphericalangle AB_0L| = |\sphericalangle B_0LA|.$$

Z toho plyne, že body K, L, A_0, B_0 leží na jedné kružnici bez ohledu na vzájemnou polohu bodů K, L. Skutečně, je-li k A blíže K než L, je strana B_0K vidět pod stejným úhlem z bodů A_0 i L. V opačném případě je součet protějších úhlů KLB_0 a B_0A_0K čtyřúhelníku KLB_0A_0 roven 180°.

Důkaz je tak hotov.

Poznámky:
Skoro každé správné řešení využívalo tětivovost ABA_0B_0, a tak se většina řešení od sebe moc nelišila. Hlavním problémem této úlohy ale bylo jako obvykle pozorně si přečíst zadání a nedokazovat jednoduchou rovnost $|\sphericalangle LB_0B| = |\sphericalangle KA_0A|$. U řešení, která měla čtyři body, byl nejčastěji problém právě se dvěma různými polohami bodů K, L, protože poté tam některé úhly nevycházely jako shodné, ale jako doplňky do 180°. Dále chápu, že spousta shodných úhlů byla zjevná, ale místy jsem musel předlouze pátrat ve vašich obrázcích po tom, jak jste přišli na nějakou rovnost dvou úhlů, a proto připomínám, že vyznačení dvou shodných úhlů, které nejsou střídavé, vrcholové či souhlasné, opravdu nestačí a je potřeba rovnost vysvětlit. *(Lukáš Zavřel)*

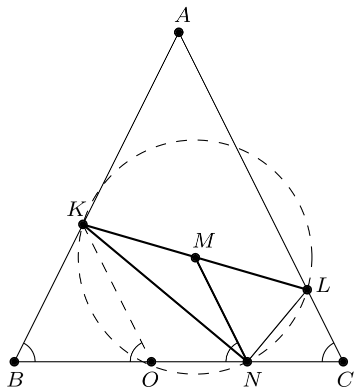
Úloha 7. (54; 43; 4,11; 5)

To Alča našla na ramenech AB, AC jiného rovnoramenného trojúhelníku ABC pro změnu body K, L takové, že $|KL| = |BK| + |LC|$. Středem M úsečky KL pak vedla přímku rovnoběžnou s AC a označila N její průsečík se stranou BC. Zjistěte velikost úhlu KNL. *(Lenka Slavíková)*

Řešení:
Bodem K veďme rovnoběžku se stranou AC a její průsečík se stranou BC označme O. Potom trojúhelník KBO je podobný trojúhelníku ABC, a jelikož $|AB| = |AC|$, máme i $|KB| = |KO|$. Navíc vidíme, že $KOCL$ je lichoběžník se základnami KO a LC a střední příčkou MN, odkud plyne

$$|MN| = \frac{|KO| + |LC|}{2} = \frac{|KB| + |LC|}{2} = \frac{|KL|}{2} = |MK| = |ML|.$$

Bod N tedy leží na Thaletově kružnici nad průměrem KL, a proto $|\sphericalangle KNL| = 90^\circ$.



Poznámky:
Velikost úhlu KNL správně určili všichni, počet bodů získaných za úlohu ovšem závisel i na cestě, jakou se ten který řešitel ke svému výsledku dobral. K vaší cti nutno uznat, že řešení zasluhující si plný počet bodů výrazně převažovala nad těmi ostatními. Zároveň bych ale chtěla upozornit na jednu drobnou chybu, které se mnozí dopustili. Některé z možných způsobů řešení této úlohy (mezi něž ovšem nepatří ten výše uvedený) vyžadovaly rozlišení tří případů podle toho, která z úseček KB, LC je delší, případně jsou-li obě stejně dlouhé. Jelikož se ale první dva případy ukázaly být v podstatě symetrické (a třetí triviální), udělila jsem plný počet bodů i těm, kteří úlohu vyřešili pouze pro jeden z prvních dvou případů. O to větší chvála pak samozřejmě náleží všem, kteří si nutnosti provést diskusi povšimli.

(Lenka Slavíková)

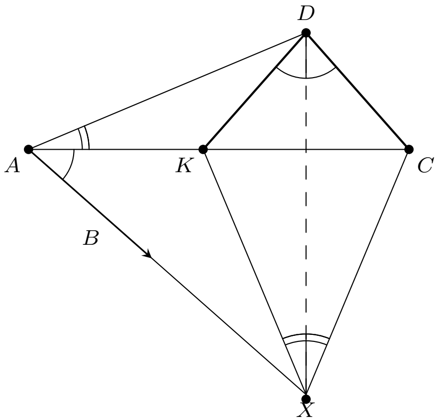
Úloha 8.

(26; 16; 2,46; 3)

Na úhlopříčce AC konvexního čtyřúhelníku $ABCD$ zvolíme bod K tak, že $|KD| = |DC|$, $|\sphericalangle BAC| = \frac{1}{2}|\sphericalangle KDC|$ a $|\sphericalangle DAC| = \frac{1}{2}|\sphericalangle KBC|$. Ukažte, že $|\sphericalangle KDA| = |\sphericalangle KBA|$ nebo $|\sphericalangle KDA| = |\sphericalangle BCA|$.

(Pepa Tkadlec)

Řešení:
Nechť je $ABCD$ čtyřúhelník splňující zadání. Označme X průsečík osy úhlu KDC a přímky AB. Osa úhlu KDC je kolmá na AC, protože je KDC rovnoramenný trojúhelník. Protože $2|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle KDC|$ a čtyřúhelník $ABCD$ je konvexní, přímka AB svírá s přímkou AC úhel menší než pravý. Proto se osa úhlu KDC a přímka AB vždy protnou a bod X je dobře definovaný.



Protože $|\sphericalangle CAX| = |\sphericalangle CDX|$, je $AXCD$ tětivový čtyřúhelník a platí $|\sphericalangle DAC| = |\sphericalangle DXC|$. Navíc K je obraz C v osové symetrii podle osy úhlu KDC, takže $|\sphericalangle DXC| = |\sphericalangle KXD|$. Z toho už máme

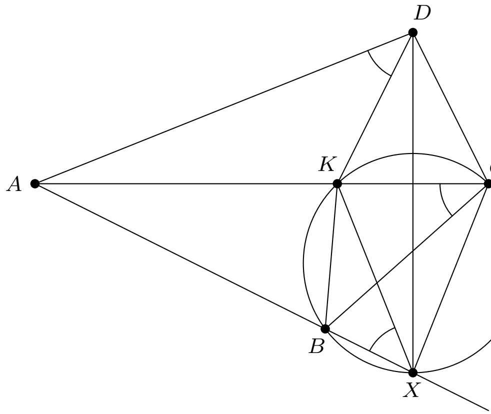
$$|\sphericalangle KBC| = 2|\sphericalangle DAC| = |\sphericalangle DXC| + |\sphericalangle KXD| = |\sphericalangle KXC|.$$

Rozlišíme dvě možnosti.

(i) $B = X$. Pak

$$\begin{aligned}|\sphericalangle KBA| &= |\sphericalangle KXA| = |\sphericalangle DXA| - |\sphericalangle DXK| = |\sphericalangle DCA| - |\sphericalangle CAD| = \\ &= |\sphericalangle CKD| - |\sphericalangle KAD| = (180^\circ - |\sphericalangle DKA|) - |\sphericalangle KAD| = |\sphericalangle KDA|,\end{aligned}$$

a tedy je splněna jedna z rovností ze zadání.



(ii) $B \neq X$. Pak díky $|\sphericalangle KBC| = |\sphericalangle KXC|$ leží body K, C, B a X na jedné kružnici.

Jelikož je trojúhelník KCX rovnoramenný, je bod X od přímky KC dál než bod B. Bod B tak musí ležet nejen na přímce AX, ale dokonce na úsečce AX. Z toho máme $|\sphericalangle BCA| = |\sphericalangle KXA|$ a podle prvního případu $|\sphericalangle KXA| = |\sphericalangle KDA|$. Platí tedy druhá z rovností ze zadání a úloha je vyřešena.

Poznámky:

Našlo se mnoho odvážlivců, co se pokusilo úlohu vyřešit. Většině se to nepovedlo, ale našlo se i dost lidí, kterým ano. Bohužel spousta lidí zapomněla diskutovat polohu bodu B a přišli tak o jeden bod. Někteří zase vyšli z trojúhelníku ACD a konstruovali bod B, což může být správně, je ale třeba poznamenat, že každý čtyřúhelník $ABCD$ takto dostaneme. Za to jsem nakonec body nestrhával.

(Michael „Majkl" Bílý)