Povídání ke druhé jarní sérii

Druhá jarní série je věnovaná délkám a vzdálenostem. Protože toto téma obsahuje několik užitečných tvrzení a vět, které by mělo znát každé PraSe, připravili jsme pro vás tento úvodní text.

Následující tvrzení můžete používat bez důkazu. Délky stran a velikosti vnitřních úhlů v trojúhelníku značíme standardně a, b, c, resp. α, β, γ.

Věta. (sinová) *V libovolném trojúhelníku ABC platí, že poměr délek stran je rovný poměru sinů protějších úhlů*

$$a : b : c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma.$$

Když navíc označíme R poloměr kružnice opsané, pak platí

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R.$$

Věta. (kosinová) *V libovolném trojúhelníku ABC platí*

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha.$$

Poznámka. Všimněte si, že pokud je úhel α pravý, má tvrzení tvar $a^2 = b^2 + c^2$, což je Pythagorova věta.

Věta. (Tečnový čtyřúhelník[1]) *Čtyřúhelník $ABCD$ je tečnový právě tehdy, když pro délky jeho stran platí $a + c = b + d$.*

Příklad. Osa vnitřního úhlu u vrcholu A v libovolném trojúhelníku ABC dělí stranu a v poměru $c : b$.

Řešení. Označme si E průsečík osy vnitřního úhlu při vrcholu A a strany a. Pak ze sinové věty pro trojúhelníky ABE a ACE máme

$$\frac{|BE|}{\sin|\sphericalangle BAE|} = \frac{c}{\sin|\sphericalangle AEB|} \quad \text{a} \quad \frac{|CE|}{\sin|\sphericalangle CAE|} = \frac{b}{\sin|\sphericalangle AEC|}.$$

Podělením těchto dvou rovností a využitím $\sin|\sphericalangle BAE| = \sin|\sphericalangle CAE|$ a $\sin|\sphericalangle AEB| = \sin|\sphericalangle AEC|$ dostáváme

$$\frac{|BE|}{|CE|} = \frac{c}{b}.$$

[1] Tečnový čtyřúhelník je takový čtyřúhelník, kterému se dá vepsat kružnice, tedy existuje kružnice taková, že strany čtyřúhelníka jsou k ní tečné.

Příklad. V pravoúhlém trojúhelníku ABC označme D bod dotyku kružnice vepsané s přeponou BC. Ukažte, že $|BD| \cdot |DC| = S_{ABC}$.

Řešení. Označme E bod dotyku se stranou AC a F se stranou AB. Každým bodem mimo kružnici lze vést právě dvě přímky, které jsou k dané kružnici tečné. Vzdálenosti tohoto bodu a bodů dotyku s touto kružnici jsou díky symetrii stejné. Z toho máme $x = |AE| = |AF|$, $y = |BF| = |BD|$ a $z = |CD| = |CE|$. Pak máme

$$x + y = c,$$
$$y + z = a,$$
$$x + z = b.$$

Pak sečtením druhé, třetí rovnice a odečtením první dostáváme $|CD| = z = \frac{a+b-c}{2}$ a z toho už je $|BD| = \frac{a+c-b}{2}$. Tedy

$$|CD| \cdot |BD| = \frac{1}{4}(a + b - c)(a + c - b) = \frac{1}{4}\big(a^2 - (b - c)^2\big)$$

a díky Pythagorově větě

$$\frac{1}{4}\big(a^2 - b^2 - c^2 + 2bc\big) = \frac{1}{2}bc = S_{ABC}.$$

Délky a vzdálenosti

2. jarní série Termín odeslání: 12. března 2012

Úloha 1. (3 body)
Lukáš v Praze vynalezl teleport. Hned se ho rozhodl vyzkoušet a teleportoval se 500 km na sever, pak 500 km na západ, pak 500 km na jih a nakonec ještě 500 km na východ. Ke svému úžasu se ale objevil asi 50 km od Prahy. Umíte určit, proč a na které světové straně od Prahy se nacházel?

Úloha 2. (3 body)
V tětivovém osmiúhelníku[2] $ABCDEFGH$ platí $|AB| = |CD| = |EF| = |GH|$. Dokažte, že středy úseček AB, CD, EF a GH leží na jedné kružnici.

Úloha 3. (3 body)
V konvexním čtyřúhelníku $ABCD$ platí $|AB| = 2$, $|BC| = \sqrt{2}$, $|CD| = 3$ a $|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle BCD| = 135°$. Určete $|AD|$.

Úloha 4. (5 bodů)
Železnice dlouhá 56 km vede z nádraží A postupně přes nádraží B, C, … , J až do nádraží K, je tedy takto rozdělena na 10 úseků. Žádné dva po sobě následující úseky nejsou dohromady delší než 12 km, každé tři po sobě následující úseky však dohromady měří alespoň 17 km. Jaká může být vzdálenost mezi nádražími B a G? Nalezněte všechny možnosti.[3]

Úloha 5. (5 bodů)
V trojúhelníku ABC označme l osu vnějšího úhlu u vrcholu C. Přímka rovnoběžná s l procházející středem strany AB protne přímku AC v bodě E. Určete $|CE|$, když $|AC| = 7$ a $|CB| = 4$.

Úloha 6. (5 bodů)
Konvexnímu čtyřúhelníku $BRNO$ byly změřeny čtyři strany a jedna úhlopříčka. Vyšla tak (v nějakém pořadí) čísla 5, 5, 8, 29 a 35. Jak dlouhá je zbylá úhlopříčka?

Úloha 7. (5 bodů)
V ostroúhlém trojúhelníku ABC platí $|AB| > |AC|$. Označme M střed strany BC. Osa vnějšího úhlu u vrcholu A protne polopřímku BC v bodě P. Body K a F leží na přímce PA tak, že $MF \perp BC$ a $MK \perp PA$. Dokažte, že $|BC|^2 = 4 \cdot |PF| \cdot |AK|$.

Úloha 8. (5 bodů)
Uvnitř strany AB tečnového čtyřúhelníku[4] $ABCD$ zvolme bod E. Dokažte, že kružnice vepsané trojúhelníkům BCE, CDE a DAE mají společnou tečnu.

[2] Osmiúhelník je *tětivový*, jestliže jeho vrcholy leží na jedné kružnici.
[3] Vzdálenosti mezi stanicemi nemusejí být celočíselné.
[4] Čtyřúhelník je *tečnový*, jestliže mu lze vepsat kružnici.

Délky a vzdálenosti

2. jarní série Vzorové řešení

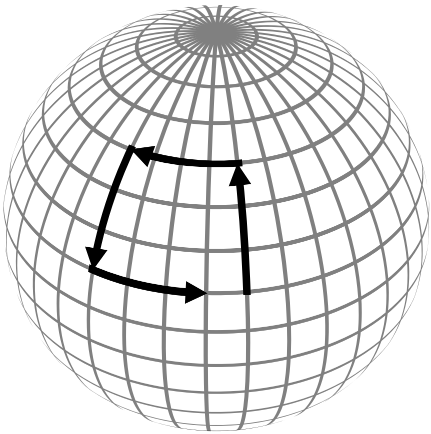
Úloha 1.

(48; 47; 2,94; 3,0)

Lukáš v Praze vynalezl teleport. Hned se ho rozhodl vyzkoušet a teleportoval se 500 km na sever, pak 500 km na západ, pak 500 km na jih a nakonec ještě 500 km na východ. Ke svému úžasu se ale objevil asi 50 km od Prahy. Umíte určit, proč a na které světové straně od Prahy se nacházel? *(Monča Pospíšilová)*

Řešení:

Je nutné si uvědomit, že Země je kulatá, tedy že rovnoběžky blíže pólům jsou kratší než ty u rovníku. Tím vznikne dotazovaná odchylka cca 50 km. Situace je znázorněna na náčrtku.



Poznámky:

Kdo si uvědomil, že Země je kulatá, měl vyhráno. Imaginární bod jsem dala za precizní dopočtení vzdálenosti Lukáše od Prahy. *(Monča Pospíšilová)*

Úloha 2.

(49; 47; 2,80; 3,0)

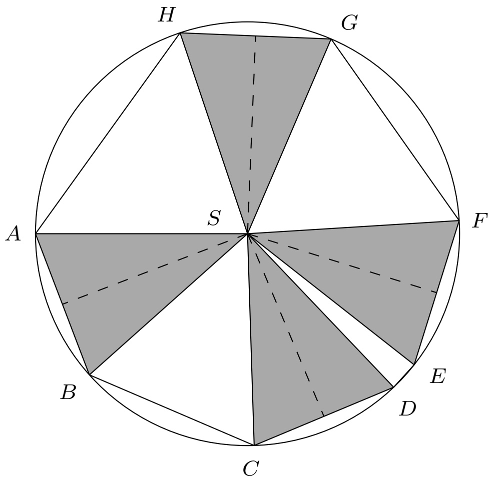
V tětivovém osmiúhelníku[5] *$ABCDEFGH$ platí $|AB| = |CD| = |EF| = |GH|$. Dokažte, že středy úseček AB, CD, EF a GH leží na jedné kružnici.* (Pepa Tkadlec)

Řešení:

Označme S stred kružnice opísanej osemuholníku. Trojuholníky $\triangle SAB$, $\triangle SCD$, $\triangle SEF$ a $\triangle SGH$ sú rovnoramenné s vrcholom S. Ich ramená sú polomery kružnice a ich základne sú zo zadania

[5] Osmiúhelník je *tětivový*, jestliže jeho vrcholy leží na jedné kružnici.

rovnako dlhé, takže podľa vety *sss* sú dokonca zhodné. Preto spojnice S so stredmi základní majú rovnakú dĺžku a teda tieto štyri body ležia na kružnici so stredom v S.



Jiné řešení:

Úsečky AB a CD sú rovnako dlhé tetivy kružnice, a preto existuje otočenie so stredom v S, ktoré zobrazí jednu úsečku na druhú. V tomto otočení sa stred AB zobrazí na stred CD, takže vzdialenosti týchto stredov od S sú rovnaké. To analogicky platí aj pre úsečky EF a GH, a teda všetky štyri stredy ležia na jednej kružnici so stredom v S.

Poznámky:

Úloha bola naozaj ľahká. Problémy s ňou mali najmä skúsenejší riešitelia, ktorí hľadali dôkaz bez použitia stredu kružnice. *(Miško Szabados)*

Úloha 3.

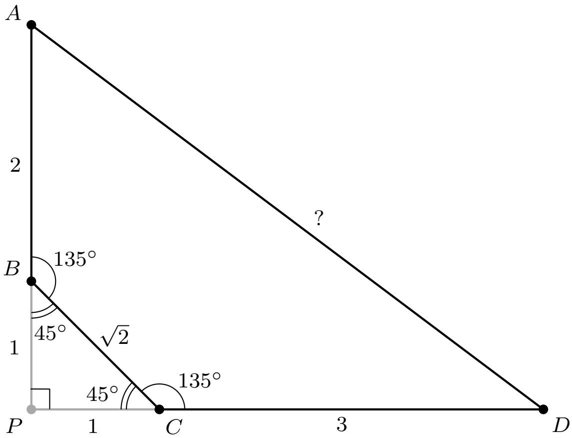
(51; 49; 2,80; 3,0)

V konvexním čtyřúhelníku $ABCD$ platí $|AB| = 2$, $|BC| = \sqrt{2}$, $|CD| = 3$ a $|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle BCD| = 135^\circ$. Určete $|AD|$. *(Pepa Tkadlec)*

Řešení:

Označme priesečník priamok AB a DC bodom P. Dopočítaním do priameho uhla zistíme, že $|\sphericalangle PBC| = |\sphericalangle PCB| = 45^\circ$, a teda $|\sphericalangle BPC| = 90^\circ$.

Keďže $\triangle BPC$ je pravouhlý aj rovnoramenný a $|BC| = \sqrt{2}$, platí $|BP| = |PC| = 1$. Tým pádom vieme, že $|AP| = 2 + 1 = 3$ a $|DP| = 3 + 1 = 4$, a z Pytagorovej vety pre $\triangle APD$ zistíme, že $|AD| = \sqrt{9 + 16} = 5$.



Poznámky:
Jedna polovica z vás si poradila s úlohou podobne ako vzorák. Druhá polovica sa pokúšala vyjadriť $|AD|$ pomocou kosínusovej a sínusovej vety. Oba spôsoby sú samozrejme správne, len ten druhý je trochu pracný.

Pri tom druhom spôsobe by som vás upozornil, aby ste nabudúce nezaokrúhľovali čiastočné výsledky. Je to nekorektné, ak potom s nimi naďalej počítate, lebo vám vyjde odlišný výsledok. Síce väčšina z vás to dorátala správne, lebo v kalkulačke sa vám výsledok nezaokrúhlil, ale zapísané ste to mali nesprávne. Za správny výsledok bol 1 bod a za postup som dával 0 – 2 body.

(Viktor Szabados)

Úloha 4.

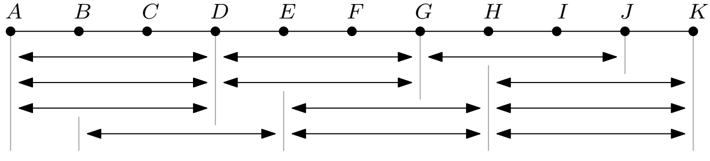
(42; 38; 4,14; 5,0)

Železnice dlouhá 56 km vede z nádraží A postupně přes nádraží B, C, ..., J až do nádraží K, je tedy takto rozdělena na 10 úseků. Žádné dva po sobě následující úseky nejsou dohromady delší než 12 km, každé tři po sobě následující úseky však dohromady měří alespoň 17 km. Jaká může být vzdálenost mezi nádražími B a G? Nalezněte všechny možnosti.[6] *(Martina Vaváčková)*

Řešení:
Označme $|XY|$ vzdálenost mezi nádražími X a Y. Pak můžeme provést odhad

$$56 = |AK| = |AD| + |DG| + |GJ| + |JK| \geq 3 \cdot 17 + |JK|,$$

tedy $|JK| \leq 5$. Stejným způsobem dostaneme $|GH| \leq 5$, $|DE| \leq 5$ a $|AB| \leq 5$.



Nyní proveďme odhad z druhé strany:

$$56 = |AK| = (|AB| + |DE| + |GH| + |JK|) + (|BD| + |EG| + |HJ|) \leq 4 \cdot 5 + 3 \cdot 12 = 56.$$

[6] Vzdálenosti mezi stanicemi nemusejí být celočíselné.

Zde nastává rovnost, tedy nutně platí $|AB| = |DE| = |GH| = |JK| = 5$ a $|BD| = |EG| = |HJ| = 12$. Jediná možná vzdálenost mezi nádražími B a G je proto $|BG| = |BD| + |DE| + |EG| = 29$. Dostaneme ji například pro délky úseků po řadě 5, 6, 6, 5, 6, 6, 5, 6, 6, 5.

Poznámky:
Většina lidí se dobrala ke správnému výsledku, nebo alespoň pomocí nerovností určila nějaký interval, v němž řešení leží. Více než polovina řešitelů však na tomto místě skončila. Ačkoliv je v zadání napsáno, že železnice „vede“ (z čehož se dá usoudit, že existuje), měla by se v řešení objevit přinejmenším zmínka o tom, že hodnoty 29 může být pro nějaké konkrétní délky úseků nabyto. Body jsem za absenci předchozího vzhledem k formulaci zadání nestrhávala, nicméně chválím všechny, kteří na to nezapomněli. *(Martina Vaváčková)*

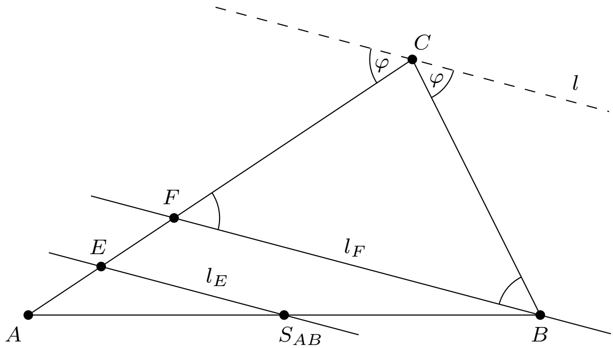
Úloha 5.

(39; 38; 4,72; 5,0)

V trojúhelníku ABC označme l osu vnějšího úhlu u vrcholu C. Přímka rovnoběžná s l procházející středem strany AB protne přímku AC v bodě E. Určete $|CE|$, když $|AC| = 7$ a $|CB| = 4$.

(Alča Skálová)

Řešení:
Označme si jako na obrázku S_{AB} střed strany AB, l_E přímku rovnoběžnou s l procházející bodem S_{AB} (a E), dále l_F přímku rovnoběžnou s l procházející bodem B a F průsečík l_F s AC. Polovinu vnějšího úhlu u C označme φ.



Z rovnoběžnosti l a l_F dostáváme $|\sphericalangle CFB| = \varphi$, resp. $|\sphericalangle CBF| = \varphi$, neboť se jedná o střídavé úhly. Trojúhelník FBC je tedy rovnoramenný a $|CF| = |CB| = 4$.

Přímka l_F je rovnoběžná s l_E, takže trojúhelníky $AS_{AB}E$ a ABF jsou podobné. Bod S_{AB} je středem strany AB, a proto i E je středem AF. Z předchozího víme, že $|AF| = |AC| - |CF| = 7 - 4$, tím pádem $|AE| = |EF| = \frac{3}{2}$.

Zbývá dopočítat $|CE| = |EF| + |CF| = \frac{3}{2} + 4 = \frac{11}{2}$.

Poznámky:
Sešlo se docela dost různorodých řešení, z nichž ta kratší byla většinou podobná vzorovému a delší užívala sinových vět a vůbec si jejich autoři započítali více, než bylo nutné.

Jelikož matematik (i matematička) je ze své podstaty tvor líný, snaží se většinou řešení spíš „vykoukat“ než upočítat. Co šlo s touto úlohou provést? Pokud si nakreslíte obrázek, ve kterém jsou na rozdíl od vzorového přímky l a l_E vodorovné, je rovnoramennost trojúhelníka CE(průnik l_E a CB) mnohem snáze odhalitelná. Fakt, že S_{AB} je „uprostřed“ mezi A a B, má pak za následek, že délka úsečky, kterou vytne na AC přímka l_E, je „uprostřed“ mezi délkami stran CA, CB.

Pár řešitelů si bohužel špatně přečetlo zadání a namísto osy vnějšího úhlu považovali l za osu vnitřního úhlu. To je zle! Základním předpokladem pro vyřešení úlohy je důkladné přečtení si zadání. (-: Nakonec jsem se rozhodla být velmi velmi velmi mírná a takovým řešením strhnout pouze jeden bod, jelikož věřím, že všichni autoři by bez problémů dokázali myšlenky „svého“ řešení převést na původní úlohu. *(Alča Skálová)*

Úloha 6.

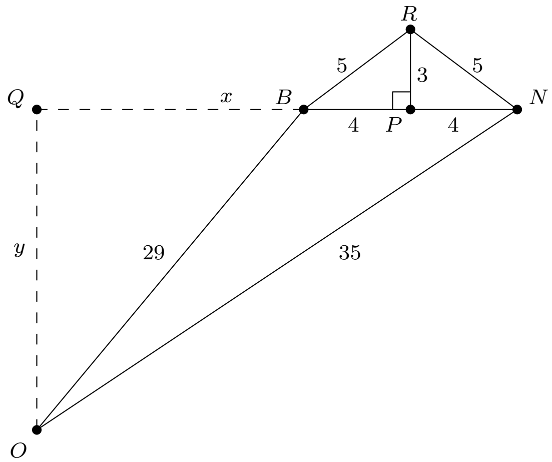
(46; 44; 4,70; 5,0)

Konvexnímu čtyřúhelníku $BRNO$ byly změřeny čtyři strany a jedna úhlopříčka. Vyšla tak (v nějakém pořadí) čísla 5, 5, 8, 29 a 35. Jak dlouhá je zbylá úhlopříčka? *(Pepa Tkadlec)*

Řešení:

Nejdříve určíme, která z pěti délek bude úhlopříčkou.

Z trojúhelníkových nerovností zjistíme, že ze stran délek 5, 5, 8, 29, 35 lze sestavit jedině trojúhelníky o stranách $(5, 5, 8)$ a $(8, 29, 35)$. Úhlopříčka (ať je to třeba BN) tedy musí mít délku 8 a délky stran můžeme bez újmy na obecnosti zvolit následovně: $|BR| = |RN| = 5$, $|BO| = 29$, $|NO| = 35$.



Nyní označme P střed BN. Poté $BP = PN = 4$ a z Pythagorovy věty $|RP| = 3$. Dále označme Q jako patu výšky trojúhelníku BNO vedenou z bodu O a vzdálenosti $x = |QP|$, $y = |OQ|$. Z Pythagorových vět

$$(x+4)^2 + y^2 = 35^2,$$

$$(x-4)^2 + y^2 = 29^2.$$

Odečteme rovnice:

$$16x = 35^2 - 29^2 = (35-29)(35+29) = 6 \cdot 64,$$
$$x = 6 \cdot 4 = 24.$$

Dopočteme y:

$$y^2 = 29^2 - 20^2 = (29-20)(29+20) = 9 \cdot 49,$$
$$y = 3 \cdot 7 = 21.$$

Hledaná druhá úhlopříčka má délku $\sqrt{(y+3)^2 + x^2} = \sqrt{2 \cdot 24^2} = 24\sqrt{2}$.

Poznámky:
Úloha byla na šestku poměrně jednoduchá, což se projevilo i na počtu řešení hodnocených plným počtem bodů. Prakticky všichni řešili úlohu pomocí kosinových vět, našlo se ale i několik odvážlivců, co si vystačili jen s Pythagorem či si dopomáhali Heronovým vzorcem a počítali stranu přes obsah. Imaginární body jsem tentokrát strhával za zaokrouhlování při převodu z kosinu na úhel a zpět, případně za tvrdé prohlášení, že úhlopříčka má délku 34. *(Lukáš Zavřel)*

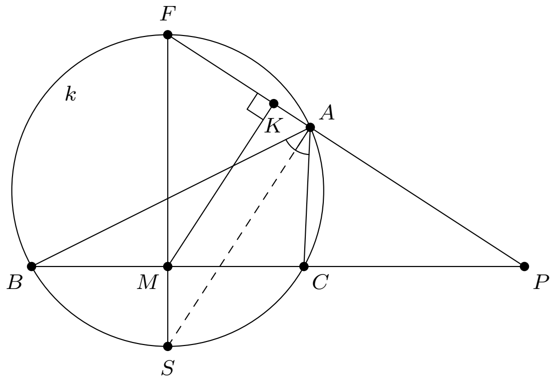
Úloha 7.

(14; 13; 4,64; 5,0)

V ostroúhlém trojúhelníku ABC platí $|AB| > |AC|$. Označme M střed strany BC. Osa vnějšího úhlu u vrcholu A protne polopřímku BC v bodě P. Body K a F leží na přímce PA tak, že $MF \perp BC$ a $MK \perp PA$. Dokažte, že $|BC|^2 = 4 \cdot |PF| \cdot |AK|$. *(Pepa Tkadlec)*

Řešení:
Označme k kružnici opsanou trojúhelníku ABC.

Přímka MF je kolmá na BC a prochází středem BC, tedy je to osa strany BC. Označme S její průsečík s obloukem BC kružnice k neobsahujícím bod A.



Oblouky SB, SC jsou stejně dlouhé, takže jim přísluší stejně velké obvodové úhly. Proto S leží na ose vnitřního úhlu u vrcholu A.[7] Teď už si zbývá všimnout, že jak osa strany BC, tak osa vnějšího úhlu u A procházejí středem oblouku BC obsahujícího bod A. Pro osu strany je to zřejmé, pro osu vnějšího úhlu si stačí uvědomit, že je kolmá na osu vnitřního úhlu, a použít Thaletovu větu.

Bod F (jejich průsečík) tak skutečně leží na k. Navíc AS i KM jsou obě kolmé na PA, takže jsou rovnoběžné, a protože M leží na FS, leží K na FA.

Nyní už úlohu dokončíme přímočaře. Rozepišme

$$|PF| \cdot |AK| = |PF| \cdot |PK| - |PF| \cdot |PA|.$$

Z Eukleidovy věty pro odvěsnu máme $|PF| \cdot |PK| = |PM|^2$ a z mocnosti bodu P ke kružnici k máme $|PF| \cdot |PA| = |PB| \cdot |PC|$. Můžeme tedy psát

$$|PF| \cdot |AK| = |PM|^2 - |PB| \cdot |PC| = |PM|^2 - \left(|PM| + \frac{1}{2}|BC|\right)\left(|PM| - \frac{1}{2}|BC|\right) =$$
$$= |PM|^2 - (|PM|^2 - \frac{1}{4}|BC|^2) = \frac{1}{4}|BC|^2,$$

což jsme chtěli dokázat.

---

[7] Bodu S se na počest jednoho z organizátorů české MO říká *Švrčkův bod.*

Poznámky:

Většina těch, co se do úlohy pustili, ji také vyřešila. Vyskytla se spousta různorodých řešení, od upravování sinů na dvě stránky, za což si někdo vysloužil $-i$, až po velice krátká elegantní řešení. Nikdo se ale neobtěžoval dokazovat rozmístění bodů K a A na přímce PF, nakonec jsem za to tedy body nestrhával. *(Michael „Majkl" Bílý)*

Úloha 8.

(7; 7; 5,00; 5,0)

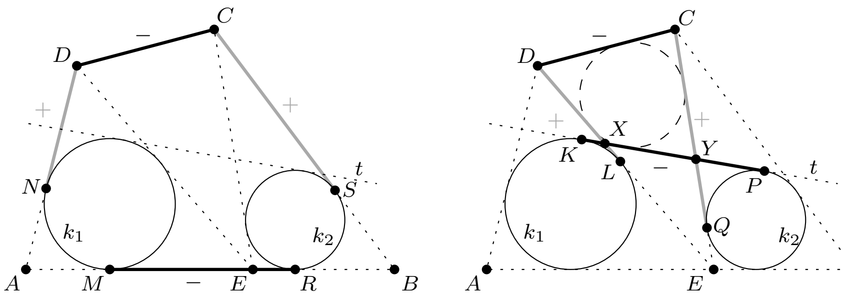
Uvnitř strany AB tečnového čtyřúhelníku[8] *$ABCD$ zvolme bod E. Dokažte, že kružnice vepsané trojúhelníkům BCE, CDE a DAE mají společnou tečnu.* (Pepa Tkadlec)

Řešení:

Kružnice vepsané trojúhelníkům DAE a BCE označíme po řadě k_1 a k_2 a jejich společnou vnější tečnu různou od přímky AB označíme t. Dále budeme značit body dotyku kružnice k_1 s přímkami t, DE, AB, AD po řadě K, L, M, N a podobně body dotyku kružnice k_2 s přímkami t, CE, AB, BC po řadě P, Q, R, S. Na závěr označíme průsečíky přímky t s přímkami ED, resp. EC jako X, resp. Y.

Nyní se budeme snažit ukázat, že čtyřúhelník $XYCD$ je tečnový, protože potom by přímka XY byla onou hledanou společnou tečnou, neboť kružnice vepsaná tomuto čtyřúhelníku je pak totožná s kružnicí vepsanou trojúhelníku CDE. Vyjdeme z toho, že čtyřúhelník $ABCD$ je tečnový a platí v něm tedy $|AB| + |CD| = |BC| + |DA|$. Dále několikrát použijeme tvrzení o shodných tečnách[9]. Odečteme-li od obou stran $|AM| = |AN|$ a $|BR| = |BS|$, dostaneme

$$|MR| + |CD| = |CS| + |DN|.$$



Dále využijeme rovnosti $|CS| = |CQ|$ a $|DN| = |DL|$ a ještě $|MR| = |KP|$, která platí, neboť se jedná o společné vnější tečny kružnic k_1 a k_2. Pomocí nich získáme

$$|KP| + |CD| = |CQ| + |DL|.$$

Na závěr odečteme rovnosti $|XK| = |XL|$ a $|YP| = |YQ|$. Dostáváme

$$|XY| + |CD| = |CY| + |DX|,$$

což znamená, že čtyřúhelník $XYCD$ je skutečně tečnový a důkaz je tímto hotov.

Poznámky:

Všichni, kdo úlohu vyřešili a poslali, tak ji měli správně. Jejich postupy byly různě nápadité, a tak jsem to náležitě ocenil imaginárními body. Úloha nebyla obtížná na použitou techniku nebo na trikové úpravy, ale šlo v podstatě jenom o technickou náročnost, které se spousta řešitelů zalekla. *(Filip Hlásek)*

[8] Čtyřúhelník je *tečnový*, jestliže mu lze vepsat kružnici.

[9] Tvrzení je v cizojazyčné literatuře známé jako *Equal tangents* a říká, že pokud vedeme tečny ke kružnici z vnějšího bodu, tak jsou vytyčené úseky stejně dlouhé.