Povídání ke třetí jarní sérii

Aby v nadcházející sérii nedošlo k nedorozumění, připravili jsme pro vás krátký úvodní text, který by měl stručně shrnout terminologii a teorii kolem prvočísel.

Všechna zde uvedená tvrzení můžete použít při řešení úloh v sérii. Nejsou těžká a vřele doporučujeme si je dokázat nebo alespoň rozmyslet.

Definice. (Prvočíslo) Přirozené číslo p nazveme *prvočíslo*, pokud je dělitelné právě dvěma různými přirozenými čísly (těmi jsou zřejmě 1 a p). Speciálně jednička prvočíslo není.

Věta. (Základní věta aritmetiky) *Každé přirozené číslo $a > 1$ lze až na pořadí jednoznačně rozložit na součin prvočísel.*

Abychom si o prvočíslech mohli říci více, připomeneme si, co je to dělitelnost.

Definice. (Dělitelnost) O celých číslech a, b řekneme, že a je dělitelem b (a dělí b), jestliže existuje celé číslo c takové, že $b = a \cdot c$. Tento fakt zapisujeme jako $a \mid b$. Pokud takové c neexistuje, píšeme $a \nmid b$.

Z této definice přímo plyne několik důležitých vlastností dělitelnosti.

Tvrzení. (Vlastnosti dělitelnosti) *Pro všechna celá čísla a, b, c, k, l, m platí:*

(i) $a \mid 0$,
(ii) $0 \mid a \Rightarrow a = 0$,
(iii) $a \mid b \Rightarrow |a| \leq |b|$ *nebo* $b = 0$,
(iv) $a \mid b$ *a zároveň* $a \mid c \Rightarrow a \mid k \cdot b + l \cdot c + m \cdot a$.

Příklad. Pro která celá čísla z je $\frac{z^3-33}{z-3}$ celé číslo?

Řešení. Pro celé číslo z splňující $z - 3 \mid z^3 - 33$ postupným vytýkáním získáme

$$z - 3 \mid z^3 - 33 = (z^3 - 3z^2) + 3(z^2 - 3z) + 9(z - 3) + 27 - 33.$$

Jelikož $z - 3$ dělí každou závorku na pravé straně, musí také dělit číslo $27 - 33 = -6$, a je tedy rovno jedné z hodnot -6, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 6. Je snadné ověřit, že potom každé odpovídající z splňuje podmínky zadání.

Nyní již ono slibované „více“ o prvočíslech.

Tvrzení. *Pro každé prvočíslo p a pro všechna celá čísla a, b platí*

$$p \mid a \cdot b \Rightarrow p \mid a \text{ nebo } p \mid b.$$

Příklad. Pokud pro přirozená čísla a, b, c platí

$$a + b + c \mid abc,$$

ukažte, že $a + b + c$ není prvočíslo.

Řešení. Kdyby $a+b+c$ bylo prvočíslo, muselo by dělit alespoň jedno z čísel a, b, c. To však nelze, protože je ostře větší než každé z nich.

Na závěr si ještě připomeneme, že *největším společným dělitelem* dvou přirozených čísel a, b nazýváme největší přirozené číslo d takové, že platí $d \mid a$ a zároveň $d \mid b$. Značíme ho (a, b). Přirozená čísla a, b nazveme *nesoudělná*, pokud $(a, b) = 1$.

Podobně *nejmenším společným násobkem* dvou přirozených čísel a, b nazýváme nejmenší přirozené číslo n takové, že platí $a \mid n$ a zároveň $b \mid n$. Značíme ho $[a, b]$.

Tvrzení. (O největším společném děliteli a nejmenším společném násobku) *Nechť a a b jsou přirozená čísla a $p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$, $p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdots p_k^{\beta_k}$ jejich rozklady na prvočísla (zde mohou být α_i nebo β_i rovna 0 pro některá i). Potom*

$$(a, b) = p_1^{\min(\alpha_1, \beta_1)} \cdot p_2^{\min(\alpha_2, \beta_2)} \cdots p_k^{\min(\alpha_k, \beta_k)},$$
$$[a, b] = p_1^{\max(\alpha_1, \beta_1)} \cdot p_2^{\max(\alpha_2, \beta_2)} \cdots p_k^{\max(\alpha_k, \beta_k)}.$$

Příklad. Dokažte, že pro všechna přirozená čísla a, b platí

$$a \cdot b = (a, b) \cdot [a, b].$$

Řešení. Stačí ukázat, že každé prvočíslo se vyskytuje v rozkladu levé strany na prvočísla ve stejné mocnině jako v rozkladu pravé strany.

Uvažme nějaké prvočíslo p a označme α, resp. β mocniny, v nichž dělí a, resp. b (α, β jsou nezáporná celá čísla). Jelikož

$$\alpha + \beta = \min(\alpha, \beta) + \max(\alpha, \beta),$$

získáváme užitím předešlého tvrzení dokazovanou rovnost.

Prvočísla

3. jarní série Termín odeslání: 10. dubna 2012

Ve všech úlohách platí, že 0 *není přirozené číslo.*

Úloha 1. (3 body)

Olin dostal za úkol najít přirozené číslo n ostře větší než 45 takové, že $75 \cdot n$ je třetí mocninou přirozeného čísla. Přišlo mu to snadné, tak se rozhodl najít nejmenší takové n. Jaké je to číslo?

Úloha 2. (3 body)

Anča má čtvercovou čokoládu ($n \times n$ dílků). Dostala chuť, snědla z ní prvočíselný počet dílků a zbylých 400 si schovala na příště. Kolik dílků Anča snědla? Nalezněte všechny možnosti.

Úloha 3. (3 body)

Majkl obdivuje prvočísla p taková, že čísla $2p+1$ a $4p+1$ jsou rovněž prvočísla. Nalezněte všechna taková čísla.

Úloha 4. (5 bodů)

Řekneme, že přirozené číslo je *ospalé*, pokud se v jeho prvočíselném rozkladu vyskytují pouze prvočísla 2 a 3. Martina našla ospalá čísla a a b taková, že $a+b$ je také ospalé. Dokažte, že a je násobek b nebo naopak.

Úloha 5. (5 bodů)

Lukáš našel za lednicí prvočíslo p různé od tří a přirozená čísla a, b taková, že $p \mid a+b$ a zároveň $p^2 \mid a^3+b^3$. Dokažte, že potom platí alespoň jedno z následujících:

(i) $p^2 \mid a+b$,
(ii) $p^3 \mid a^3+b^3$.

Úloha 6. (5 bodů)

Filipa zaujala nekonečná posloupnost prvočísel $p_1, p_2, \ldots$, která splňuje

(i) $p_1 = 2$,
(ii) p_n je pro $n \geq 2$ největší prvočíslo, které dělí $p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_{n-1} + 1$.

Myslí si o ní, že žádný její člen nemůže být roven pěti. Pomozte mu to dokázat.

Úloha 7. (5 bodů)

πtr se naučil novou fintu! Když mu Pepa zadá přirozené číslo n, tak on nalezne dvě přirozená čísla, jejichž rozdíl je n a obě tato čísla mají stejný počet prvočíselných dělitelů[1]. Dokažte, že ať mu Pepa zadá libovolné n, tak πtr dokáže taková čísla najít.

[1] Počítáme pouze různé prvočíselné dělitele, takže například $24 = 2^3 \cdot 3$ má pouze dva prvočíselné dělitele 2 a 3.

Úloha 8. (5 bodů)

Mějme prvočíslo p větší než tři. Mišo si napsal $p-1$ zlomků tvaru $\left|\frac{p-x}{x}\right|$, kde za x postupně dosadil všechna celá čísla z intervalu $(-p/2, p/2)$ mimo nuly[2]. Ukažte, že ze svých zlomků může Mišo vybrat několik, jejichž součin je přirozená mocnina tří.

[2]Například pro $p=5$ si tedy napsal zlomky $\frac{7}{2}$, $\frac{6}{1}$, $\frac{4}{1}$, $\frac{3}{2}$.

Prvočísla

3. jarní série Vzorové řešení

Úloha 1.

(48; 47; 2,88; 3,0)

Olin dostal za úkol najít přirozené číslo n ostře větší než 45 takové, že $75 \cdot n$ je třetí mocninou přirozeného čísla. Přišlo mu to snadné, tak se rozhodl najít nejmenší takové n. Jaké je to číslo?

(Pepa Tkadlec)

Řešení:

Aby číslo $75 \cdot n$ bylo třetí mocninou přirozeného čísla, musí být všechny exponenty v jeho prvočíselném rozkladu násobky tří. Protože $75 = 3 \cdot 5^2$, hledáme n ve tvaru $3^2 \cdot 5 \cdot k^3$, kde k je přirozené číslo.

Nejmenší takové n větší než $45 = 3^2 \cdot 5 \cdot 1^3$ je $3^2 \cdot 5 \cdot 2^3 = 360$.

Poznámky:

Naprostá většina řešitelů si s úlohou hravě poradila. *(Helča Svobodová)*

Úloha 2.

(47; 46; 2,94; 3,0)

Anča má čtvercovou čokoládu ($n \times n$ dílků). Dostala chuť, snědla z ní prvočíselný počet dílků a zbylých 400 si schovala na příště. Kolik dílků Anča snědla? Nalezněte všechny možnosti.

(Pepa Tkadlec)

Řešení:

Počet dielikov zjedených Ančou označme p. Podľa zadania má platiť $n^2 - p = 400$, teda

$$p = n^2 - 400 = (n - 20)(n + 20).$$

Ak má byť p prvočíslo, musí byť jeden z činiteľov rovný ± 1. Vieme, že p a n sú kladné čísla, preto v úvahe prichádza iba jedno vyhovujúce riešenie, a to ak $n - 20 = 1$. Čiže $n = 21$ a pre p dostávame $p = (21 - 20)(21 + 20) = 41$, čo je prvočíslo. Anča teda zjedla 41 dielikov.

Poznámky:

Úlohu ste nemali problém vyriešiť. Skoro všetci ste využívali rovnakú myšlienku ako vo vzoráku. U niektorých riešení sa dokonca Anča premenila na Monču :). Za správny výsledok bol 1 bod a za postup som dával 0 – 2 body. *(Viktor Szabados)*

Úloha 3.

(45; 42; 2,84; 3,0)

Majkl obdivuje prvočísla p taková, že čísla $2p + 1$ a $4p + 1$ jsou rovněž prvočísla. Nalezněte všechna taková čísla. *(Peter „πtr“ Korcsok)*

Řešení:

Pozrime sa, aké zvyšky dávajú čísla p, $2p + 1$ a $4p + 1$ po delení tromi.

$$2p+1 \equiv 2p-2 = 2(p-1) \pmod 3$$
$$4p+1 \equiv 4p+4 = 4(p+1) \pmod 3$$

Všimnime si, že $p-1$, p a $p+1$ sú tri za sebou idúce čísla, čiže práve jedno z nich bude deliteľné tromi. Rozmyslite si, že tým pádom aj jedno z čísiel p, $2p+1$ a $4p+1$ je deliteľné tromi. Keďže sú to prvočísla, jedno z nich je rovné 3. V úvahe prichádza jediný možný prípad $p=3$. Získaná trojica 3, 7 a 13 vyhovuje.

Poznámky:
Úlohu ste nemali problém vyriešiť. Skoro všetci ste využívali rovnakú myšlienku ako vo vzoráku. Došli mi aj riešenia s výsledkom $p=1$. Tu by som chcel povedať, že 1 nie je prvočíslo, ako bolo už spomenuté v texte k sérii, napriek tomu som vám za to body nestrhával. Za správny výsledok bol 1 bod a za postup som dával 0 – 2 body. *(Viktor Szabados)*

Úloha 4.
(43; 39; 4,49; 5,0)

Řekneme, že přirozené číslo je ospalé, pokud se v jeho prvočíselném rozkladu vyskytují pouze prvočísla 2 a 3. Martina našla ospalá čísla a a b taková, že $a+b$ je také ospalé. Dokažte, že a je násobek b nebo naopak. *(Michal „Miško“ Szabados)*

Řešení:
Pro spor předpokládejme, že a nedělí b a ani naopak. Označme d největší společný dělitel čísel a, b. Pak platí $a = a'd$ a $b = b'd$, kde a' a b' jsou nesoudělná a různá od jedné. Protože v prvočíselném rozkladu a a b jsou pouze čísla 2 a 3, získáváme bez újmy na obecnosti („búno“) $a' = 2^x$ a $b' = 3^y$, kde $x, y \in \mathbb{N}$.

Součet $a+b = d(2^x+3^y)$ a d jsou ospalá čísla. Díky tomu je ospalý součet 2^x+3^y, což je spor, protože pro přirozená x, y nemůže být dělitelný dvěma ani třemi, a má tak jiného prvočíselného dělitele. Musí tedy platit $a \mid b$ nebo $b \mid a$.

Poznámky:
Většina z vás úlohu vyřešila bez problémů. Někteří si ale přidělávali práci, protože se snažili dokázat, že takováto a, b existují. Podobně zbytečné bylo rozebírat případy, kdy neplatil předpoklad implikace, protože pak je tvrzení triviálně splněno. *(Petr Ryšavý)*

Úloha 5.
(41; 41; 4,71; 5,0)

Lukáš našel za lednicí prvočíslo p různé od tří a přirozená čísla a, b taková, že $p \mid a+b$ a zároveň $p^2 \mid a^3+b^3$. Dokažte, že potom platí alespoň jedno z následujících:

(i) $p^2 \mid a+b$,
(ii) $p^3 \mid a^3+b^3$.

(Pepa Tkadlec)

Řešení:
Předpokládejme, že $p^2 \nmid a+b$. Z $p^2 \mid a^3+b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$ tedy plyne $p \mid a^2-ab+b^2$.

Zároveň $p \mid a+b$, takže $p \mid (a+b)^2-(a^2-ab+b^2) = 3ab$, a protože je p prvočíslo různé od 3, máme $p \mid a$ nebo $p \mid b$. To spolu s tím, že $p \mid a+b$, znamená, že $p \mid a$ a zároveň $p \mid b$. Dohromady $p^3 \mid a^3+b^3$, což jsme chtěli dokázat.

Poznámky:
Většina si s úlohou poradila hravě, téměř jako ve vzorovém řešení. Ti, kteří rozebírali zbytečně moc případů nebo se k řešení dostali ještě větší oklikou při zavádění asi 5 dalších proměnných, naštěstí unikli bodovému postihu. Nakonec se našlo pár řešitelů, kteří se nechali nachytat na implikaci, která tvrdí, že pokud p^2 dělí dvě závorky, pak dělí alespoň jednu z nich. To ale samozřejmě není pravda (například $2^2 \mid 6 \cdot 10$, ale přitom každý činitel „obsahuje“ dvojku jen jednu), takže za taková řešení jsem uděloval 3 body. *(Michael „Majkl“ Bílý)*

Úloha 6. (37; 35; 4,35; 5,0)

Filipa zaujala nekonečná posloupnost prvočísel $p_1, p_2, \ldots$, která splňuje

(i) $p_1 = 2$,

(ii) p_n *je pro* $n \geq 2$ *největší prvočíslo, které dělí* $p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_{n-1} + 1$.

Myslí si o ní, že žádný její člen nemůže být roven pěti. Pomozte mu to dokázat. *(Filip Hlásek)*

Řešení:

Protože $p_1 = 2$ a $p_2 = 3$, je hodnota výrazu $p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n + 1$ pro každé $n \geq 2$ nesoudělná se dvěma a se třemi (dává zbytek jedna), a všechny další členy jsou tedy lichá prvočísla.

Pro spor předpokládejme, že existuje nějaké přirozené $n \geq 3$ takové, že $p_n = 5$. Protože největší prvočíselný dělitel čísla $p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_{n-1} + 1$ je roven pěti, a navíc je číslo samotné nesoudělné se dvěma a se třemi, je toto číslo nutně tvaru 5^k, kde $k \in \mathbb{N}$. Rovnost upravíme do tvaru

$$p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_{n-1} = 5^k - 1 = 5^k - 1^k = (5-1)\bigl(5^{k-1} + 5^{k-2} + \cdots + 1\bigr) = 4\bigl(5^{k-1} + \cdots + 1\bigr).$$

Zde nastává hledaný spor, protože dvojka je v posloupnosti jediná a všechna ostatní prvočísla jsou lichá, takže součin na levé straně nemůže být dělitelný čtyřmi. Žádný člen Filipovy posloupnosti tedy nemůže být roven pěti.

Poznámky:

Někteří řešitelé zkoumali pouze poslední dvojčíslí čísla 5^k, a došli tak také k závěru, že by zmíněný součin musel být dělitelný čtyřmi. Na šestou úlohu to byl příklad spíše jednodušší a téměř všechna řešení se s ním bez zaváhání vypořádala. *(Filip Hlásek)*

Úloha 7. (22; 20; 3,50; 3,5)

πtr se naučil novou fintu! Když mu Pepa zadá přirozené číslo n, tak on nalezne dvě přirozená čísla, jejichž rozdíl je n a obě tato čísla mají stejný počet prvočíselných dělitelů[3]. Dokažte, že ať mu Pepa zadá libovolné n, tak πtr dokáže taková čísla najít. *(Peter „πtr“ Korcsok)*

Řešení:

V prípade, že zadané číslo n je párne, odpoveďou by mohli byť čísla $2n$ a n. Pretože 2 sa už v prvočíselnom rozklade čísla n nachádza, počet prvočíselných deliteľov sa vôbec nezmení.

Ukážeme, že pre nepárne n môžu byť odpoveďou čísla pn a $(p-1)n$, kde p je najmenšie nepárne prvočíslo, ktoré nie je deliteľom čísla n.

Číslo pn má určite o jeden prvočíselný deliteľ (konkrétne p) viac ako číslo n, pozrime sa ešte, koľko prvočísel pribudne do rozkladu čísla $(p-1)n$: p je nepárne, preto $2 \mid p-1$. Pre akékoľvek prvočíselné delitele q čísla $p-1$ nutne platí $q \leq p-1 < p$, preto pre $q \neq 2$ určite platí aj $q \mid n$. Číslo $(p-1)n$ má teda všetky prvočíselné delitele čísla n rozšírené o prvočíslo 2. Tým sme ukázali, že čísla pn a $(p-1)n$ naozaj vyhovujú zadaniu.

Poznámky:

Takmer všetky správne riešenia boli podobné tomu nášmu, tie menej úspešné správne vyriešili párne prípady, pre nepárne n sa však snažili využiť prvočísla tvaru $2^k - 1$ (nazývané aj *Mersennove prvočísla*) alebo $2^k + 1$ (tieto sa nazývajú *Fermatove prvočísla*). Problémom týchto riešení je to, že ani o jednej skupine zatiaľ nie je dokázané, že ich je nekonečne veľa (aj keď sa to predpokladá). Žiaľ, našli sa aj riešenia, ktoré sa k vyriešeniu nepárneho (a občas aj párneho) prípadu veľmi nepriblížili, napriek tomu oceňujem aj snahu úlohu zdolať. *(Peter „πtr“ Korcsok)*

Úloha 8. (4; 4; 4,75; 5,0)

Mějme prvočíslo p větší než tři. Mišo si napsal $p-1$ zlomků tvaru $\left|\frac{p-x}{x}\right|$, kde za x postupně dosadil všechna celá čísla z intervalu $(-p/2, p/2)$ mimo nuly[4]. Ukažte, že ze svých zlomků může Mišo

[3] Počítáme pouze různé prvočíselné dělitele, takže například $24 = 2^3 \cdot 3$ má pouze dva prvočíselné dělitele 2 a 3.

[4] Například pro $p = 5$ si tedy napsal zlomky $\frac{7}{2}$, $\frac{6}{1}$, $\frac{4}{1}$, $\frac{3}{2}$.

vybrat několik, jejichž součin je přirozená mocnina tří. *(Pepa Tkadlec)*

Řešení (podle Rada Švarce):
Ukážeme, že Mišo uspěje, vybere-li právě ty zlomky, v jejichž čitatelích vznikne násobek tří, což jsou právě ty zlomky, které odpovídají volbám $x \equiv p \pmod 3$, $x \in (-p/2, p/2)$.

V čitatelích všech takových zlomků se vyskytnou všechny násobky tří z intervalu $(p - p/2, p + p/2) = (p/2, 3p/2)$. Označme množinu všech takových přirozených čísel A.

Ve jmenovatelích se objeví právě všechna celá čísla z intervalu $(-p/2, p/2)$, která dávají po dělení třemi stejný (nenulový) zbytek jako prvočíslo p. Po zohlednění absolutní hodnoty tak ve jmenovatelích získáme právě všechna přirozená čísla z intervalu $(0, p/2)$, která nejsou násobkem tří. Tuto množinu označme B.

Množiny A a B obsahují obě stejný počet prvků (konkrétně $\lfloor \frac{p+1}{3} \rfloor$). Chceme ukázat, že vytkneme-li z každého čísla z množiny A nejvyšší možnou mocninu trojky, dostaneme právě všechna čísla z množiny B.

Pokaždé jistě získáme číslo nedělitelné třemi, které bude menší než $\frac{1}{3} \cdot 3p/2$, tedy číslo z množiny B. Zbývá ukázat, že všechna obdržená čísla budou různá. To je však snadné – kdybychom nějaké číslo měli dostat dvakrát, musela by množina A obsahovat dvě různá čísla, jejichž podíl je mocninou trojky. Pro každá dvě čísla $a_1, a_2 \in A$ je ale

$$\frac{a_1}{a_2} < \frac{3p/2}{p/2} = 3,$$

takže něco takového není možné.

Čitatele a jmenovatele zlomků se proto dají „popárovat“ tak, aby byl každý dílčí podíl roven nějaké mocnině tří, tedy i celý součin bude roven nějaké mocnině tří.

Poznámky:
Na hypotézu, že je potřeba brát každé třetí číslo, se dalo přijít odzkoušením malých případů. Samotný důkaz se dal provést lecjak (šlo například postupovat indukcí nebo upravovat podíly určitých faktoriálů). Úloha si tedy podle mě zasloužila, aby ji vyřešilo víc z vás ;). Příště se osmičky nebojte :).

Kdo si při čtení vzorového řešení všimnul, že p nemuselo být prvočíslo (stačilo nám, že je liché a není dělitelné třemi), má ode mě pochvalu. *(Pepa Tkadlec)*