Finální myšmaš

4. jarní série Termín odeslání: 7. května 2012

Úloha 1.

(a) V hokejovém turnaji[1] přesně 20% týmů prohrálo všechny své zápasy. Kolik týmů se mohlo turnaje zúčastnit? (2 body)

(b) V šachovém turnaji[1] se uděluje 1 bod za výhru, 0,5 bodu za remízu a 0 bodů za prohru. Turnaje se zúčastnili muži i ženy, přičemž každý hráč získal v partiích proti ženám stejný počet bodů jako v partiích proti mužům. Ukažte, že počet hráčů turnaje je druhou mocninou celého čísla.

Úloha 2.

(a) Roman nakreslil dva nepřekrývající se kosočtverce $ABCD$ a $DCEF$. Potom změřil $|\sphericalangle BCE| = 140^\circ$ ve čtyřúhelníku $BCED$. Jaká je v něm $|\sphericalangle BDE|$? Najděte všechny možnosti. (2 body)

(b) Kružnice k, l se protínají ve dvou různých bodech P, Q. Body A, B, C, D leží v tomto pořadí na jedné přímce tak, že A a C leží na k a B a D na l. Ukažte, že $|\sphericalangle APB| = |\sphericalangle CQD|$.

Úloha 3.

(a) Lukáš se snaží napsat na papír čísla $1, 2, \ldots, 2012$ v takovém pořadí, aby pro každé $k \leq 2012$ platilo, že z prvních k napsaných čísel se po seřazení podle velikosti stanou čísla po sobě jdoucí[2]. Kolik má možností, jak to udělat? (2 body)

(b) Ukažte, že existuje přirozené číslo, které se dá alespoň 100 způsoby zapsat jako součet 2012 čísel, z nichž každé je 2011-tou mocninou přirozeného čísla. Zápisy, které se liší jen pořadím sčítanců, považujeme za stejné.

Úloha 4.

(a) Funkce f je pro každé $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ definována předpisem $f(x) = 1/(1-x)$. Zjistěte hodnotu

$$\underbrace{f(f(\ldots f}_{2012}(2012)\ldots)).$$

(2 body)

(b) Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, které pro každou dvojici reálných čísel x, y splňují

$$2f(x + f(y)) = f(xf(y)).$$

Úloha 5.

V každém políčku tabulky $n \times n$ je vypnutá žárovka. Když Majkl na některou z nich ukáže, všechny žárovky ve stejném řádku a sloupci, včetně té, na kterou ukazuje, se přepnou. Na kolik nejméně ukázání dokáže Majkl rozsvítit všechny žárovky, pokud

(a) n je liché? (2 body)

(b) n je sudé?

---

[1] V turnaji hraje každý tým proti každému jinému týmu právě jednou.

[2] Tedy například $3, 4, 5, 2, 6, 1, \ldots$ je dobrý začátek, zatímco $5, 3, 4, \ldots$ není.

Úloha 6.

(a) Na přímce leží v tomto pořadí body A, B, C, D. Součet délek šesti úseček, které mají za koncové body některé dva z těchto čtyř, je 21 cm. Kolik může být $|BC|$, je-li $|AD| = 6$ cm?

(2 body)

(b) Smíšený tým mužů a žen včera běžel štafetový běh na $m \cdot n$ kilometrů, kde m a n jsou lichá nesoudělná přirozená čísla. Na trati bylo na každém m-tém a každém n-tém kilometru stanoviště, na kterém se předávala štafeta. V běhu se střídali muži se ženami, přičemž první běžel muž. Dokažte, že muži uběhli v součtu o kilometr více než ženy.

Úloha 7.

(a) Šavlík má liché prvočíslo p a snaží se najít celé číslo z tak, aby $\frac{p+z}{p-z}$ bylo rovněž celé. Dokažte, že ať je p jakékoliv, vždy existuje 8 (a ne více) takových z. (2 body)

(b) Mějme aritmetickou posloupnost $a_1, a_2, \ldots, a_n$ takovou, že $i \mid a_i$ pro každé i od 1 do $n-1$, ale n nedělí a_n. Dokažte, že n je mocnina prvočísla.

Finální myšmaš

4. jarní série Vzorové řešení

Úloha 1. (42; 41; 3,24; 2,0)

(a) *V hokejovém turnaji[3] přesně 20% týmů prohrálo všechny své zápasy. Kolik týmů se mohlo turnaje zúčastnit?* *(Pepa Tkadlec)*

(b) *V šachovém turnaji[3] se uděluje 1 bod za výhru, 0,5 bodu za remízu a 0 bodů za prohru. Turnaje se zúčastnili muži i ženy, přičemž každý hráč získal v partiích proti ženám stejný počet bodů jako v partiích proti mužům. Ukažte, že počet hráčů turnaje je druhou mocninou celého čísla.* *(Michal „Kenny“ Rolínek)*

Řešení:

(a) Předpokládejme, že turnaj proběhl, tj. že se ho účastnil alespoň jeden tým.

Podle zadání existuje tým, který všechny své zápasy prohrál. Takových týmů určitě nemohlo být více – v jejich vzájemném zápase by totiž musely prohrát oba týmy, což nelze. Oněch 20% je proto tvořeno jediným týmem.

Turnaje se zúčastnilo 5 týmů.

(b) Všimneme si, že v každém zápase se rozdá jeden bod. Označme m počet mužů a z počet žen hrajících šachový turnaj.

Každý muž získal stejně bodů proti ženám jako proti mužům, takže i v součtu je počet bodů, které získali muži ve smíšených zápasech, roven počtu bodů, které získali muži v zápasech s muži. Podobně je počet bodů, které ve smíšených zápasech získaly ženy, roven počtu bodů, které získali ženy v zápasech se ženami.

Jelikož proběhlo celkem $\frac{m(m-1)}{2}$ zápasů, ve kterých hráli pouze muži, $\frac{z(z-1)}{2}$ zápasů, ve kterých hrály pouze ženy, a $m \cdot z$ smíšených zápasů, máme

$$\begin{aligned} \frac{z(z-1)}{2} + \frac{m(m-1)}{2} &= mz, \\ m^2 + z^2 - 2mz &= m + z, \\ (m-z)^2 &= m + z. \end{aligned}$$

Vidíme, že počet všech účastníků (neboli $m+z$) je roven druhé mocnině celého čísla, což jsme chtěli dokázat.

Poznámky:

Všechna řešení, co došla, byla správně. Snad jen kdyby se více z vás nebálo poslat i druhou část ...

(Lukáš Zavřel)

[3] V turnaji hraje každý tým proti každému jinému týmu právě jednou.

Úloha 2.

(38; 37; 3,68; 5,0)

(a) *Roman nakreslil dva nepřekrývající se kosočtverce $ABCD$ a $DCEF$. Potom změřil $|\sphericalangle BCE| = 140^\circ$ ve čtyřúhelníku $BCED$. Jaká je v něm $|\sphericalangle BDE|$? Najděte všechny možnosti.*

(Pepa Tkadlec)

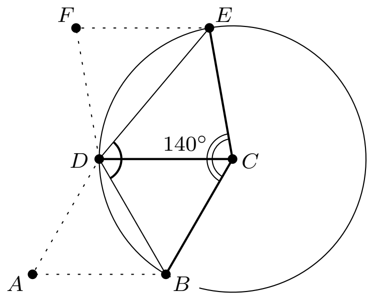
(b) *Kružnice k, l se protínají ve dvou různých bodech P, Q. Body A, B, C, D leží v tomto pořadí na jedné přímce tak, že A a C leží na k a B a D na l. Ukažte, že $|\sphericalangle APB| = |\sphericalangle CQD|$.*

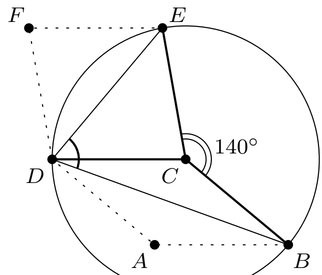
(Pepa Tkadlec)

Řešení:

(a) (Podle Michala Buráně, Katky Krajčiovej a Jaromíra Mielce)

Jelikož kosočtverce $ABCD$ a $DCEF$ sdílejí stranu, je $|CB| = |CD| = |CE|$, takže body B, D, E leží na kružnici se středem v C. Jelikož středový úhel příslušný oblouku BDE má velikost 140°, má obvodový úhel velikost 70° a $|\sphericalangle BDE| = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$.

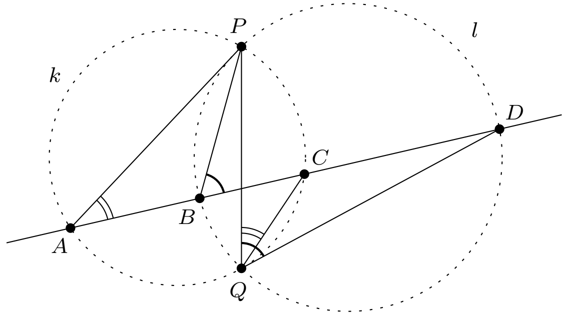




Chápeme-li velikost úhlu vždy jako číslo nepřesahující 180°, je potřeba rozebrat případ, kdy je čtyřúhelník $BCED$ nekonvexní. V takovém případě analogicky dopočteme $|\sphericalangle BDE| = \frac{1}{2} \cdot 140^\circ = 70^\circ$.

(b) Vyjádříme-li velikost úhlu APB pomocí vnějšího úhlu u vrcholu B v trojúhelníku APB, získáváme následným dvojím použitím obvodových úhlů kýžené

$$|\sphericalangle APB| = |\sphericalangle PBD| - |\sphericalangle PAC| = |\sphericalangle PQD| - |\sphericalangle PQC| = |\sphericalangle CQD|.$$



Poznámky:
První část nedělala nikomu z vás problémy. Sešlo se mnoho různých řešení. Někteří používali rovnoramenné trojúhelníky $\triangle CBD$ a $\triangle CDE$, jiní si pro změnu vypomohli tím, že úhlopříčky kosočtverce půlí příslušné vnitřní úhly.

Ve druhé části jste se trápili podstatně více, ale nakonec jste se většinou k řešení dobrali rovněž. Velmi populární bylo dokreslení průsečíku X přímek AD a PQ, které úlohu paradoxně spíše zkomplikovalo. Suverénně nejujetější řešení poslal *Rado Švarc*, který trojúhelník APB zobrazil podle onoho bodu X ve stejnolehlosti, která poslala B na C a A na D, a následně pomocí mocnosti ukázal, že obraz bodu P leží na kružnici s body C, Q a D. *(Pepa Tkadlec)*

Úloha 3.

(33; 29; 2,39; 2,0)

(a) *Lukáš se snaží napsat na papír čísla* $1, 2, \ldots, 2012$ *v takovém pořadí, aby pro každé* $k \leq 2012$ *platilo, že z prvních* k *napsaných čísel se po seřazení podle velikosti stanou čísla po sobě jdoucí*[4]*. Kolik má možností, jak to udělat?* *(Pepa Tkadlec)*

(b) *Ukažte, že existuje přirozené číslo, které se dá alespoň* 100 *způsoby zapsat jako součet* 2012 *čísel, z nichž každé je* 2011*-tou mocninou přirozeného čísla. Zápisy, které se liší jen pořadím sčítanců, považujeme za stejné.* *(Pepa Tkadlec)*

Řešení:

(a) Necháme Lukáše zapisovat čísla odzadu. Poslední číslo musí být nutně 1 nebo 2012. Před ním musí být největší nebo nejmenší číslo z těch ještě nepoužitých – opět tedy máme dvě možnosti. Takto můžeme pokračovat, dokud nám nezbyde pouze jediné číslo, kdy už na výběr nemáme. Tímto postupem jistě získáme každou vyhovující možnost právě jednou. Jejich počet je proto 2^{2011}.

(b) Vezměme si přirozené číslo n a spočítejme počet různých součtů 2012 čísel vytvořených pouze ze sčítanců $1^{2011}, 2^{2011}, \ldots, n^{2011}$.

Žádný takový součet určitě nepřekročí $2012 \cdot n^{2011}$. Povede-li se nám ukázat, že pro vhodně zvolené n je součtů více než $99 \cdot 2012 \cdot n^{2011}$, bude z Dirichletova principu plynout, že existuje alespoň 100 požadovaných součtů, které se rovnají (a tedy bude existovat číslo, které lze zapsat jako součet alespoň 100 popsanými způsoby).

Zkoumaný počet součtů je roven počtu způsobů, jak vybrat 2012 čísel z množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$, přičemž se vybraná čísla mohou opakovat. To jsou kombinace s opakováním a jejich počet je

$$\binom{n+2011}{2012} = \frac{(n+2011)\cdot(n+2010)\cdots n}{2012!} > \frac{n^{2012}}{2012!}.$$

Aby platilo požadované

$$\frac{n^{2012}}{2012!} > 99 \cdot 2012 \cdot n^{2011},$$

stačí zvolit $n > 2012! \cdot 99 \cdot 2012$.

Poznámky:
V první části se vyskytlo překvapivě mnoho rozmanitých řešení. Každý řešitel se vydal na souboj s úlohou po svém a téměř všichni uspěli. Naopak druhá část se ukázala být mnohem obtížnější, než jsme původně zamýšleli. Přesto se našli tací, kteří se ani takto velkých čísel nezalekli a úlohu zkrotili. Někteří k tomu použili (pravdivý, byť často vágně formulovaný) argument, že mnohočlen vyššího stupně roste rychleji a určitě někdy „předhoní“ ten druhý. Řešení, která se obešla bez takových tvrzení, jsem ocenil imaginárním bodem. *(Filip Hlásek)*

[4] Tedy například $3, 4, 5, 2, 6, 1, \ldots$ je dobrý začátek, zatímco $5, 3, 4, \ldots$ není.

Úloha 4.
(39; 36; 2,82; 2,0)

(a) *Funkce f je pro každé $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ definována předpisem $f(x) = 1/(1-x)$. Zjistěte hodnotu*

$$\underbrace{f(f(\dots f}_{2012}(2012)\dots)).$$

(Alča Skálová)

(b) *Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, které pro každou dvojici reálných čísel x, y splňují*

$$2f(x + f(y)) = f(xf(y)).$$

(Vejtek Musil)

Řešení:

(a) Buď f zadaná funkce. Počítejme

$$\begin{aligned} f(2012) &= \frac{1}{1-2012} = -\frac{1}{2011}, \\ f(f(2012)) &= \frac{1}{1-f(2012)} = \frac{2011}{2012}, \\ f(f(f(2012))) &= \frac{1}{1-f(f(2012))} = 2012. \end{aligned}$$

Odtud pro $k \in \mathbb{N}$ snadno indukcí ukážeme

$$\underbrace{f(f(\dots f(2012)\dots)}_{3k} = \underbrace{f(f(\dots f(2012)\dots)}_{3(k-1)} = \dots = f(f(f(2012))) = 2012.$$

Protože 2012 dává zbytek dva po dělení třemi, máme

$$\underbrace{f(f(\dots f(2012)\dots)}_{2012} = f(f(2012)) = \frac{2011}{2012}.$$

(b) Buď f řešení zadané rovnice. Ukažme nejprve, že existuje takové $t \in \mathbb{R}$, že $f(t) = 0$. K tomu by stačilo, aby se rovnaly argumenty $x + f(y)$ a $xf(y)$ pro nějakou dvojici x, y. Upravme

$$\begin{aligned} x + f(y) &= xf(y), \\ x &= \frac{f(y)}{f(y)-1}. \end{aligned}$$

Stačí tedy, aby existovalo $y \in \mathbb{R}$ takové, že $f(y) \neq 1$. To je však již snadné, neboť v opačném případě by f byla konstantní jednička, což nesplňuje zadání. Pro takto volená x a y tedy při označení $t = x + f(y) = xf(y)$ dostáváme $2f(t) = f(t)$ neboli $f(t) = 0$.

Nyní stačí dosadit dvojici $[x, t]$ a okamžitě máme

$$\begin{aligned} 2f\bigl(x + f(t)\bigr) &= f\bigl(xf(t)\bigr), \\ 2f(x) &= f(0). \end{aligned}$$

Funkce f proto musí být konstantní. Protože však $f(t) = 0$, musí být f nulová všude. Zkouškou se přesvědčíme, že $f(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$ je vskutku řešením úlohy.

Poznámky:
První úlohu zvládli téměř všichni poté, co více či méně korektně obhájili „umazání tří e$f$ek“. Podotkněme, že k tvrzení

$$\underbrace{f(f(\dots f(2012)\dots)}_{3k} = 2012$$

pro $k \in \mathbb{N}$, je formálně třeba přizvat indukci, což provedli jen dva řešitelé.

Ne všichni si však počínali bez ztráty kytičky, například *Štěpán Šimsa* se mě snažil přesvědčit, že $3 \mid 2012$.

Bez potíží byla také druhá úloha, kterou všichni úspěšní řešili přibližně vzorově. Pravidlo, že v každé sérii na funkcionální rovnice alespoň jeden řešitel zapomene provést zkoušku, opět nebylo prolomeno, a to i přesto, že byla triviální. *(Vejtek Musil)*

Úloha 5.

(37; 28; 2,65; 2,0)

V každém políčku tabulky $n \times n$ je vypnutá žárovka. Když Majkl na některou z nich ukáže, všechny žárovky ve stejném řádku a sloupci, včetně té, na kterou ukazuje, se přepnou. Na kolik nejméně ukázání dokáže Majkl rozsvítit všechny žárovky, pokud

(a) *n je liché?*

(b) *n je sudé?* *(Michael „Majkl“ Bílý)*

Řešení:

(a) Snadno si rozmyslíme, že ukázáním na všechny žárovky v jednom řádku rozsvítíme celou tabulku. To je n ukázání. Na méně to nejde, protože pak by existoval řádek a sloupec, do kterého by se vůbec neukázalo. Žárovka právě v tomto řádku a sloupci by tedy nikdy nezměnila stav a zůstala by zhasnutá.

(b) Ukázání na všechny žárovky zřejmě rozsvítí celou tabulku. Nyní ukážeme, že na méně ukázání to nejde.

Pořadí, ve kterém na žárovky ukazujeme, jistě nemá žádný vliv na výsledný efekt. Současně platí, že ukázat na některou žárovku sudokrát je totéž jako neukázat na ni vůbec a ukázat na ni lichokrát je jako ukázat na ni jednou. Každý konečný výsledek (rozuměj jak je tabulka rozsvícená) je tedy dán nějakou množinou žárovek, na které se ukázalo.

Dokončení řešení (podle Štěpána Šimsy):

Ke každé množině žárovek A přiřadíme množinu B těch žárovek, které budou svítit právě po ukázání na všechny žárovky z množiny A. Množinu A budeme nazývat *postupem* a množinu B *výsledkem* postupu A.

Jelikož výsledků je stejně jako postupů (konkrétně $2^{(n^2)}$), stačí ukázat, že každý výsledek je dosažitelný. Pak se totiž k žádnému výsledku (a tedy ani k celé rozsvícené tabulce) nepůjde dostat více než jedním postupem.

Všimněme si, že když ukážeme na všechny žárovky v jednom celém řádku a sloupci, jediné, co bude svítit, bude žárovka v jejich průniku. Umíme tedy rozsvítit jednu konkrétní žárovku. Tím pádem ale umíme rozsvítit i libovolnou množinu žárovek – stačí postupně rozsvítit každou jednotlivou žárovku z ní, přičemž kdybychom při tom měli na některou žárovku ukázat sudokrát, neukážeme na ni vůbec, a když lichokrát, tak jednou.

Majkl potřebuje n^2 ukázání.

Jiné dokončení řešení:

Celkově máme sudý počet žárovek, z nichž každá musela změnit svůj stav lichokrát, takže celkový počet těchto změn je sudý. Když ale ukážeme na nějakou žárovku, pak se přepne $2n-1$ (tedy licho) žárovek. Celkově tedy musíme ukázat na sudý počet žárovek.

Pro spor předpokládejme, že existuje množina žárovek M, na které když se ukáže, tak se rozsvítí všechny žárovky, a přitom existuje žárovka, na kterou se neukázalo.

Na žárovky v řádku a sloupci, ve kterých tato žárovka leží, se muselo ukázat celkem lichokrát (v řádku lichokrát, v sloupci sudokrát nebo naopak). Bez újmy na obecnosti ať to byl řádek, kam se ukázalo lichokrát.

Když nejdřív ukážeme na všechny žárovky množiny M v tomto řádku, pak bude celý řádek svítit. Aby řádek svítil i na konci, musí být počet žárovek množiny M v každém sloupci (nepočítáme-li vybraný řádek) sudý. Počet žárovek v M je tak liché číslo (za onen řádek) plus součet n sudých čísel, tedy číslo liché. To je ale spor s tím, že jsme celkově ukázali na sudo žárovek. Žádná taková množina M proto neexistuje a my jsme museli ukázat na všechny žárovky.

POZNÁMKY:
Úloha to byla vskutku zajímavá. Spousta lidí se ale ani nesnažila dokázat, že jimi nalezené číslo je opravdu minimální, ty jsem ohodnotil 1 bodem. Za uhodnutí výsledku části (b) jsem nakonec neuděloval ani bod. Nakonec bych chtěl pochválit, že téměř všichni co se pustili do části (b), ji zdárně „okecali“ :) A speciálně *Štěpána Šimsu* za vážně trikové řešení (b).

(Michael „Majkl“ Bílý)

Úloha 6.

(38; 37; 2,58; 2,0)

(a) *Na přímce leží v tomto pořadí body A, B, C, D. Součet délek šesti úseček, které mají za koncové body některé dva z těchto čtyř, je 21 cm. Kolik může být $|BC|$, je-li $|AD| = 6$ cm?*

(Pepa Tkadlec)

(b) *Smíšený tým mužů a žen včera běžel štafetový běh na $m \cdot n$ kilometrů, kde m a n jsou lichá nesoudělná přirozená čísla. Na trati bylo na každém m-tém a každém n-tém kilometru stanoviště, na kterém se předávala štafeta. V běhu se střídali muži se ženami, přičemž první běžel muž. Dokažte, že muži uběhli v součtu o kilometr více než ženy.* *(Pepa Tkadlec)*

ŘEŠENÍ:
(a) Zřejmě $21\,\mathrm{cm} = (|AB|+|BD|)+(|AC|+|CD|)+|AD|+|BC| = |AD|+|AD|+|AD|+|BC| = 3|AD| + |BC|$, tedy $|BC| = 21\,\mathrm{cm} - 3\cdot 6\,\mathrm{cm} = 3\,\mathrm{cm}$ je jediná možná délka úsečky BC.

(Háňa Bendová)

(b) Definujme konečnou posloupnost a_k pro $k \in \{0, 1, \dots, m \cdot n - 1\}$ následovně: Pokud na úseku mezi kilometrem k a $k+1$ běžela žena, položme $a_k = 1$, jinak $a_k = 0$. Chceme dokázat, že těch k, pro která $a_k = 0$, je o 1 více než těch, pro která $a_k = 1$.

Hodnotu a_k můžeme spočítat pomocí parity počtu stanovišť před k-tým kilometrem jako

$$a_k \equiv \left\lfloor \frac{k}{m} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{k}{n} \right\rfloor \pmod 2.$$

Ze zadání víme $-m \equiv -n \equiv 1 \pmod 2$, dále pro libovolné k máme $2k \equiv 0 \pmod 2$. Můžeme tedy rovnici upravit

$$a_k \equiv k - m \cdot \left\lfloor \frac{k}{m} \right\rfloor + k - n \cdot \left\lfloor \frac{k}{n} \right\rfloor = (k \bmod m + k \bmod n) \pmod 2.$$

Čínská zbytková věta[5] říká, že když k prochází všechna čísla od 0 do $m \cdot n - 1$ a čísla m, n jsou nesoudělná, tak dvojice zbytků $(k \bmod m, k \bmod n)$ nabývají všech možných dvojic (x, y), kde $x \in \{0, \dots, m-1\}$ a $y \in \{0, \dots, n-1\}$, každé právě jednou.

Dvojičku (x, y) z předchozího odstavce si představíme jako políčko o souřadnicích x, y. Takové políčko vybarvíme černě, pokud $x + y$ je sudé, nebo bíle, pokud $x + y$ je liché. Tím získáme obdélníkovou šachovnici o lichých rozměrech $m \times n$ s černými políčky v rozích a taková šachovnice má o 1 více černých políček než bílých. *(Mirek Olšák)*

[5] O Čínské zbytkové větě se můžete dočíst v naší knihovně nebo třeba na Wikipedii.

Poznámky:

První část jste bez problémů zvládli téměř všichni. S tou druhou to dopadlo o poznání hůře. Našla se nějaká úspěšná řešení, ale také řešení, která se hrozně úspěšně pouze tvářila. Ta opravit bylo nejtěžší. Imaginární bod si vysloužila *Katarína Krajčiová*, která jako jediná interpretovala naběhané kilometry jako políčka na šachovnici. *(Háňa Bendová)*

Úloha 7. (36; 29; 2,81; 2,0)

(a) *Šavlík má liché prvočíslo p a snaží se najít celé číslo z tak, aby $\frac{p+z}{p-z}$ bylo rovněž celé. Dokažte, že ať je p jakékoliv, vždy existuje 8 (a ne více) takových z.* *(Miško Szabados)*

(b) *Mějme aritmetickou posloupnost $a_1, a_2, \ldots, a_n$ takovou, že $i \mid a_i$ pro každé i od 1 do $n-1$, ale n nedělí a_n. Dokažte, že n je mocnina prvočísla.* *(Alča Skálová)*

Řešení:

(a) Upravme zlomok tak, aby sa v čitateľovi nevyskytovalo z:

$$\frac{p+z}{p-z} = \frac{2p-(p-z)}{p-z} = \frac{2p}{p-z} - 1.$$

To je celé práve vtedy, keď $p-z$ je deliteľom $2p$. Keďže p je prvočíslo rôzne od dvojky, $2p$ má práve osem rôznych deliteľov ± 1, ± 2, $\pm p$ a $\pm 2p$. Pre každý z nich potom dokážeme jednoznačne nájsť z také, aby $p-z$ bol zvolený deliteľ, čo nám dáva práve osem možností.

(b) Pre každú aritmetickú postupnosť vieme vyjadriť jej i-tý člen ako $a_i = a + id$, kde d je diferencia postupnosti a a je nejaké číslo. Podmienka zo zadania potom dáva, že $i \mid a + id \Rightarrow i \mid a$ pre i od 1 do $n-1$, ale $n \nmid a$.

Ak by sa v prvočíselnom rozklade n vyskytovalo viac ako jedno prvočíslo, môžeme písať $n = uv$, kde $u < n$ a $v < n$ sú nesúdeliteľné. Potom má platiť $u \mid a$ a $v \mid a$, z čoho vďaka nesúdeliteľnosti dostávame $uv \mid a$. To je ale v spore s tým, že $n \nmid a$, a dôkaz je hotový.

Poznámky:

Riešenia som opravoval veľmi zhovievavo kvôli malej bodovacej stupnici. V časti (a) ste si častokrát poradili aj bez šikovnej úpravy zlomku, je to však technika, ktorú je užitočné poznať. Problémy vám skôr robilo ukázať, že riešení je vždy presne osem, sú všetky rôzne a naozaj ich nie je viac.

Časť (b) nebola nijak zvlášť ťažká a nevyskytli sa žiadne väčšie problémy. *(Miško Szabados)*