Nerovnosti

2. podzimní série Termín odeslání: 5. listopadu 2012

Úloha 1. (3 body)

V Lukášově třídě je nebrýlatých děvčat více než brýlatých chlapců. Koho je ve třídě více – brýlatých, nebo děvčat?

Úloha 2. (3 body)

Když do superpočítače STANDA vložíme přirozené číslo[1], zobrazí se jeho faktoriál[2]. Kaťa do počítače postupně vložila 100 čísel, přičemž první bylo 99 a každé další bylo to, které jí počítač právě zobrazil. Viktor postupoval stejně, jen vložil celkem 99 čísel, přičemž začal stovkou. Kterému z nich se na konci zobrazilo větší číslo?

Úloha 3. (3 body)

Číslo, které se dá zapsat jako součet druhé mocniny a třetí mocniny (ne nutně téhož) přirozeného čísla, nazveme *mocné*. Je v intervalu od jedné do milionu včetně více těch přirozených čísel, která jsou *mocná*, nebo těch, která jsou ne*mocná*?

Úloha 4. (5 bodů)

V PraSestánu je spousta měst, jejichž vzdálenosti jsou navzájem různé. Helča vyráží z hlavního města, přičemž vždy letí do města, do nějž to má nejdál. Ukažte, že pokud se do hlavního města nevrátí hned po druhé cestě, pak se do něj nevrátí nikdy.

Úloha 5. (5 bodů)

Dokažte, že pokud přirozená čísla a, b, c splňují $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}<1$, pak $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\leq\frac{41}{42}$.

Úloha 6. (5 bodů)

Pro $x, y \in \langle 0, 1\rangle$ dokažte

$$\frac{x}{1+y}+\frac{y}{1+x}\leq 1.$$

Úloha 7. (5 bodů)

Majklův pětiúhelník má délky stran a, b, c, d, e. Dokažte, že

$$\frac{a}{b+c+d+e}+\frac{b}{a+c+d+e}+\frac{c}{a+b+d+e}+\frac{d}{a+b+c+e}+\frac{e}{a+b+c+d}\leq 2.$$

[1] Nulu za přirozené číslo nepovažujeme.

[2] Číslo „en faktoriál“ se značí $n!$ a počítá jako $n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdots n$.

Úloha 8. (5 bodů)

Kladná reálná čísla a, b, c splňují

$$(a+b-c)\cdot\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)=9.$$

Dokažte, že

$$\left(a^4+b^4+c^4\right)\cdot\left(\frac{1}{a^4}+\frac{1}{b^4}+\frac{1}{c^4}\right)\geq 38\,025.$$

Nerovnosti

2. podzimní série — Vzorové řešení

Úloha 1.

(121; 118; 2,93; 3,0)

V Lukášově třídě je nebrýlatých děvčat více než brýlatých chlapců. Koho je ve třídě více – brýlatých, nebo děvčat? *(Pepa Tkadlec)*

Řešení:

Ze zadání víme, že v Lukášově třídě je nebrýlatých děvčat více než brýlatých chlapců. Přičteme-li k oběma stranám této nerovnice počet brýlatých děvčat, znaménko nerovnosti se jistě nezmění a dostaneme tak, že nebrýlatých děvčat a brýlatých děvčat je dohromady více, než je celkem brýlatých chlapců a brýlatých děvčat. A protože děvčat je právě jako brýlatých děvčat a nebrýlatých děvčat dohromady a brýlatých je právě jako brýlatých chlapců a brýlatých děvčat, dostáváme, že v Lukášově třídě je více děvčat než brýlatých.

Poznámky:

Drtivá většina řešitelů měla úlohu naprosto správně. Mnoho z nich si označovalo počty studentů nekreativně (x, y, bd, nch, …), ale našly se i výjimky. Například *Kuba Svoboda* zvolil proměnné χ, ψ, τ a okomentoval tento svůj výběr tím, že řecká písmena vypadají přece v TEXu tak hezky a v této sérii je neměl kde použít. Chtěl snad něco naznačit zadavatelům? Našel se i řešitel (*Jirka Zeman*), který myslel na osud Lukášových spolužáků s brýlemi, tedy jeho slovy: „Kéž se brýlatí nestanou šikanovanou menšinou!“. *(Míša Hubatová)*

Úloha 2.

(82; 72; 2,61; 3,0)

Když do superpočítače STANDA vložíme přirozené číslo[3], zobrazí se jeho faktoriál[4]. Kaťa do počítače postupně vložila 100 čísel, přičemž první bylo 99 a každé další bylo to, které jí počítač právě zobrazil. Viktor postupoval stejně, jen vložil celkem 99 čísel, přičemž začal stovkou. Kterému z nich se na konci zobrazilo větší číslo? *(Pepa Tkadlec)*

Řešení:

Kaťa po prvním vložení svého čísla do počítače STANDA dostane číslo 99!, které je větší než Viktorovo počáteční číslo 100. Oběma nyní ještě chybí zadat jejich čísla do počítače 99-krát. Jelikož je faktoriál pro přirozená čísla rostoucí funkce[5], v každém kroku se bude Katě zobrazovat větší číslo než Viktorovi, a tedy se jí zobrazí větší číslo i na konci.

Poznámky:

Naprostá většina řešení vedla přes snadné pozorování, že $99! > 100$. Bohužel mnoho řešitelů zapomnělo zdůvodnit, proč se poté, co Kaťa i Viktor zadají svá čísla do počítače, nezmění, které z nich je větší. *(Martin Töpfer)*

---

[3] Nulu za přirozené číslo nepovažujeme.

[4] Číslo „en faktoriál“ se značí $n!$ a počítá jako $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$.

[5] Tím myslíme, že kdykoliv $x, y \in \mathbb{N}$ a $x > y$, potom $x! > y!$.

Úloha 3.

(87; 79; 2,72; 3,0)

Číslo, které se dá zapsat jako součet druhé mocniny a třetí mocniny (ne nutně téhož) přirozeného čísla, nazveme mocné. Je v intervalu od jedné do milionu včetně více těch přirozených čísel, která jsou mocná, nebo těch, která jsou nemocná? *(Pepa Tkadlec)*

Řešení:

Odhadneme shora počet mocných čísel. Ta jsou tvaru $a^2 + b^3$, kde a, b jsou přirozená čísla. Aby součet $a^2 + b^3$ byl v rozmezí od jedné do milionu, musí i čísla a^2 a b^3 být v tomto rozmezí. Jelikož $1000^2 = 100^3 = 1000000$, bude číslo a v rozmezí 1 až 1000 a číslo b v rozmezí 1 až 100. Tedy máme 1000 kandidátů na číslo a a 100 kandidátů na b. Mocných čísel od jedné do milionu je nejvýše tolik, kolik je dvojic (a, b), čili $1000 \cdot 100 = 10^5$. To je méně než polovina všech čísel od jedné do milionu, takže v zadaném intervalu je více čísel nemocných.

Poznámky:

Naprosto všechna řešení měla správný výsledek, drtivá většina z nich byla i správně zdůvodněná. Na úloze bylo asi nejtěžší uvědomit si, že není potřeba zjistit přesný počet nemocných nebo mocných čísel. Stačí jej šikovně odhadnout. Můžeme si dokonce všimnout, že mocných čísel je asi podstatně méně než 100000, protože některá čísla započítáme vícekrát (např. $4^2 + 1^3 = 3^2 + 2^3$) a jindy se součtem dostaneme nad milion (např. $1000^2 + 1^3$). Důležité ale je, že každé mocné číslo ze zkoumaného intervalu bylo skutečně alespoň jednou započteno. *(Kája Rezková)*

Úloha 4.

(117; 98; 3,91; 5,0)

V PraSestánu je spousta měst, jejichž vzdálenosti jsou navzájem různé. Helča vyráží z hlavního města, přičemž vždy letí do města, do nějž to má nejdál. Ukažte, že pokud se do hlavního města nevrátí hned po druhé cestě, pak se do něj nevrátí nikdy. *(Pepa Tkadlec)*

Řešení:

Jelikož Helča cestuje vždy do nejvzdálenějšího města, bude vzdálenost, kterou právě letí, vždy větší nebo rovna předchozí vzdálenosti. Navíc vzdálenosti mezi městy jsou různé, tedy rovnost vzdáleností může nastat jen tehdy, vrací-li se Helča do města, ze kterého právě přiletěla. V tom případě se cesta zacyklí mezi těmito dvěma městy.

Předpokládejme nyní, že se Helča vrátí do hlavního města po více než dvou letech. Označme a_1 vzdálenost hlavního města od nejvzdálenějšího města. Dále označme a_x vzdálenost hlavního města od města, ze kterého se do něj vrátíme. Podle předpokladu $a_x \neq a_1$. Dále víme, že se cesta nikde nezacyklí, jinak by se Helča do hlavního města už nevrátila. Vzdálenosti, které Helča urazí, tedy vždy rostou, a proto musí platit $a_x > a_1$. To je ovšem spor s maximalitou a_1.

Poznámky:

Řešení se většinou ubírala dvěma směry. První se v různých obměnách podobal vzorovému řešení, druhý spočíval v rozdělení PraSestánu do několika oblastí a rozebírání možností, odkud kam může Helča letět. Zde je ale poměrně obtížné vyšetřit všechny možnosti a na nějakou nezapomenout. Problémem nejednoho řešení také bylo vyřešení úlohy jen pro tři města.

(Kristýna „Kikina“ Zemková)

Úloha 5.

(111; 80; 3,50; 5,0)

Dokažte, že pokud přirozená čísla a, b, c splňují $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} < 1$, pak $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq \frac{41}{42}$. *(Pepa Tkadlec)*

Řešení:

Vzhledem k symetrii a, b, c můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat $a \leq b \leq c$. Stačí nám rozebrat tři případy.

(i) Nechť je $a = 2$ a $b < 4$. Pro $b = 2$ není splněn předpoklad, tedy $b = 3$. Aby mohlo být

$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} < 1$, musí být splněno $c > 6$, tj. $c \geq 7$. Odtud

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{7} = \frac{41}{42}.$$

(ii) Je-li $a = 2$ a $b \geq 4$, pak aby byl splněn předpoklad implikace, musí platit $c \geq 5$. To znamená, že

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{19}{20} < \frac{41}{42}.$$

(iii) Konečně, je-li $a \geq 3$ a $b \geq 3$, předpokladu dokazované implikace vyhovuje $c \geq 4$. Z toho vyplývá

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{11}{12} < \frac{41}{42}.$$

Prošli jsme všechny možnosti a, b, c vyhovující zadání a pokaždé platilo $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq \frac{41}{42}$, což jsme potřebovali dokázat.

Poznámky:
Většina z vás úlohu vyřešila správně. Hodně často se ale opakoval mylný předpoklad, že pokud zvolíme nejprve nejmenší možné $a = 2$, poté nejmenší možné $b = 3$ a nakonec nejmenší možné $c = 7$, pak máme zajištěno, že součet převrácených hodnot a, b, c bude maximální. Pokud měl být součet menší než jedna, tak to náhodou vyšlo, ale obecně to platit nemusí. *(Petr Ryšavý)*

Úloha 6.

(111; 84; 3,81; 5,0)

Pro $x, y \in \langle 0, 1 \rangle$ dokažte

$$\frac{x}{1+y} + \frac{y}{1+x} \leq 1.$$

(Pepa Tkadlec)

První řešení:
Původní nerovnost jistě můžeme roznásobit, neboť jmenovatele jsou kladné, a dostaneme tak:

$$x^2 + y^2 + x + y \leq 1 + x + y + xy,$$
$$x^2 + y^2 \leq 1 + xy.$$

Nyní BÚNO můžeme předpokládat $x \leq y$, neboť je nerovnost symetrická v proměnných x, y. Upravenou nerovnost tak dostaneme jako součet dvou platných nerovností $y^2 \leq 1$ a $x \cdot x \leq x \cdot y$.

Druhé řešení, neroznásobovací, podle Le Anh Dunga:
Pro $x = y = 0$ nám nerovnost z dosazení platí. Pro ostatní x, y můžeme nahradit ve jmenovateli jedničku proměnou x nebo y, čímž nezvětšíme jmenovatele, a tedy ani nezmenšíme hodnotu celého zlomku:

$$\frac{x}{1+y} + \frac{y}{1+x} \leq \frac{x}{x+y} + \frac{y}{x+y} = \frac{x+y}{x+y} = 1$$

a nerovnost je tímto dokázána.

Poznámky:
Většina z vás správně úlohu vyřešila podle prvního způsobu. Za neošetření podmínky, kdy rozšiřujete výrazem, který se může rovnat nule, jsem se rozhodl v takto jednoduché úloze udělovat čtyři body. Imaginární body pak putovaly k řešitelům, kteří úlohu neroznásobovali, či se na ni dokonce dívali geometricky jako na elipsu v rovině. Asi šest řešitelů se snažilo úlohu derivovat, ale bohužel všichni udělali chyby buď v samotných derivacích, nebo později v úpravách, a tak ke správnému řešení nikdy nedošli. Ostatní se většinou snažili říct, že levá strana nabývá maxima pro $x = y = 1$, což jsem ovšem bez patřičného důkazu neuznával. *(Lukáš Zavřel)*

Úloha 7.

(58; 37; 3,24; 5,0)

Majklův pětiúhelník má délky stran a, b, c, d, e. Dokažte, že

$$\frac{a}{b+c+d+e}+\frac{b}{a+c+d+e}+\frac{c}{a+b+d+e}+\frac{d}{a+b+c+e}+\frac{e}{a+b+c+d}\leq 2.$$

(Pepa Tkadlec)

Řešení:

Označme $o = a+b+c+d+e$. V pětiúhelníku platí obdoba trojúhelníkové nerovnosti $a < b+c+d+e$, což si dále upravíme na $o < 2(b+c+d+e)$. Platí samozřejmě i cyklické záměny této nerovnosti, dokážeme tedy jmenovatele všech zlomků odhadnout $\frac{o}{2}$ a dostáváme

$$\frac{a}{b+c+d+e}+\frac{b}{a+c+d+e}+\frac{c}{a+b+d+e}+\frac{d}{a+b+c+e}+\frac{e}{a+b+c+d}<$$

$$<\frac{a}{\frac{o}{2}}+\frac{b}{\frac{o}{2}}+\frac{c}{\frac{o}{2}}+\frac{d}{\frac{o}{2}}+\frac{e}{\frac{o}{2}}=\frac{2(a+b+c+d+e)}{o}=2.$$

Poznámky:

Dost z vás přišlo na vzorové řešení. Nerovnost byla spíše slabá, rovnost ani nenastávala (pouze ve zvláštním degenerovaném případě), a tak fungovaly roztodivné odhady, ke slovu se dostal jak pan Cauchy, tak pan Karamana. Nakonec se ke kýženému výsledku dostalo mnoho z vás, někteří se pokoušeli proměnnými hýbat a to byla asi nejpracnější a nejnáročnější cesta, proto se jí prokousalo k cíli jen málo z vás. Nakonec bych chtěl připomenout, že ke správně dokázané nerovnosti by měl být ukázán i případ rovnosti, přišli byste pak na to, že naše nerovnost platila dokonce ostře. Nakonec jsem ale případ rovnosti v bodech nezohledňoval.

(Michael „Majkl“ Bílý)

Úloha 8.

(12; 10; 3,50; 4,5)

Kladná reálná čísla a, b, c splňují

$$(a+b-c)\cdot\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)=9.$$

Dokažte, že

$$\left(a^4+b^4+c^4\right)\cdot\left(\frac{1}{a^4}+\frac{1}{b^4}+\frac{1}{c^4}\right)\geq 38\,025.$$

(Michal „Kenny“ Rolínek)

Řešení (podle Dominika Teimla a Štěpána Šimsy):

Předpokládejme, že kladná čísla a, b, c splňují zadanou rovnost. Daný vztah nejprve roznásobíme, potom jeho pravou stranu odhadneme pomocí nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem čtyř kladných čísel a na závěr získanou nerovnost umocníme na čtvrtou:

$$(a+b-c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)=9,$$

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+2=4+4+\left(\frac{a}{c}+\frac{b}{c}\right)+\left(\frac{c}{a}+\frac{c}{b}\right)\overset{\mathrm{AG}}{\geq}4\sqrt[4]{4\cdot 4\cdot\left(\frac{a}{c}+\frac{b}{c}\right)\cdot\left(\frac{c}{a}+\frac{c}{b}\right)},$$

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+2\right)^4\geq 4^6\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+2\right)\Rightarrow\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+2\geq 4^2=16.$$

Z toho plyne, že $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 14$. Čísla na obou stranách této nerovnosti jsou kladná, a proto bude platit i po umocnění na druhou (uděláme to dvakrát):

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 14 \Rightarrow \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} \geq 14^2 - 2 = 194 \Rightarrow \frac{a^4}{b^4} + \frac{b^4}{a^4} \geq 194^2 - 2 = 37634. \qquad (\star)$$

Na závěr složíme všechny naše poznatky a použijeme navíc ještě jednou nerovnost mezi aritmetickým a geometrickým průměrem – tentokrát ovšem pouze pro dvě čísla:

$$(a^4 + b^4 + c^4)\left(\frac{1}{a^4} + \frac{1}{b^4} + \frac{1}{c^4}\right) = \overbrace{\frac{a^4}{b^4} + \frac{b^4}{a^4}}^{(\star)} + \overbrace{\frac{a^4}{c^4} + \frac{c^4}{b^4}}^{\text{AG}} + \overbrace{\frac{b^4}{c^4} + \frac{c^4}{a^4}}^{\text{AG}} + 3 \geq$$

$$\geq 37634 + 2\frac{a^2}{b^2} + 2\frac{b^2}{a^2} + 3 = 37637 + 2\left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2}\right) \overset{(\star)}{\geq} 37637 + 2 \cdot 194 = 38025,$$

což jsme chtěli dokázat.

Pokud všechny odhady přejdou v rovnost, tak nastane rovnost v celé nerovnosti. Speciálně musí tedy platit $a + b = 4c$ a zároveň $ab = c^2$. Řešením této soustavy jsou trojice $(a, b, c) = \big(c(2 \pm \sqrt{3}), c(2 \mp \sqrt{3}), c\big)$ a snadno ověříme, že potom skutečně pro každé kladné c nastává rovnost.

Poznámky:
Nejtěžší úlohu této série vyřešilo sedm řešitelů. Nerovnost se totiž dala dokázat poměrně přímočaře pomocí známých metod i bez použití velkých triků a v podstatě každá cesta vedla k cíli (i když většinou až po docela dlouhé době). Každé řešení postupovalo úplně jinak a některá si práci usnadnila zajímavým trikem, což jsem ocenil imaginárním bodem. Do autorského řešení jsem si jejich finty vypůjčil, takže se neděste, protože úloha byla řešitelná i bez nich.

(Filip Hlásek)