Konečno a nekonečno

3. podzimní série — Termín odeslání: 3. prosince 2012

Úloha 1. (3 body)
Po obdélníkovém stole lezou mravenci, přičemž každý začíná jinde. Pokud přijde na totéž místo současně více mravenců, otočí se všichni čelem vzad, jinak chodí rovně konstantní (navzájem stejnou) rychlostí. Když doleze mravenec na okraj stolu, spadne. Může se stát, že žádný mravenec nikdy nespadne?

Úloha 2. (3 body)
Kikina si vzala nějaké přirozené číslo[1] a jala se ho postupně měnit. V každém kroku své číslo vynásobila nějakým lichým číslem $k > 1$ (číslo k může být pro každý krok různé) a posléze vydělila číslem $k - 1$. Dokažte, že po konečně mnoha krocích nutně dostala číslo, které není přirozené.

Úloha 3. (3 body)
Mějme body kružnice obarveny dvěma barvami. Řekneme, že trojúhelník s vrcholy na kružnici je *nudný*, pokud je rovnoramenný s alespoň jedním vnitřním úhlem velikosti $36°$ a všechny jeho vrcholy mají stejnou barvu. Ukažte, že nudných trojúhelníků je nekonečně mnoho.

Úloha 4. (5 bodů)
Lze obarvit políčka nekonečné čtvercové sítě dvěma barvami (žlutě a modře) tak, aby v každém řádku bylo konečně mnoho žlutých políček a v každém sloupci konečně mnoho modrých?

Úloha 5. (5 bodů)
Je dána konečná množina[2] M reálných čísel taková, že pro každá tři různá čísla a, b, c z M platí, že alespoň jedno z čísel $a+b$, $b+c$, $c+a$ leží v M. Dokažte, že M nemůže obsahovat více než 7 prvků a uveďte příklad vyhovující sedmiprvkové množiny.

Úloha 6. (5 bodů)
Ve světě PraSátek je konečné množství konečných posloupností cifer zakázaných. Víme však, že existuje nekonečná posloupnost cifer, jejíž žádný úsek zakázaný není. Dokažte, že existuje i nekonečná periodická posloupnost cifer bez zakázaného úseku.

Úloha 7. (5 bodů)
Mirek si koupil polynom stupně ostře většího než 1, který má všechny koeficienty celočíselné. Aby ho důkladně prozkoumal, napsal si na papír všechny jeho funkční hodnoty v celých číslech. Papíru si však všimla Kája a protože chtěla mít něco úplně jiného, rozhodla se najít polynom stupně jedna s celočíselnými kofecienty takový, že žádná z jeho funkčních hodnot v celých číslech nebude napsána na Mirkově papíru. Dokažte, že se jí to podaří bez ohledu na to, jaký polynom si Mirek koupil.

[1] Nulu za přirozené číslo nepovažujeme.
[2] V množině se prvky nemohou opakovat.

Úloha 8. (5 bodů)

O konečné neprázdné množině uzavřených intervalů[3] řekneme, že je *zajímavá*, pokud splňuje následující podmínky:

(i) dolní meze jsou navzájem různá přirozená čísla,
(ii) buď jsou všechny navzájem disjunktní[4], nebo je průnik všech nedegenerovaný[5] interval,
(iii) počet intervalů v množině je ostře větší než nejmenší z dolních mezí těchto intervalů.

Pepa měl zajímavou množinu intervalů, jenže přišel hurikán a každému intervalu v množině změnil horní mez. Naštěstí mohl Pepa některé intervaly zahodit tak, že mu zase zbyla zajímavá množina. Dokažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ může Pepa najít zajímavou množinu intervalů, se kterou takto určitě vydrží alespoň n hurikánů.

[3] Meze uzavřených intervalů jsou vždy reálná čísla.

[4] Dvě množiny nazveme *disjunktní*, pokud nemají žádný společný prvek. Speciálně uzavřené intervaly se nesmí ani dotýkat.

[5] Uzavřený interval nazveme *degenerovaný*, pokud obsahuje jen jeden bod, neboli pokud se jeho horní a dolní mez rovnají.

Povídání ke třetí podzimní sérii

Nekonečno je pojem, který mnohý laik používá, ale málokterý chápe jeho podstatu a dokáže s ním správně pracovat. Nicméně při správném použití nekonečna se leckteré pojmy a důkazy zjednoduší, ba co víc, některá tvrzení bez použití nekonečna ani není možné dokázat.

Nekonečno je negace pojmu konečno. Konečné je to, jehož velikost (počet) se dá vyjádřit číslem[6].

Nekonečné tedy pak jsou takové množiny, jejichž velikost se přirozeným číslem (ani nulou) vyjádřit nedá. Taková situace nastává zpravidla z jediného důvodu, daná množina je na to příliš velká. Z takto zavedeného nekonečna plyne jeden podstatný fakt: **Nekonečno není číslo.** Nekonečno není něco, co bychom měli sčítat, odčítat, násobit nebo dělit[7].

Z vlastností konečna a nekonečna jmenujme například

(i) V každé konečné množině reálných čísel najdeme nejmenší a největší číslo. V nekonečné množině již ani jedno být nemusí, například v množině celých čísel nebo v otevřeném intervalu.

(ii) Podmnožina konečné množiny je konečná, tedy nadmnožina nekonečné množiny je nekonečná. Toto přesně říká, že „nekonečné množiny jsou ty velké“.

(iii) Když sjednotíme konečně mnoho konečných množin, dostaneme opět konečnou množinu. Obměnou tohoto tvrzení dostáváme takzvaný **nekonečný Dirichletův princip**: Když rozdělíme nekonečnou množinu na konečně mnoho částí, pak alespoň jedna část bude nekonečná.

Příklad. Máme nekonečnou prostou (neopakující se) posloupnost reálných čísel $\{a_n\}_1^\infty$. Dokažte, že z ní je možné vybrat nekonečnou monotónní[8] podposloupnost.

Řešení. (Takhle ne!!) Podle Erdös-Szekeresovy věty v posloupnosti dlouhé $n^2 + 1$ najdeme monotónní podposloupnost délky $n + 1$. Takto můžeme volit nekonečně velké n, podívat se na prvních $(n - 1)^2 + 1$ prvků a najít tak nekonečnou podposloupnost dlouhou n, což jsme chtěli dokázat.

Co je na tom řešení špatně? Erdös-Szekeresova věta opravdu říká, co se tam píše. Plyne z ní ovšem pouze to, že v posloupnosti a_n najdeme libovolně (ne nekonečně) dlouhou podposloupnost. Najdeme tam monotónní podposloupnost délky 20, nebo nějakou jinou dlouhou 1000000, třeba i dlouhou 10^{50}, ale nekonečno je stále „větší“, nenašli jsme žádnou nekonečně dlouhou monotónní podposloupnost.

[6] Zde myslíme číslo přirozené či reálné. Znalec teorie množin by totiž mohl namítnout, že velikosti nekonečných množin měří takzvaná kardinální čísla.

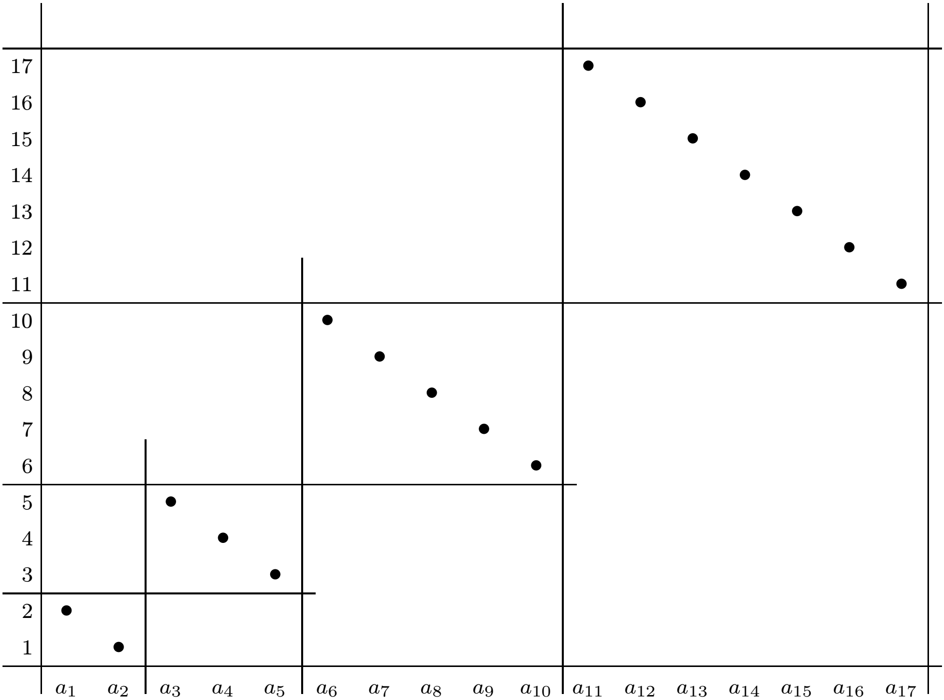
[7] Znalec matematické analýzy by mohl oponovat, že k reálným číslům můžeme přidat prvky $+\infty$ a $-\infty$, ale to je jiná teorie, kterou nebudeme potřebovat.

[8] Monotónní posloupnost je taková, která je celá rostoucí nebo celá klesající.

Podívejme se například na posloupnost definovanou takto: vezmeme rostoucí posloupnost, například $a_n = n$, a tu upravíme tak, že na úseku $(1, 2)$ a dále na všech (pro přirozená k) úsecích

$$\left(k^2 + 2, k^2 + 3, \ldots, (k+1)^2 + 1\right)$$

převrátíme pořadí. Začátek výsledné posloupnosti je znázorněn na obrázku.



V takové posloupnosti na prvních $(n-1)^2 + 1$ místech najdeme vždy klesající posloupnost délky n, rostoucí tam tak dlouhá není. Přesto v této posloupnosti nenajdeme žádnou nekonečně dlouhou klesající posloupnost, pouze rostoucí.

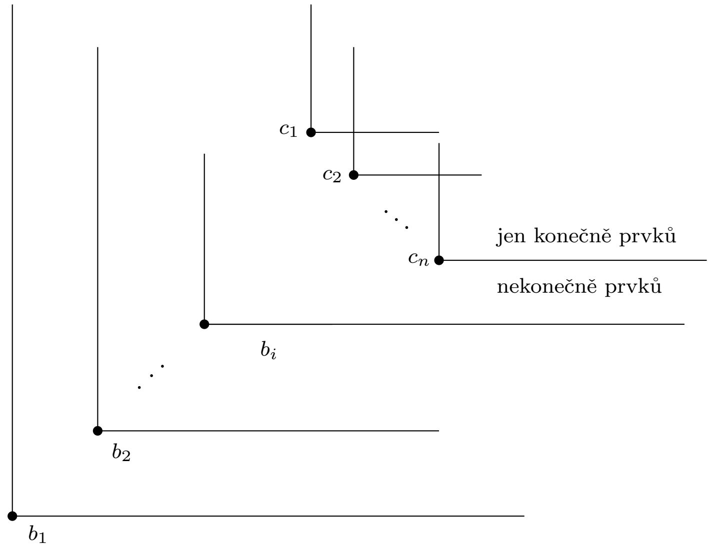
Tak jak že se ta úloha měla řešit? Úplně jinak:

Řešení. (Správně) Zvolíme si $b_1 = a_1$. Pro něj existuje v posloupnosti a nekonečně menších prvků nebo nekonečně větších. BÚNO tedy existuje nekonečně větších prvků. Dále se pokusíme vybrat rostoucí podposloupnost b takto:

Jako b_{i+1} zvolíme první další takový prvek posloupnosti a, který má nad sebou nekonečně mnoho prvků posloupnosti a a navíc je větší než b_i.

Pokud postup nikdy neselže, získali jsme rostoucí nekonečnou podposloupnost. Co by se muselo stát, aby postup selhal? Nenajdeme žádný prvek, který by splňoval podmínku pro b_{i+1}.

V posloupnosti a máme za b_i nekonečně mnoho prvků větších než b_i. Přesto žádný z nich už nad sebou nemá nekonečně mnoho prvků, tedy každý z nich má nad sebou pouze konečnou množinu prvků posloupnosti a.



Sestrojíme tedy nekonečnou klesající podposloupnost c_n. Volíme c_1 jako první prvek posloupnosti a za b_i větší než b_i a jako c_{n+1} volíme první další prvek z intervalu (b_i, c_n). Takový již bude určitě existovat, protože máme nekonečně mnoho prvků větších než b_i, ale jen konečně mnoho větších než c_n.

Konečno a nekonečno

3. podzimní série — Vzorové řešení

Úloha 1.

(90; 83; 2,76; 3,0)

Po obdélníkovém stole lezou mravenci, přičemž každý začíná jinde. Pokud přijde na totéž místo současně více mravenců, otočí se všichni čelem vzad, jinak chodí rovně konstantní (navzájem stejnou) rychlostí. Když doleze mravenec na okraj stolu, spadne. Může se stát, že žádný mravenec nikdy nespadne? *(Pepa Tkadlec)*

Řešení:

Áno, môže sa to stať. Na stole si napríklad môžeme predstaviť štvorec $ABCD$ a do stredu každej strany umiestnime mravca. Mravce na stranách AB a AD pošleme k vrcholu A a tie na stranách BC a CD pošleme k vrcholu C. Keďže všetky mravce chodia rovnakou rýchlosťou a začínajú v stredoch strán štvorca, po nejakom čase t sa stretnú dva vo vrchole A a dva vo vrchole C. Potom sa otočia a budú sa vracať po stranách, na ktorých začínali. Keď znova ubehne čas t, budú naspäť v stredoch strán štvorca, ale budú otočené naopak. Po ďalšom čase t sa mravce stretnú vo vrcholoch B a D. Keď ubehne od začiatku čas t štyrikrát, teda v čase $4t$, bude situácia úplne rovnaká ako na začiatku.

Analogicky to ide urobiť pre ľubovoľný $2n$-uholník. Nie je to však jediná možnosť, dá sa to aj oveľa zložitejšími a výrazne odlišnými spôsobmi.

Poznámky:

Drvivej väčšine z Vás sa to podarilo a veľmi ma potešili rôzne kreatívne obrazce, po ktorých sa mravce pohybovali. Obzvlášť sa mi páčili riešenia *Miroslava Stankoviča* a *Richarda Trembeckého*, ktorí uviedli návod, ako umiestniť na stole ľubovoľný počet mravcov väčší ako 5 tak, aby nespadli. *(Dáška Krasnayová)*

Úloha 2.

(93; 85; 2,77; 3,0)

Kikina si vzala nějaké přirozené číslo[9] *a jala se ho postupně měnit. V každém kroku své číslo vynásobila nějakým lichým číslem $k > 1$ (číslo k může být pro každý krok různé) a posléze vydělila číslem $k-1$. Dokažte, že po konečně mnoha krocích nutně dostala číslo, které není přirozené.* *(Pepa Tkadlec)*

Řešení:

Nech n je najväčšie prirodzené číslo také, že 2^n delí Kikino číslo. Pozrime sa na rozklad Kikinho čísla na prvočíselné delitele. Každé násobenie nepárnym číslom k nám dvojku do tohto rozkladu nepridá, naopak každé delenie párnym číslom $k-1$ nám aspoň jednu uberie. Čiže po $n+1$ krokoch bude určite mocnina pri dvojke záporná, teda už nedostaneme prirodzené číslo.

[9] Nulu za přirozené číslo nepovažujeme.

Poznámky:

Úloha bola ľahká a skoro všetci ste ju zvládli správne vyriešiť. Väčšina z vás si rozdelila úlohu na dve časti – či zadané Kikino číslo bolo párne alebo nepárne – a dokázala jednotlivé podčasti.

Strhával som 1–2 body za to, ak ste vo svojom riešení tvrdili niečo, čo nemuselo platiť, alebo ste niektorú časť nedostatočne dokázali. *(Viktor Szabados)*

Úloha 3.

(71; 53; 2,17; 3,0)

Mějme body kružnice obarveny dvěma barvami. Řekneme, že trojúhelník s vrcholy na kružnici je nudný, pokud je rovnoramenný s alespoň jedním vnitřním úhlem velikosti 36° a všechny jeho vrcholy mají stejnou barvu. Ukažte, že nudných trojúhelníků je nekonečně mnoho.

(Pepa Tkadlec)

Řešení:

Nejprve ukážeme, že v pravidelném pětiúhelníku najdeme vždy *nudný* trojúhelník. Vrcholy pětiúhelníku obarvujeme dvěma barvami, a tedy dle Dirichletova principu musí být alespoň tři jeho vrcholy stejné barvy. Tyto tři vrcholy tvoří trojúhelník, který může mít jako strany buď dvě úhlopříčky a jednu stranu, nebo dvě strany a jednu úhlopříčku pětiúhelníku. Pětiúhelník je pravidelný, a tedy má všechny strany a všechny úhlopříčky stejně dlouhé. To znamená, že v obou případech je námi uvažovaný trojúhelník rovnoramenný. Navíc v obou případech je alespoň jednou jeho stranou strana pětiúhelníka. Úhel proti této straně je obvodovým úhlem, kterému přísluší oblouk pětiny kružnice, a tedy má velikost 36°.

Pravidelných pětiúhelníků je na kružnici nekonečně mnoho, protože otočením jednoho pětiúhelníku okolo středu o libovolný úhel z intervalu $(0^\circ, 72^\circ)$ dostaneme vždy jiný pětiúhelník. V každém najdeme jiný *nudný* trojúhelník, takže i těch je nekonečně mnoho.

Poznámky:

Většina řešitelů si s touto úlohou poradila, někteří se jen snažili otáčet pětiúhelník o 360°, aniž by si uvědomili, že takto každý z pětiúhelníků započítají pětkrát. Někteří dokonce jen prohlásili bez zdůvodnění, že pravidelných pětiúhelníků je nekonečně mnoho, což je na hranici strhnutí bodu.

Ve špatných řešeních se nejčastěji objevovalo tvrzení, že pokud je na kružnici od nějaké barvy nekonečně mnoho bodů, bude tam i nekonečně mnoho *nudných* trojúhelníků této barvy. Lze si snadno rozmyslet, že toto neplatí. *(Martin Töpfer)*

Úloha 4.

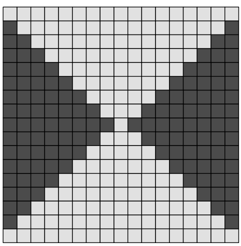
(80; 28; 1,90; 1,0)

Lze obarvit políčka nekonečné čtvercové sítě dvěma barvami (žlutě a modře) tak, aby v každém řádku bylo konečně mnoho žlutých políček a v každém sloupci konečně mnoho modrých?

(Pepa Tkadlec)

Řešení:

Nasledujúci obrázok ukazuje jedno z možných ofarbení nekonečnej štvrcovej siete, ktoré spĺňa obe podmienky zadania (sieť pokračuje podobným spôsobom až do nekonečna, svetlejšia farba predstavuje žlté políčka, tmavšia modré).



Pozrime sa na žlté políčka v jednotlivých riadkoch: prostredný riadok obsahuje jediné také políčko, v každom riadku nad ním (prípadne pod ním) pribudnú ďalšie dve žlté políčka, stále ich ale bude konečne veľa. Podobne to platí aj pre modré políčka v stĺpcoch: v strede sú všetky políčka žlté a susedné stĺpce obsahujú po jednom modrom políčku. Opäť pri posune doprava (alebo doľava) pridáme práve dve nové políčka modrej farby, čím sa konečnosť tohto počtu nezmení.

POZNÁMKY:
K tejto úlohe prišlo pomerne veľa riešení, z nich ale len 27 naozaj obsahovalo nejaké správne ofarbenie – za to ste väčšinou dostali plný počet bodov. V 43 prípadoch ste sa ale snažili dokázať nedokázateľné – že takéto ofarbenie neexistuje. V tom prípade ste mohli dostať maximálne 1 bod a to podľa toho, ako závažných alebo netriviálnych chýb ste sa dopustili. Asi najčastejšia chyba, ktorá sa vyskytla hneď v niekoľkých variantách, bola založená na predstave, že maximum z nekonečnej množiny konečných čísel je tiež konečné číslo. Najjednoduchší protipríklad je samotná množina prirodzených čísel, kde žiadne konečné maximum nenájdeme.

Imaginárne body som sa rozhodol udeliť *Adamovi Láfovi* a *Martinovi Sýkorovi*, ktorí ako jediní spomenuli, že možných ofarbení existuje viac – dokonca až nekonečne veľa.

(Peter „πtr“ Korcsok)

Úloha 5.

(71; 62; 3,85; 5,0)

Je dána konečná množina[10] *M reálných čísel taková, že pro každá tři různá čísla a, b, c z M platí, že alespoň jedno z čísel $a+b$, $b+c$, $c+a$ leží v M. Dokažte, že M nemůže obsahovat více než 7 prvků a uveďte příklad vyhovující sedmiprvkové množiny.* (Pepa Tkadlec)

ŘEŠENÍ:
Pro spor předpokládejme, že existuje množina s alespoň osmi prvky, která vyhovuje zadaným podmínkám. Pak musí obsahovat alespoň čtyři nenulové prvky stejného znaménka. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že jsou tyto prvky kladné. Označme čtyři největší prvky $0 < a < b < c < d$. Vezměme trojici a, c, d. Zjevně $a + d > d$ i $c + d > d$, proto tato čísla do množiny nepatří. (Byla by větší než nejvyšší prvek.) Proto nutně $a + c = d$. Když vezmeme trojici b, c, d, obdobnými argumenty dokážeme, že musí platit $b + c = d$. Z toho by ale plynulo $a = b$, což nelze. Došli jsme tedy ke sporu, množina může obsahovat nejvýše sedm prvků.

Možné příklady vyhovujících sedmiprvkových množin:

$$\{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3\}$$
$$\{-13\pi; -7\pi; -6\pi; 0; 6\pi; 7\pi; 13\pi\}$$
$$\{-4; -3; -1; 0; 1; 2; 3\}$$

První z těchto množin vyhovuje zjevně; pokud vybereme trojici obsahující jak -3, tak i 3, je jejich součet v množině obsažen očividně. V opačném případě vybereme alespoň dvě čísla z intervalu $\langle -2; 2\rangle$. Nejvyšší možný součet dvou různých čísel z tohoto intervalu je $+3$, nejmenší -3. Všechna čísla, která dostaneme součtem dvou čísel z tohoto intervalu, proto leží mezi -3 a 3, tedy v naší množině.

POZNÁMKY:
Správných řešení bylo požehnaně a žádné z nich se výrazně neodlišovalo od vzorového. Chybných úvah bylo v zásadě také jen několik málo. Jedno z nejčastějších tvrzení bylo, že sedmiprvková množina musí být nutně tvaru

$$\{-(a+b); -b; -a; 0; a; b; (a+b)\}\,.$$

[10] V množině se prvky nemohou opakovat.

Toto prohlašovali i někteří z řešitelů, kteří měli jinak řešení zcela správně a o tuto chybnou úvahu se nijak neopírali – těm jsem body nestrhával. Další častou chybou bylo, že řešitel nějak dokázal nemožnost existence osmiprvkové množiny, ale nezobecnil tento fakt pro libovolnou velikost množiny. A vůbec nejčastější chybný argument byl, že množina musí vzniknout postupným vkládáním prvků do množiny, která už vlastnosti splňuje. I kdyby to byla pravda, bylo by potřeba toto tvrzení dokázat, což nikdo neudělal. Jenže množina $\{-3; 2; 3\}$ zjevně zadání nevyhovuje, zatímco když do ní přidáme 0 nebo -1, už podmínky splní. Proto nestačilo prohlásit, že sedmiprvková množina se přidáním osmého prvku nutně "zkazí" – bylo třeba postupovat tak, jak uvádí vzorové řešení. *(Kuba Krásenský)*

Úloha 6.

(38; 23; 2,87; 3,0)

Ve světě PraSátek je konečné množství konečných posloupností cifer zakázaných. Víme však, že existuje nekonečná posloupnost cifer, jejíž žádný úsek zakázaný není. Dokažte, že existuje i nekonečná periodická posloupnost cifer bez zakázaného úseku. *(Mirek Olšák)*

Řešení:

Označme si nekonečnou posloupnost ze zadání M. Najdeme číslo n tak, aby všechny zakázané posloupnosti měly délku menší než n. To můžeme, protože je zakázaných posloupností jen konečně mnoho. Posloupnost M si rozdělíme na n-tice cifer. Různých n-tic je 10^n, tedy v prvních $10^n + 1$ n-ticích se z Dirichletova principu musí vyskytovat nějaké dvě stejné. Ty si označíme x a posloupnost mezi nimi y. Dokažme nyní, že periodická posloupnost $P = xyxyxy\ldots$ neobsahuje žádnou zakázanou posloupnost. Všechny podposloupnosti P, které jsou dlouhé nejvíce n, se vyskytují v xy nebo yx, a tedy i v původní posloponosti M. Ta ale neobsahuje žádné zakázané posloupnosti, čímž je důkaz hotov.

Poznámky:

Přibližně polovina řešitelů vyřešila úlohu na plný počet bodů. Nejčastější špatné úvahy byly, že periodických posloupností je nekonečně mnoho, ale zakázaných je jen konečně, tedy musí existovat jedna periodická, která vyhovuje zadání. To ale není pravda a tyto úvahy nevedly ke správnému řešení. *(Tomáš „Šavlík" Pavlík)*

Úloha 7.

(22; 11; 2,50; 2,0)

Mirek si koupil polynom stupně ostře většího než 1, který má všechny koeficienty celočíselné. Aby ho důkladně prozkoumal, napsal si na papír všechny jeho funkční hodnoty v celých číslech. Papíru si však všimla Kája a protože chtěla mít něco úplně jiného, rozhodla se najít polynom stupně jedna s celočíselnými kofecienty takový, že žádná z jeho funkčních hodnot v celých číslech nebude napsána na Mirkově papíru. Dokažte, že se jí to podaří bez ohledu na to, jaký polynom si Mirek koupil. *(Mirek Olšák)*

Řešení:

Kája si vybírá polynom tvaru $ax + b$, $a, b \in \mathbb{Z}$. Jeho hodnoty pro $x \in \mathbb{Z}$ jsou právě ta čísla, která mají po dělení a stejný zbytek jako b. Pokud se nám tedy podaří najít a takové, že Mirkův polynom některého zbytku po dělení a vůbec nenabývá, zvolíme jako b takový zbytek a splníme zadání.

Označíme Mirkův polynom P. Pro dané a dává $P(x)$ stejný zbytek po dělení a jako $P(x+a)$. To plyne z toho, že x^n dává stejný zbytek jako $(x + a)^n$ pro libovolné přirozené n.

Zbytky polynomu P po dělení a jsou tak periodické s periodou a, takže stačí sledovat, jaké zbytky dává $P(0), P(1), \ldots, P(a - 1)$. Jak možných zbytků, tak dosazovaných hodnot je právě a, takže jakmile bude některého zbytku nabyto vícekrát, jiný zbytek bude chybět a Kája může sestavit svůj polynom.

K vyřešení úlohy tedy stačí najít a takové, pro které bude polynom dávat stejný zbytek po dělení a v některých dvou bodech s různými zbytky po dělení a. Ukážeme dva způsoby, jak jej najít.

Podle většiny:
Zařídíme, aby polynom dával stejné zbytky v některých dvou po sobě jdoucích číslech $x, x+1$. To uděláme tak, že zvolíme $a = |P(x+1) - P(x)|$.

K tomu, aby dvě po sobě jdoucí čísla dávala různý zbytek po dělení a, stačí $a \geq 2$. Hledáme tedy x, pro které $|P(x+1) - P(x)| \geq 2$. To nalezneme snadno, protože polynom $P(x)$ má stupeň větší než 1, a tedy polynom $P(x+1) - P(x)$ (který má stupeň o jedna menší) je nekonstantní.

Podle Martina Raszyka:
Označme Q takový polynom, že $P(x) = xQ(x) + P(0)$. Najdeme takovou hodnotu a, aby polynom nabýval v bodě 0 stejného zbytku jako v nějakém dalším bodě x. K tomu zvolíme $a = |xQ(x)|$. Aby platilo, že 0 a x dávají různé zbytky po dělení a, stačí, aby platilo $a = |xQ(x)| > |x|$, neboli $|Q(x)| > 1$.

Takové x můžeme stejně jako v předchozím postupu zvolit, protože polynom Q má stupeň o jedna menší než P.

Poznámky:
Řešení se dělila na správná a na ta, která řešila jinou úlohu. Ta jsem bohužel nemohl odměnit žádným bodem, protože většinou úloha, kterou řešila, byla velice jednoduchá a zadání bylo opravdu jednoznačné. Ti, kteří úlohu pochopili, už ji pak i vyřešili, protože nebyla tak těžká. Většina argumentovala přítomnost dvou stejných zbytků porovnáváním hodnot v $x+1$ a x, až na Martina, podle kterého je druhé řešení. *(Michael „Majkl“ Bílý)*

Úloha 8. (8; 2; 1,00; 0,0)

O konečné neprázdné množině uzavřených intervalů[11] *řekneme, že je zajímavá, pokud splňuje následující podmínky:*

(i) *dolní meze jsou navzájem různá přirozená čísla,*
(ii) *buď jsou všechny navzájem disjunktní*[12]*, nebo je průnik všech nedegenerovaný*[13] *interval,*
(iii) *počet intervalů v množině je ostře větší než nejmenší z dolních mezí těchto intervalů.*

Pepa měl zajímavou množinu intervalů, jenže přišel hurikán a každému intervalu v množině změnil horní mez. Naštěstí mohl Pepa některé intervaly zahodit tak, že mu zase zbyla zajímavá množina. Dokažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ může Pepa najít zajímavou množinu intervalů, se kterou takto určitě vydrží alespoň n hurikánů. *(Mirek Olšák)*

Řešení:

Část 1 – pořádek v úloze

Nejprve učiníme několik jednoduchých pozorování.

Pozorování 1. *To, zda Pepa s danou zajímavou množinou intervalů vydrží n hurikánů, či nikoli, závisí pouze na množině jejich spodních mezí. První hurikán totiž může horní meze nastavit jakkoli*[14]*.*

[11] Meze uzavřených intervalů jsou vždy reálná čísla.

[12] Dvě množiny nazveme *disjunktní*, pokud nemají žádný společný prvek. Speciálně uzavřené intervaly se nesmí ani dotýkat.

[13] Uzavřený interval nazveme *degenerovaný*, pokud obsahuje jen jeden bod, neboli pokud se jeho horní a dolní mez rovnají.

[14] V zadání sice píšeme, že hurikán každou horní mez *změní*, ale budeme to chápat tak, že ji změnit nemusí. Dokazujeme takto vlastně trochu silnější tvrzení.

Budeme tedy říkat, že množina přirozených čísel (dolních mezí) je zajímavá a že s ní Pepa vydrží n hurikánů, pokud je možné těmto dolním mezím nastavit horní meze tak, aby vznikla zajímavá množina intervalů, se kterou Pepa vydrží n hurikánů.

Pozorování 2. *Množina přirozených čísel je zajímavá, pokud má více prvků, než je její nejmenší prvek. Intervaly stačí volit například dlouhé* 1/2 *a podmínky (i), (ii), (iii) budou splněny.*

Pozorování 3. *Nechť A je k-prvková zajímavá množina, se kterou Pepa vydrží n hurikánů, a B je taková k-prvková, že i-tý prvek množiny B je vždy menší nebo roven i-tému prvku množiny A. Pak i množina B je zajímavá a Pepa s ní vydrží n hurikánů.*

Důkaz. Množina B je zajímavá, protože její nejmenší prvek je menší nebo roven nejmenšímu prvku A, a ten je menší než k. Dále kdykoli hurikán nastaví množině B horní meze, může si Pepa představit horní meze i u množiny A nastavené ve stejném pořadí vzhledem k ostatním dolním a horním mezím. Ví, které prvky množiny A vyházet, aby hurikány přečkal, tak odpovídající prvky vyhází i z množiny B. Tím zajistí podmínku (ii), a navíc se dostane opět do stejné situace jako na začátku, s tím, že se zbývající množinou A přečká $n-1$ hurikánů. A takto postupuje celou dobu.

Část 2 – hrr na ni!

Dokážeme-li následující tvrzení, bude úloha vyřešena.

Tvrzení. *Kdykoli máme nekonečnou (ale jakkoli „řídkou“) množinu přirozených čísel X, může si Pepa vzít několik (konečně mnoho) prvních čísel z X (množině těchto čísel budeme říkat začátek) a vydržet s nimi n hurikánů.*

Důkaz. Indukcí podle n.

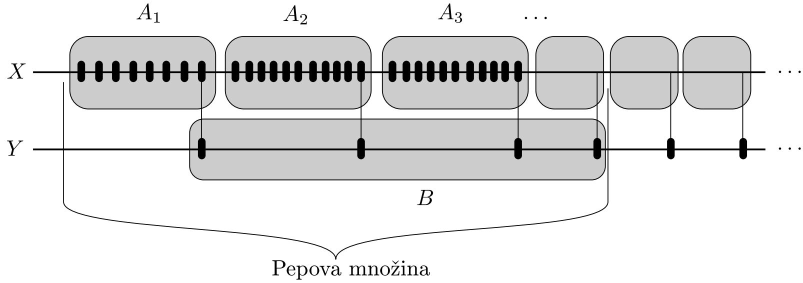
(I) Je-li $n = 0$, hledáme jen začátek množiny X, který je zajímavý, tedy má více prvků, než je jeho nejmenší prvek. K tomu stačí vzít z množiny X první prvek, označíme jej x, a dále x dalších prvků.

(II) Předpokládáme, že tvrzení platí pro $n-1$ hurikánů (přitom pro všechny nekonečné množiny X), dokážeme jej pro n hurikánů.

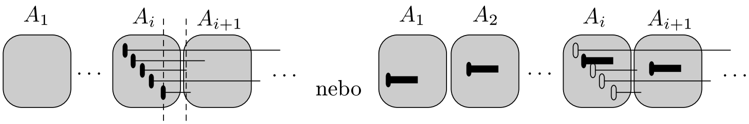
Vezmeme z X začátek A_1, se kterým Pepa vydrží $n-1$ hurikánů. Z X odebereme A_1 a zbyde nám stále nekonečná množina.

Tento postup opakujeme, ze zbytku X vezmeme začátek A_2, se kterým Pepa rovněž vydrží $n-1$ hurikánů, odebereme jej z X, vezmeme začátek A_3, ... Takto rozložíme původní X na nekonečně mnoho konečných kusů. Nekonečnou množinu všech posledních prvků jednotlivých A_i označíme Y.

Nakonec opět použijeme indukční předpoklad, tentokrát na množinu Y. Z té vybereme začátek B. Pepův začátek, se kterým vydrží n hurikánů, budou všechny prvky X až po poslední prvek B.



Ukážeme, že ať první hurikán nastaví horní meze jakkoli, bude si Pepa moci ponechat buď celé některé A_i, nebo z každého A_i (pro $i \leq |B|$) jeden prvek. V prvním případě víme z definice, že s danou množinou vydrží zbývajících $n-1$ hurikánů. V druhém případě Pepa s danou množinou vydrží $n-1$ hurikánů podle pozorování 3, jelikož nad prvky této množiny jsou prvky množiny B.



A proč nastane jedna z těchto situací? První nastane tehdy, pokud v některém A_i všechny horní meze převyšují největší prvek tohoto A_i. Průnik všech těchto intervalů pak je nedegenerovaný interval.

V opačném případě je v každém A_i nějaký interval, jehož horní mez nepřevyšuje nejvyšší prvek tohoto A_i. Tento interval tedy nezasahuje do ostatních A_i. Když Pepa vezme z každého A_i jeden takový interval, získá zajímavou množinu disjunktních intervalů.

Poznámky:

Tato úloha má jednu pozoruhodnou vlastnost. V zadání se nevyskytuje pojem nekonečna, přesto bez jeho použití není možné úlohu pokořit[15]. Je to tím, že velikost množiny, kterou Pepa potřebuje pro přečkání n hurikánů, je enormně velká (i Ackermannova funkce proti tomu roste děsně pomalu).

Snad dlouhé zadání, snad nesnadná uchopitelnost úlohy způsobily, že došlo pouze 8 řešení, z toho jediné správné. Jeho autor své informatické sklony nezapře. :) Přišel na to, že chce indukcí dokázat tvrzení ze vzorového řešení, ale namísto přímočarého používání indukčního předpokladu se rozhodl sestavit rekurzivní algoritmus.

Zbylá došlá řešení se snažila obhájit, že „dostatečně velká množina přece musí stačit", případně sestavit vzorec, jak velká by tato množina měla být. Problém prvního přístupu byl, že nedokazoval úlohu v plné obecnosti, ale jen jakousi variantu uvažující jeden hurikán. Pro více hurikánů už to mělo „být totéž", což vůbec není jasné. A jednoduchý vzorec, o který se někteří řešitelé snažili, (jak je uvedeno výše) prostě nemohl fungovat. *(Mirek Olšák)*

[15] Přesněji řečeno není možné tuto úlohu dokázat v Peanově aritmetice.