

# Celá čísla

1. JARNÍ SÉRIE

TERMÍN ODESLÁNÍ: 11. ÚNORA 2013

ÚLOHA 1. (3 BODY)  
Nalezněte všechna celá čísla  $x$  taková, že  $2^x(4-x) = 2x+4$ , a ukažte, že žádná jiná už nejsou.

ÚLOHA 2. (3 BODY)  
Dokažte, že pokud  $a, b, c$  jsou celá čísla, potom číslo  $(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$  je dělitelné třemi.

ÚLOHA 3. (3 BODY)  
Mějme sedm celých čísel takových, že součet libovolných šesti z nich je dělitelný pěti. Dokažte, že potom každé z čísel musí být dělitelné pěti.

ÚLOHA 4. (5 BODŮ)  
Rovina je dlážděna pravidelnými šestiúhelníky o straně 1. Dokažte, že vzdálenosti mezi každými dvěma body, v nichž se stýkají tři dlaždice, jsou po umocnění na druhou vždy celá čísla.

ÚLOHA 5. (5 BODŮ)  
Řekneme, že nezáporné celé číslo  $n$  je *vtipné*, pokud každé z čísel  $n, n+1, n+2$  a  $n+3$  je dělitelné svým ciferným součtem (například číslo 60398 je *vtipné*). Ukažte, že pokud poslední cifra nějakého *vtipného* čísla je osm, pak jeho předposlední cifra musí být devět.

ÚLOHA 6. (5 BODŮ)  
Na tabuli je napsáno přesně dvacet pět celých čísel, každé v absolutní hodnotě menší než milion. Dokažte, že ať jsou čísla jakákoliv, můžeme jich určitě několik smazat (klidně žádné, ale ne všechna) a popřípadě některým zbylým změnit znaménko tak, aby byl jejich součet nakonec roven nule.

ÚLOHA 7. (5 BODŮ)  
Ve výtahu je displej ukazující číslo patra, tři tlačítka a jedna páčka, která může být nastavena buď nahoru, nebo dolů. Dále tam visí návod k použití:

- (i) Přepne-li cestující páčku dolů, tak výtah sjede o patro níže.
- (ii) Přepne-li cestující páčku nahoru, tak výtah vyjede o patro výše.
- (iii) Po stisknutí červeného tlačítka dojde výtah do patra s trojnásobným číslem.
- (iv) Je-li číslo na displeji dělitelné třemi, stisknutí modrého tlačítka způsobí, že výtah přejede do patra se třetinovým číslem (v opačném případě se nic nestane).
- (v) Je-li číslo na displeji dělitelné pěti, stisknutí zeleného tlačítka způsobí, že výtah předeje do patra s pětinnovým číslem (v opačném případě se nic nestane).
- (vi) V nultém patře je páčka nastavena vždy dolů.

Dokažte, že když přijde cestující v nultém patře k výtahu a chce se dostat do jakéhokoliv kladného celočíselného patra, vždy se mu to podaří bez toho, aby použil schodiště.

ÚLOHA 8.

(5 BODŮ)

Filip si vzal dlouhatánský papír a začal na něj postupně (zleva doprava) psát nenulové cifry, přičemž po zapsání každé cifry se podíval, zda je číslo tvořené doposud napsanými ciframi druhou mocninou nějakého celého čísla. Poté, co napsal miliontou cifru, toho ale znechuceně nechal. Dokažte, že za tu dobu viděl druhých mocnin méně než sto.

# Celá čísla

1. JARNÍ SÉRIE

VZOROVÉ ŘEŠENÍ

## Úloha 1.

(72; 70; 2,85; 3,0)

Nalezněte všechna celá čísla  $x$  taková, že  $2^x(4-x) = 2x+4$ , a ukažte, že žádná jiná už nejsou.  
(Alča Skálová)

ŘEŠENÍ:

Předpokládejme, že  $x$  je větší než tři. Pak je levá strana rovnice nekladná, zatímco pravá je kladná. Tedy rovnost nemůže nastat a takové řešení neexistuje.

Podobně předpokládejme, že  $x$  je menší než minus jedna. Levá strana je kladná, ale pravá nekladná. Proto rovnost ani v tomto případě nemůže nastat.

Zbývají jen hodnoty  $-1, 0, 1, 2, 3$ , které snadno dosadíme do zadání. Rovnici vyhovují  $x = 0$ ,  $x = 1$  a  $x = 2$ , což jsou všechna řešení úlohy.

POZNÁMKY:

Největší problémy při řešení úlohy působila nula. Nejen, že se nulou nedá dělit, ale navíc  $2^0$  bohužel není nula!  
(Míša Hubatová)

## Úloha 2.

(78; 78; 2,97; 3,0)

Dokažte, že pokud  $a, b, c$  jsou celá čísla, potom číslo  $(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$  je dělitelné třemi.  
(Pepa Tkadlec)

ŘEŠENÍ:

Ak by nejaké dve z čísel  $a, b, c$  dávali rovnaký zvyšok po delení tromi (BUNV<sup>1</sup>  $a$  a  $b$ ), potom trojka delí  $a-b$ , takže delí aj celý náš výraz. V opačnom prípade dávajú čísla v nejakom poradí zvyšky 0, 1, 2 po delení tromi. Potom platí<sup>2</sup>  $a+b+c \equiv 0+1+2 \equiv 0 \pmod{3}$ , a preto trojka delí  $a+b+c$ . Výraz je tým pádom zakaždým deliteľný tromi.

POZNÁMKY:

Úloha bola ľahká a skoro všetci ste ju zvládli správne vyriešiť. Väčšina riešení bola podobná vzoráku. Zvyšné riešenia rozpisovali možnosti, v akom tvare môžu byť  $a, b, c$ , a následne ukázali, ktorá zo zátvoriek bude deliteľná tromi.  
(Viktor Szabados)

## Úloha 3.

(74; 71; 2,84; 3,0)

Mějme sedm celých čísel takových, že součet libovolných šesti z nich je dělitelný pěti. Dokažte, že potom každé z čísel musí být dělitelné pěti.  
(Pepa Tkadlec)

ŘEŠENÍ:

Označme si zadané čísla postupne  $a_1, \dots, a_7$ , ich súčet  $s$  a nech  $s_i = s - a_i$  pre  $i = 1, \dots, 7$ . Podľa zadania je súčet ľubovoľných šiestich čísel deliteľný piatimi, teda<sup>3</sup>  $5 \mid s_i$  pre každé  $i$ . Sčítaním

<sup>1</sup>Bez ujmy na všeobecnosti.

<sup>2</sup>Výrokom  $a \equiv b \pmod{c}$  rozumieme „ $a$  dáva po delení  $c$  rovnaký zvyšok ako  $b$ “.

<sup>3</sup>Zápisom  $a \mid b$  rozumieme „ $a$  delí  $b$ “.

dostávame

$$5 \mid s_1 + \dots + s_7 = 6s.$$

Nakolko 5 a 6 sú nesúdeliteľné, musí zároveň platiť aj  $5 \mid s$ . Pozrime sa teraz na ľubovoľné  $a_i$ :

$$5 \mid s - s_i = a_i,$$

teda  $a_i$  je tiež deliteľné piatimi. Toto môžeme urobiť pre všetky  $i$ , čím sme dokázali tvrdenie zo zadania.

POZNÁMKY:

Správne riešenia (čo boli takmer všetky) sa dajú rozdeliť na dve skupiny: jednu tvoria riešenia podobné vzoráku, v tej druhej ste najprv ukázali, že všetky čísla dávajú rovnaký zvyšok po delení piatimi, a následne ste ukázali, že jediný prípustný zvyšok je 0.

(Peter „ $\pi$ tr“ Korcsok)

#### Úloha 4.

(70; 63; 4,24; 5,0)

Rovina je dláždená pravidelnými šestiúhelníkmi o straně 1. Dokažte, že vzdálenosti medzi každými dvoma body, v nichž se stýkají tři dlaždice, jsou po umocnění na druhou vždy celá čísla.

(Alexander „Olin“ Slávik)

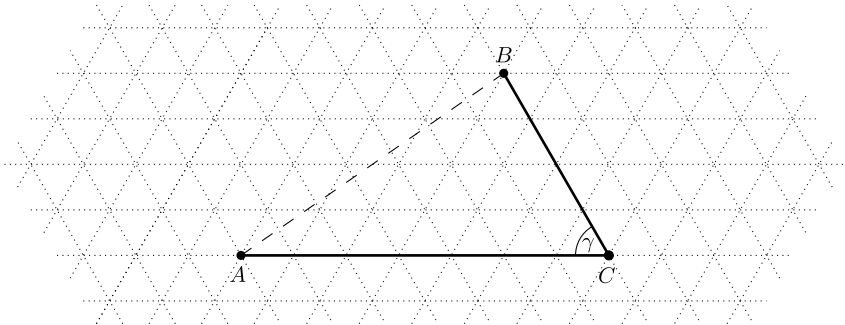
ŘEŠENÍ:

Ukážeme, že zadání platí dokonce pro mřížku tvořenou rovnostrannými trojúhelníky o straně délky 1. Tím bude úloha vyřešena – pravidelné šestiúhelníky se skládají z šesti takových trojúhelníků.

Zvolme libovolné dva vrcholy  $A, B$  trojúhelníkové mřížky. Je-li přímka  $AB$  totožná s některou přímkou trojúhelníkové mřížky, je tvrzení splněno triviálně ( $|AB|$  je součet několika stran jednotkových trojúhelníků). V opačném případě zvolme nějaký vrchol  $C$  mřížky, aby  $AC$  i  $BC$  byly přímky mřížky, ten snadno najdeme jako průsečík dvou různoběžných přímek mřížky vedených postupně body  $A, B$ . Nakonec označme  $\sphericalangle ACB$  jako  $\gamma$ . Poté můžeme podle kosinové věty psát

$$|AB|^2 = |AC|^2 + |BC|^2 - 2 \cos \gamma \cdot |AC| \cdot |BC|$$

Délky úseček  $AC, BC$  jsou celočíselné. Dále úhel  $\gamma$  je roven  $60^\circ$  nebo  $120^\circ$ , tedy jeho kosinus je roven  $\pm \frac{1}{2}$  a dvojnásobek kosinu pak celému číslu. Pravá strana je součet celých čísel, tedy číslo celé. Tvrzení je dokázáno.



ALTERNATIVNÍ VEKTOROVÉ ŘEŠENÍ (VOLNĚ PODLE MARTINA HORY A DAVIDA HRUŠKY):

Mějme dva libovolné body  $A, B$  v šestiúhelníkové síti. Zavedme si kartézskou soustavu souřadnic s počátkem v bodě  $A$  a osou  $x$  rovnoběžnou s libovolnou stranou šestiúhelníka z naší sítě. Poté

se v této síti umíme z počátku dostat do každého mřížového bodu jen za pomoci dvou vektorů  $\vec{u} = (1, 0)$ ,  $\vec{v} = (1/2, \sqrt{3}/2)$  a jejich celočíselných násobků.<sup>4</sup> Souřadnice druhého bodu tedy budou  $a \cdot \vec{u} + b \cdot \vec{v} = [a + b/2, b \cdot \sqrt{3}/2]$  a námi hledaná druhá mocnina vzdálenosti bude podle Pythagorovy věty  $(a + b/2)^2 + (b \cdot \sqrt{3}/2)^2 = a^2 + ab + b^2$ . Znovu tak dostáváme součet celých čísel, což je celé číslo.

POZNÁMKY:

Většina z vás nepřišla na žádné pěkné řešení, a tak více či méně úspěšně zaváděla kartézskou soustavu souřadnic a v ní pomocí Pythagorovy věty počítala vzdálenost libovolných dvou bodů. V takovém řešení ale jejich vzdálenost vycházela jako  $\sqrt{(a/2)^2 + (b \cdot \sqrt{3}/2)^2}$ . Vnitřek odmocniny je ale celé číslo pouze v případě, že mají  $a$  i  $b$  stejnou paritu, což drtivá většina z vás odbyla prostým „Což je vidět z obrázku“. Body jsem za to nestrhával, ale v olympiádě by na vás tak milí jistě nebyli. Proto připomínám, že důkaz obrázkem je sice hezký na pochopení toho, jak se úloha bude dokazovat, ale pokud úlohu sepisujete, je potřeba vše pořádně zdůvodnit.

(Lukáš Zavřel)

## Úloha 5.

(50; 48; 4,44; 5,0)

Řekneme, že nezáporné celé číslo  $n$  je *vtipné*, pokud každé z čísel  $n$ ,  $n + 1$ ,  $n + 2$  a  $n + 3$  je dělitelné svým ciferným součtem (například číslo 60398 je *vtipné*). Ukažte, že pokud poslední cifra nějakého *vtipného* čísla je osm, pak jeho předposlední cifra musí být devět.

(Pepa Tkadlec)

ŘEŠENÍ:

Pro spor předpokládejme, že existuje vtipné celé číslo  $n$ , které končí osmičkou a jeho předposlední číslice není devět. Označme  $s(n)$  ciferný součet tohoto čísla. Pak pro čísla  $n + 1$ ,  $n + 2$  a  $n + 3$  jsou jejich ciferné součty popořadě  $s(n + 1) = s(n) + 1$ ,  $s(n + 2) = s(n) - 7$  a  $s(n + 3) = s(n) - 6$ , protože předposlední číslo není devítka, a tedy nemůže docházet k přenosu jedničky při sčítání na řád stovek.

V prvočíselném rozkladu lichého čísla se neobjevuje dvojka, a tedy může být dělitelné jen lichým číslem. Jelikož  $n$  končí osmičkou, tak  $n + 1$  je liché. Dle zadání  $s(n + 1) \mid n + 1$ , a tedy i  $s(n + 1) = s(n) + 1$  je liché. Dále by mělo platit, že  $s(n + 3) \mid n + 3$ , což ovšem z parity není možné, jelikož  $s(n + 3) = s(n) - 6$  je sudé a  $n + 3$  je liché. Dostáváme spor, a tedy pokud vtipné číslo končí osmičkou, jeho předposlední číslice musí být devět.

POZNÁMKY:

Tentokrát se neobjevovala žádná netradiční řešení, někteří jen rozebírali několik možností navíc. Velmi mě zklamala struktura důkazů, kdy řešitelé ani nenapsali, že budou úlohu dokazovat sporem a mnohdy chyběl i závěr, co vlastně dokázali. Příště se prosím trochu více zamyslete, jestli má vaše řešení hlavu a patu. Například v matematické olympiádě by vám ledabyle sepsaný důkaz nemusel projít a je zbytečné ztrácet body za odfláknuté sepsání.

Také není špatné se zamyslet nad tím, co je úkolem dokázat. V této úloze se dokazovala jen implikace, pro kterou nebylo nutné vůbec ověřovat, zda nějaké vtipné číslo končí ciframi 9 a 8 existuje.

(Martin Töpfer)

<sup>4</sup>Takto se stejně jako v prvním řešení dostaneme do libovolného mřížového bodu trojúhelníkové sítě.

## Úloha 6.

(43; 36; 3,79; 5,0)

Na tabuli je napsáno přesně dvacet pět celých čísel, každé v absolutní hodnotě menší než milion. Dokažte, že ať jsou čísla jakákoliv, můžeme jich určitě několik smazat (klidně žádné, ale ne všechna) a popřípadě některým zbylým změnit znaménko tak, aby byl jejich součet nakonec roven nule.  
(Filip Hlásek)

ŘEŠENÍ:

Bez újmy na obecnosti budeme předpokládat, že čísla napsaná na tabuli jsou nezáporná<sup>5</sup>. Každá podmnožina<sup>6</sup> čísel napsaných na tabuli má nezáporný součet, který je menší než 25 milionů. Podmnožin je ale celkem

$$2^{25} = 33\,554\,432 > 25\,000\,000,$$

a proto podle Dirichletova principu<sup>7</sup> existují dvě různé podmnožiny čísel napsaných na tabuli, které mají stejný součet. Vezmeme-li tyto dvě podmnožiny a odebereme-li z nich prvky, které mají společné, dostaneme dvě disjunktní podmnožiny se stejným součtem. Na závěr číslům z jedné podmnožiny přiřadíme znaménko minus, číslům z druhé podmnožiny znaménko plus a ostatní čísla z tabule smažeme. Jelikož byly původní podmnožiny různé, zůstane na tabuli určité alespoň jedno číslo. Součet zbylých čísel bude roven nule.

POZNÁMKY:

Několik řešitelů zapomnělo zmínit, jak se vypořádají se zápornými čísly. Uvedené řešení bohužel nefunguje, pokud budeme uvažovat rozsah součtů od  $-25\,000\,000$  do  $25\,000\,000$ . Někdo také opomenul, že nalezené podmnožiny se stejným součtem mohou mít neprázdný průnik. Přestože se s tím dokážeme vypořádat poměrně snadno, je potřeba to v řešení uvést.

K úloze se dalo také přistupovat z úplně jiné strany. Označme protipříklad pro  $n$  prvků takovou množinu nezáporných celých čísel o  $n$  prvcích, že žádné její dvě podmnožiny nemají stejný součet. Dále velikostí protipříkladu nazveme největší číslo zkoumaného protipříkladu a nejmenší protipříklad pro  $n$  prvků takový protipříklad, který má nejmenší velikost ze všech protipříkladů pro  $n$  prvků. Úlohu potom můžeme přeformulovat: „Nejmenší protipříklad pro 25 prvků má velikost alespoň milion.“ Ukázkový protipříklad pro  $n$  prvků je množina čísel:  $1, 2, 4, 8, \dots, 2^{n-1}$ .

Někteří řešitelé se vydali touto cestou a tvrdili, že zmíněný protipříklad tvořený mocninami dvou je zároveň nejmenší. Pokud by to byla pravda, potom bychom měli vyhráno, neboť jeho velikost je mnohem větší než milion (dokonce už  $2^{20}$  je větší než milion). Na první pohled není jasné, proč by to nemohl být nejmenší protipříklad, ale již pro čtyři prvky lze najít protipříklad 3, 5, 6, 7, který je menší než 1, 2, 4, 8. Je poměrně náročné takové protipříklady hledat; ještě obtížnější je ukázat, že jsou skutečně nejmenší. Nedávno bylo dokázáno, že posloupnost popsaná na adrese <http://oeis.org/A005318> tvoří protipříklad. Stále neověřená hypotéza tvrdí, že je to dokonce protipříklad nejmenší. Ukázky jednotlivých protipříkladů naleznete zde: <http://oeis.org/A096858>. Pokud je hypotéza pravdivá, tak čísel omezených milionem stačí 22 (určitě ale nestačí méně, jak

<sup>5</sup>Všem číslům můžeme na začátku smazat znaménka. To sice formálně zadání neumožňuje, ale my si takovou úpravu pouze představíme. Na konci, až se rozhodneme, jaké znaménko číslu udělíme, znaménko buď změníme, nebo ponecháme.

<sup>6</sup>Přestože na tabuli může být napsáno více stejných čísel a přísně vzato by se již nejednalo o množinu (ale spíše o multimnožinu), my to v tomto řešení budeme pro jednoduchost opomíjet a pojmy terminologicky zaměňovat.

<sup>7</sup>Dirichletův princip (či též princip holubníku) je jednoduché pozorování, které říká, že umístíme-li do  $n$  přihrádek více než  $n$  objektů, tak najdeme přihrádku s aspoň dvěma objekty.

by plynulo z popsaného chybného řešení). Nejmenším protipříkladem pro 25 prvků by tedy bylo

4138400, 6216098, 7259196, 7780745, 8043681, 8176249, 8243093, 8276800, 8293796,  
8302294, 8306617, 8308817, 8309937, 8310507, 8310792, 8310940, 8311017, 8311057,  
8311077, 8311088, 8311094, 8311097, 8311099, 8311100, 8311101.

(Filip Hlásek)

## Úloha 7.

(25; 19; 3,36; 4,0)

Ve výtahu je displej ukazující číslo patra, tři tlačítka a jedna páčka, která může být nastavena buď nahoru, nebo dolů. Dále tam visí návod k použití:

- (i) Přepne-li cestující páčku dolů, tak výtah sjede o patro níže.
- (ii) Přepne-li cestující páčku nahoru, tak výtah vyjede o patro výše.
- (iii) Po stisknutí červeného tlačítka dojde výtah do patra s trojnásobným číslem.
- (iv) Je-li číslo na displeji dělitelné třemi, stisknutí modrého tlačítka způsobí, že výtah přejede do patra se třetinovým číslem (v opačném případě se nic nestane).
- (v) Je-li číslo na displeji dělitelné pěti, stisknutí zeleného tlačítka způsobí, že výtah předejde do patra s pětinnovým číslem (v opačném případě se nic nestane).
- (vi) V nultém patře je páčka nastavena vždy dolů.

Dokažte, že když přijde cestující v nultém patře k výtahu a chce se dostat do jakéhokoliv kladného celočíselného patra, vždy se mu to podaří bez toho, aby použil schodiště.

(Míša Hubatová)

ŘEŠENÍ:

Nejprve si všimneme, že tlačítka paritu patra, do kterého se dostaneme, nemění, zato páčka ano. Takže v sudých patrech bude páčka vždy dole a v lichých nahoře.

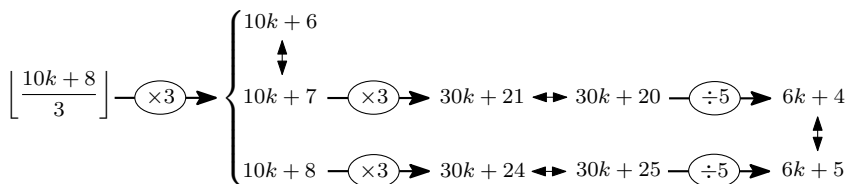
K důkazu použijeme matematickou indukci podle čísla patra. Nejprve si ukážeme, jak se dostaneme do pater 1–5.

- (i) Přepnutím páčky nahoru se dostaneme do prvního patra.
- (ii) Stiskem červeného tlačítka z prvního do třetího.
- (iii) Přepnutím páčky dolů z třetího do druhého.
- (iv) Stiskem červeného tlačítka z druhého do šestého, přepnutím páčky nahoru do sedmého, stiskem červeného tlačítka do dvacátého prvního, přepnutím páčky dolů do dvacátého, stiskem zeleného tlačítka do čtvrtého.
- (v) Přepnutím páčky nahoru ze čtvrtého do pátého.

Dále budeme předpokládat, že se umíme dostat do všech pater od prvního do  $(6k - 1)$ -tého. Chceme dokázat, že pak se umíme dostat i do  $6k$ -tého,  $(6k + 1)$ -tého,  $(6k + 2)$ -tého,  $(6k + 3)$ -tého,  $(6k + 4)$ -tého a  $(6k + 5)$ -tého.

Do  $6k$ -tého a  $(6k + 3)$ -tého se umíme dostat stiskem červeného tlačítka po řadě z  $2k$ -tého a  $(2k + 1)$ -tého patra. Do  $(6k + 1)$ -tého patra se dostaneme přepnutím páčky nahoru z  $6k$ -tého patra a do  $(6k + 2)$ -tého posunutím páčky dolů v  $(6k + 3)$ -tém patře.

Zbývají nám tedy patra  $6k + 4$  a  $6k + 5$ , mezi kterými se umíme pohybovat pomocí páčky. Stačí nám tedy dojet do jednoho z nich. To se nám podaří stiskem zeleného tlačítka v patře  $30k + 20$  nebo  $30k + 25$ , kam se dostaneme přepnutím páčky v patrech  $30k + 21$ ,  $30k + 24$ . Do posledních vypsanych se umíme dostat stiskem červeného tlačítka z pater  $10k + 7$  a  $10k + 8$ . Do  $(10k + 7)$ -tého patra se můžeme dostat přepnutím páčky v  $(10k + 6)$ -tém patře. Protože  $10k + 6$ ,  $10k + 7$ ,  $10k + 8$  jsou tři po sobě jdoucí čísla, je jedno z nich dělitelné třemi. Do patra s tímto číslem se umíme dostat pomocí červeného tlačítka, neboť  $\frac{10k+8}{3} \leq 6k$ .



POZNÁMKY:

Řešitelé měli k úloze různé přístupy. Někteří úlohu řešili pomocí zbytků po dělení třemi, další například sporem. Nejoriginálnější řešení měl *Radovan Švarc*, jenž si úlohu přeformuloval na dům s patry, které byly spojením pater  $2k$  a  $2k+1$  ze zadání. Tím se zbavil páčky, pak si spočetl, co dělají jednotlivá tlačítka v této nové budově, a úlohu dokázal pomocí této konstrukce.

(Anna Chejnovská)

### Úloha 8.

(8; 6; 3,63; 5,0)

Filip si vzal dlouhatánský papír a začal na něj postupně (zleva doprava) psát nenulové cifry, přičemž po zapsání každé cifry se podíval, zda je číslo tvořené doposud napsanými ciframi druhou mocninou nějakého celého čísla. Poté, co napsal miliontou cifru, toho ale znechuceně nechal. Dokažte, že za tu dobu viděl druhých mocnin méně než sto.

(Pepa Tkadlec)

ŘEŠENÍ (PODLE ANH DUNG „TONDY“ LE):

Pro spor předpokládejme, že Filip viděl alespoň 100 čtverců. Označme je  $a_1^2, a_2^2, \dots, a_{100}^2$  ve vzestupném pořadí.

Nejprve dokážeme, že  $a_{i+2}^2$  má oproti číslu  $a_i^2$  alespoň dvojnásobný počet cifer. Mezi čísly  $a_i^2, a_{i+1}^2, a_{i+2}^2$  musí být dvě čísla se stejnou paritou počtu cifer. Necht' to jsou  $a_k^2, a_l^2$ , kde  $a_k^2 < a_l^2$ .

Označme  $2n$  rozdíl počtu jejich cifer. Protože mají stejný začátek, existuje  $B < 10^{2n}$  takové, že

$$10^{2n} a_k^2 + B = a_l^2.$$

To upravíme na tvar

$$B = (a_l + 10^n a_k)(a_l - 10^n a_k).$$

Podle zadání se  $B$  skládá z nenulových číslic, a proto je kladné. Pravá závorka tak musí být také kladná, což dává

$$10^{2n} \geq B = (a_l + 10^n a_k)(a_l - 10^n a_k) \geq a_l + 10^n a_k > 10^n a_k.$$

Tuto nerovnost (vydělením  $10^n$  a umocněním) upravíme na  $10^{2n} > a_k^2$ , čili počet cifer čísla  $a_k^2$  je menší než  $2n$ . Proto má  $a_l^2$  oproti  $a_k^2$  alespoň dvojnásobný počet cifer. Jelikož jsou počty cifer neklesající, je pomocné tvrzení dokázáno.

Číslo  $a_1^2$  má alespoň jednu cifru, a tedy číslo  $a_3^2$  má alespoň 2. Pokračujeme-li dále, dostaneme, že číslo  $a_{99}^2$  má alespoň  $2^{49}$  cifer. Platí

$$2^{49} > (2^{10})^3 > 1000^3,$$

což je spor se zadáním, protože Filip napsal pouze 1000<sup>2</sup> číslic.

POZNÁMKY:

Úloha patřila mezi lehčí, a přesto jsme nejspíš některé řešitele vystrašili hrubostí odhadu, který se měl dokázat. Ti, co se odvážili, nakonec až na výjimky úlohu vyřešili. Matematicky nejelegantnější řešení měl podle mě *Anh Dung Le*, a tak jsem si jej od něj vypůjčil.

(Michael „Majkl“ Bílý)