Matematický korespondenční seminář

Milý příteli !

Rokové se opět sešli a třiatřicátý ročník semináře je u konce. Chtěli bychom proto poblahopřát letošnímu vítězi, kterým se stal *František Couf*. Sláva mu! V těsném závěsu za Františkem se umístili *Pavel Turek* a *Filip Bialas*. Ještě dodáme, že všichni tři medailisté jsou v prvním ročníku, což nemá v historii MKS obdoby.

Abychom nevyzdvihovali jen úspěchy mladé generace – zasloužilý řešitel *„Tonda“ Le Anh Dung* nashromáždil 1064 historických bodů, čímž překonal rok starý rekord *Pepy Svobody* (shoda jména s autorem tohoto úvodníku *není* čistě náhodná). I Tondovi tedy patří naše blahopřání.

Pokud jsi nebyl tak úspěšný jako zmínění borci, nezoufej. Ceny dostane padesát nejúspěšnějších řešitelů – všichni se mohou těšit na PraSečí tričko, někteří z lépe umístěných i na batoh. Prvních pět navíc vyhraje hodnotnou matematickou literaturu podle vlastního výběru.

Přejeme Ti pěkný závěr školního roku a pestré prázdniny. Těšíme se na Tebe v dalším ročníku.

Za organizátory

Helča a Pepa Svobodovi, Kuba Krásenský

Obsah závěrečných komentářů

- Vzorová řešení 2., 3. a 4. jarní a 3. seriálové série
- Povídání k 2. podzimní sérii 34. ročníku
- Dovětek k seriálu
- Výsledkové listiny včetně závěrečného pořadí
- Příloha: Leták se zadáním 1. a 2. podzimní série 34. ročníku

Anketa a volba seriálu

Ohlašujeme, že na stránce *mks.mff.cuni.cz/anketa* můžeš vyplnit anketu o tom, co se Ti v PraSeti líbí, a co bys naopak dělal jinak. Zpětná vazba je pro nás důležitá, abychom mohli být stále lepší. V anketě můžeš hlasovat také o tématu seriálu na příští rok.

Jarní soustředění

Na závěr zmiňme soustředění, které proběhlo 10. – 18. května na planetě DL-27H, jejíž prostředí připomínalo rozkošnými rybníčky a dlouhými lány řepky okolí Uhelné Příbrami. Kromě seznamování s kulturou místních obyvatel a zachraňování Země jsme si užili týden plný přednášek, soutěží a jiných zážitků. Těšíme se na příště!

Korespondenční seminář
KAM MFF UK
Malostranské náměstí 25
118 00 Praha 1

Náboj

V pátek 11. dubna proběhl jubilejní desátý ročník týmové soutěže Náboj (*www.naboj.org*), tentokrát v ještě mezinárodnější podobě než kdy dřív – zúčastnily se týmy z České republiky, Finska, Německa, Polska, Rakouska a Slovenska. Skvělého úspěchu dosáhl juniorský tým z Gymnázia Opatov (ve složení *Filip Bialas*, *Anna Suchánková*, *Zuzana Johanovská*, *Petr Jaroschy*, *Jan Hečko*), když jednak s přehledem zvítězil v mezinárodní juniorské kategorii, jednak v absolutním měřítku spočetl více úloh než kterýkoliv tým seniorský. Blahopřání putuje samozřejmě i k vítězi české seniorské kategorie, kterým se stal tým z Gymnázia Mikulášské náměstí, jakož i ke všem ostatním týmům, které se klání účastnily.

Jarní výlet

Tradiční jarní výlet letos proběhl v sobotu 22. března. Tentokrát nás zavedl na východ od Prahy. Za takřka letního počasí jsme absolvovali strastiplnou trasu z Říčan až do Úval, kde jsme zdolali nejvyšší kopec s rozhlednou na vrcholu. Děkujeme všem zúčastněným!

Nabídka seriálů pro 34. ročník

O tématu seriálu můžeš hlasovat v anketě na stránce mks.mff.cuni.cz/anketa!

Do nekonečna a ještě dál.

Máte rádi úvahy o nekonečnu a rádi byste se v něm lépe orientovali? Zajímá vás, jak to, že mohou být některá nekonečna větší než jiná? Proč je racionálních čísel stejně jako přirozených, ale méně než reálných? A jak to, že je i přesto možné projít všechna reálná čísla „po jednom“? A kolik těch různě velkých nekonečen vlastně je? Je jich nekonečno? A které? Teorie nekonečna (které se často také říká TeMno) je elementární, leč silná a překvapivá. Vítejte v úžasně nekonečném světě nekonečen. Jak pravil jistý slavný matematik: „Nikdo nás nebude moci vyhnat z ráje, který pro nás vytvořil Cantor.“

Letem grafovým světem

Máte rádi matematiku, ale neradi počítáte s velkými čísly nebo složitými výrazy? Máte rádi matematiku, ale neradi kreslíte nepřehledné obrázky, ve kterých máte hledat shodné úhly? Máte rádi matematiku, ale máte dojem, že geometrie, algebra a teorie čísel se na vás valí ze všech stran? Zkuste změnu a zanořte se s námi do teorie grafů. V první části si povíme, co to vlastně grafy jsou a jaké základní vlastnosti mají. V dalších dvou dílech seriálu se pak společně vydáme na cestu nejzajímavějšími partiemi teorie grafů, jakými jsou například průnikové grafy či systémy různých reprezentantů a jejich možné aplikace. Absolvování našeho seriálu vám navíc pomůže nejen v matematické olympiádě, ale i při studiu matematiky na vysoké škole.

Geometrie trojúhelníka

Stále vás nepřestává fascinovat, že se výšky v trojúhelníku protínají v jednom bodě? Nejste sami. A co takhle, že onen průsečík výšek, těžiště a střed kružnice opsané leží na přímce? Nebo že se osa strany protíná s osou protějšího úhlu na kružnici opsané? Geometrie trojúhelníka zná podobně zajímavých a pěkných tvrzení nepřeberné množství a tento seriál nabízí jejich výběr i vám. Pojďme společně prozkoumat kousek světa syntetické geometrie, jehož vývoj započal už ve starém Řecku. Většina technik, které si při tomto výletu osvojíme, se vám navíc bude hodit při řešení Matematické olympiády i jiných soutěží. Můžete se těšit na spoustu obrázků a hlavně, nikdy už se nezaleknete nápisu *αγεωμέτρητις μηδείς είσιτω*.

Algoritmická geometrie

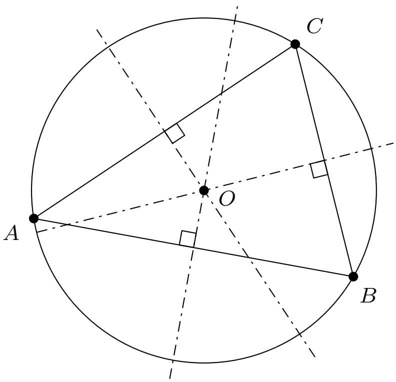
Ne každý sice řešil problém, jak oplotit stromy na zahrádce, zato ten, jak se dostat na nejbližší záchod, určitě ano. Geometrie skrývající se za tímto problémem nikoho rozhodně nezarazí. Ale co třeba míchání roztoků nebo řízení obrazu na displeji počítače. Čekali byste geometrii zde? Jak už název napovídá, jedná se o geometrii algoritmickou, tedy žádné obvodové úhly, tětivové čtyřúhelníky či Švrčkovy body, zato se tam ale vyskytne trocha kombinatoriky a teorie grafů. Jde v podstatě o hledání elegantních postupů, jak může počítač řešit geometrické úlohy. Nebudeme vám lhát, že se tu neobjeví (většinou nenáviděná) analytická geometrie. Můžete to brát jako šanci zjistit, že není jen nástrojem, jak hezké olympiádní geometrie zabít hafem rovnic, nýbrž že je občas hezká i sama o sobě.

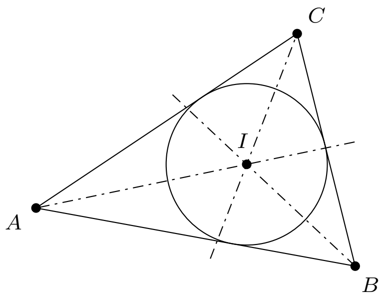
Povídání ke 2. podzimní sérii

Druhá série je věnována kružnicím. Každý ví, jak taková kružnice vypadá – je to množina bodů roviny se stejnou vzdáleností r od nějakého středu S. Kružnice však mají i další vlastnosti, které už zdaleka tak zřejmé být nemusejí. Všechny dále uvedené věty smíš v řešeních používat bez důkazu.

Věta. (Kružnice trojúhelníku opsaná) *Střed kružnice trojúhelníku opsané (budeme ho značit O) leží v průsečíku os jeho stran. Pro poloměr této kružnice platí $R = \frac{abc}{4S}$, kde S je obsah trojúhelníka a a, b, c délky jeho stran.*

Věta. (Kružnice trojúhelníku vepsaná) *Střed kružnice trojúhelníku vepsané leží v průsečíku os vnitřních úhlů při jeho vrcholech a budeme ho značit I. Pro poloměr této kružnice platí $r = \frac{2S}{a+b+c}$.*





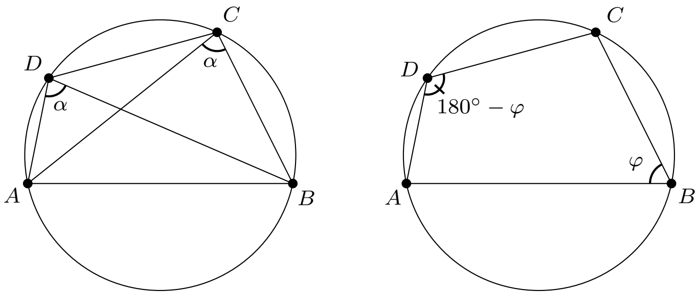
Definice. (Tětivový a tečnový čtyřúhelník) Čtyřúhelník nazýváme

(i) *tětivový*, lze-li mu opsat kružnici (tedy všechny jeho vrcholy leží na jedné kružnici),
(ii) *tečnový*, lze-li mu vepsat kružnici.

Takové čtyřúhelníky mají mnoho zajímavých vlastností, z nichž alespoň některé zformulujeme:

Věta. *Čtyřúhelník $ABCD$ je tětivový právě tehdy, když*

(i) *úhel svíraný jednou stranou a úhlopříčkou je rovný úhlu svíranému protilehlou stranou a druhou úhlopříčkou, nebo*
(ii) *součet vnitřních úhlů při protilehlých vrcholech je 180 stupňů.*



Pomocí tvrzení o tětivových čtyřúhelnících tak umíme dobře „úhlově“ popsat to, že čtyři body leží na kružnici. Zároveň je mnohdy užitečné tětivový čtyřúhelník v úloze najít – jeho objevením se naše informace o velikostech úhlů v obrázku podstatně rozšíří.

Věta. *Čtyřúhelník $ABCD$ je tečnový právě tehdy, když $a + c = b + d$, kde a, b, c, d jsou po řadě délky stran AB, BC, CD, AD.*

Stručný dovětek k seriálu

Rádi bychom poděkovali řešitelům, kteří trpělivě pročetli všechny tři díly letošního seriálu. Snažili jsme se pokrýt témata, která nám přišla zajímavá, ale kvůli omezenému rozsahu jsme jich spoustu nestihli zahrnout. Pro ty, které tato témata zaujala, uvádíme zdroje, ze kterých jsme čerpali. Jde v nich najít inspiraci pro další studium teorie čísel a pro přípravu na olympiádu.

(1) Titu Andreescu, *104 Number Theory Problems* (povinná četba každého olympionika obsahující 104 příkladů s řešeními)
(2) Titu Andreescu, *Number Theory*
(3) Tom Apostol, *Introduction to Analytic Number Theory* (zde najdeš vše z třetího dílu seriálu a mnoho dalších zajímavých věcí)
(4) Hua Loo Keng, *Introduction to Number Theory* (všechno, co jsi chtěl vědět o teorii čísel, ale bál ses zeptat)
(5) PraSečí seriál z let 2008/2009, *http://mks.mff.cuni.cz/archive/archive.php* (zde najdeš Diofantické rovnice a RSA, témata, kterým jsme se vyhnuli)
(6) Třetí díl PraSečího seriálu o komplexních číslech z let 2010/2011 (Gaussova a Eisensteinova čísla)

Přejeme Ti hodně zdaru při dalším studiu.

Pepa Svoboda a Štěpán Šimsa

Iracionální čísla

2. JARNÍ SÉRIE VZOROVÉ ŘEŠENÍ

Úloha 1. (74; 72; 2,92; 3,0)

Do každého políčka tabulky 2×3 napište iracionální číslo tak, aby součet v každém řádku i sloupci byl racionální. *(Martin „E.T.“ Sýkora)*

ŘEŠENÍ:
Jak zvolit iracionální čísla tak, aby jejich součet byl racionální? Nabízí se hledat nulové součty a do sloupců umístit opačná čísla. Jedním z vyhovujících příkladů je následující tabulka:

$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$-2\sqrt{2}$
$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$2\sqrt{2}$

Víme, že násobíme-li iracionální číslo racionálním, výsledek bude iracionální. Proto $-\sqrt{2}$, $2\sqrt{2}$ i $-2\sqrt{2}$ jsou iracionální čísla. Součty v řádcích i sloupcích jsou nulové a do všech políček jsme umístili iracionální čísla, úloha je tedy vyřešena.

POZNÁMKY:
Správně vyplněnou tabulku poslali téměř všichni řešitelé. Někteří nepřipsali ani slovo, naštěstí převládala více či méně podrobně okomentovaná řešení. Mnoho řešitelů si trochu přidělávalo práci, když k iracionálnímu číslu přičítali ještě nějaké přirozené, aby dostali nenulový součet. Jako by se snad báli nuly! Raději proto připomenu, že i nula je racionální číslo, vždyť ačkoli nelze dělit nulou, nulu můžeme podělit jakýmkoli jiným číslem. *(Bára Kociánová)*

Úloha 2. (65; 47; 2,22; 3,0)

Rozhodněte, zda existují tři iracionální čísla taková, že součet každých dvou z nich je racionální, a své tvrzení dokažte. *(Pepa Tkadlec)*

ŘEŠENÍ:
Předpokládejme, že nějaká taková tři iracionální čísla existují, říkejme jim a, b, c. Čísla $a+b$, $b+c$, $a+c$ jsou z předpokladu racionální, tedy i jejich součet $2(a+b+c)$ je racionální číslo.

Na druhou stranu, součet racionálního čísla $a+b$ s iracionálním číslem c je číslo iracionální. Součin racionálního čísla 2 s iracionálním číslem $a+b+c$ je rovněž iracionální. A to je spor, neboť číslo $2(a+b+c)$ nemůže být zároveň racionální a iracionální.

Žádná tři taková čísla tudíž neexistují.

POZNÁMKY:
Většina z vás si s úlohou hravě poradila. Ovšem našli se i tací, kteří se v úloze zamotali – nejčastěji při pokusu rozložit číslo na „racionální“ a „iracionální“ složku. Každé iracionální číslo

samozřejmě lze napsat jako součet racionálního a iracionálního – například

$$\begin{aligned}\frac{2}{7} + \sqrt[3]{5} &= 0 + \left(\sqrt[3]{5} + \frac{2}{7}\right)\\ &= \frac{3}{7} + \left(\sqrt[3]{5} - \frac{1}{7}\right)\\ &= -\frac{5}{7} + \left(\sqrt[3]{5} + 1\right)\\ &= \cdots\end{aligned}$$

Takový zápis však není jednoznačný, což byl kámen úrazu ve všech řešeních, jež se touto cestou pustila. *(Alča Skálová)*

Úloha 3.

(56; 48; 2,57; 3,0)

Šavlík si nějakou dobu hrál s kladnými čísly a pak tvrdil, že se mu podařilo najít takové číslo x, že pro každé přirozené číslo n dávalo číslo[1] $\lfloor x \cdot 10^n \rfloor$ po dělení 10 stejný zbytek jako n. Je možné, že Šavlíkovo číslo bylo iracionální? *(Tomáš „Šavlík“ Pavlík)*

Řešení:

Buď $x = \overline{a{,}a_1a_2a_3\ldots}$, kde $\overline{a_1a_2\ldots}$ je desetinný rozvoj čísla x. Podmínka ze zadání říká, že $a_i \equiv i \pmod{10}$. Pro libovolné i tak platí

$$a_i \equiv i \equiv i + 10 \equiv a_{i+10} \pmod{10}.$$

Jelikož jsou a_i a a_{i+10} cifry, musejí se rovnat. Proto je rozvoj čísla x periodický s periodou 10, a číslo x tak nemůže být iracionální.

Poznámky:

Tato úloha byla celkem jednoduchá, šlo hlavně o to uvědomit si, co vlastně říká na první pohled trochu nehezky vypadající podmínka v zadání. To většina řešitelů dříve či později udělala a zasloužila si plný počet bodů. Většina ukázala racionalitu tím, že přesně určila desetinný rozvoj, který by mohl být $,\overline{1234567890}$. To ovšem platí, pouze pokud x je kladné, což bylo naštěstí uvedeno v zadání. Můžete si rozmyslet, jak by rozvoj vypadal pro záporná x. Body jsem strhával hlavně za to, že jste nedostatečně zdůvodnili, proč musí desetinný rozvoj vypadat přesně takhle. Vždycky je lepší své řešení o jednu větu prodloužit a vše pečlivě zdůvodnit než zbytečně přicházet o body. Bohužel se našli i takoví, kteří správně našli desetinný rozvoj čísla x, poté však tvrdili, že toto číslo je iracionální. Těm bych doporučil, aby si znova pečlivě přečetli úvodní text k sérii. *(Martin Čech)*

Úloha 4.

(40; 35; 4,15; 5,0)

E.T. má konečnou množinu reálných čísel takovou, že součet všech jejích prvků je racionální. Dokažte, že počet jejích neprázdných podmnožin, které mají iracionální součet všech prvků, je sudý. *(Martin „E.T.“ Sýkora)*

Řešení:

Nejprve si ukažme, že součet racionálního čísla s iracionálním je iracionální. Postupujme sporem a předpokládejme, že $a, c \in \mathbb{Q}$, $b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ a $a + b = c$. Pak ale $b = c - a$, kde na levé straně je iracionální číslo a na pravé rozdíl dvou racionálních čísel, který je racionální. A to je spor, kterého jsme chtěli dosáhnout.

[1] Číslo $\lfloor x \rfloor$ značí dolní celou část čísla x, tj. největší celé číslo, které není větší než x.

Nyní si označme E.T.-ho množinu M a uvědomme si, že nás zajímají jen neprázdné podmnožiny (dle zadání), které se navíc nerovnají množině M (protože ta má racionální součet prvků). V dalším textu pak budeme tyto podmnožiny označovat pojmem *zajímavá podmnožina.*[2]

Nyní uvažme libovolnou zajímavou podmnožinu množiny M s iracionálním součtem prvků a označme ji A. Pak s přihlédnutím k prvnímu odstavci a faktu, že součet všech prvků v M je racionální, musí být součet prvků v množině[3] $M \setminus A$ iracionální. Dále víme, že doplňkem zajímavé podmnožiny je opět zajímavá podmnožina. Navíc platí $M \setminus (M \setminus A) = A$ a $A \neq M \setminus A$, takže můžeme všechny zajímavé podmnožiny s iracionálním součtem prvků popárovat tak, že každé přiřadíme její doplněk, a proto je jich sudý počet.

Poznámky:

Toto řešení je zapsáno velmi podrobně. Například poznámku o tom, že „doplněk doplňku je původní podmnožina“, není potřeba v řešeních uvádět, protože párování „doplňků“ je známé, a není třeba dokazovat, že to opravdu je párování. Pokud ale obecně někdy párujete, je dobré ověřit si, že žádnému prvku nedáte do dvojice ten samý prvek, nebo pokud jednomu přiřadíte druhý, tak že druhému přiřadíte zase ten první.

Úlohu jsem ale opravoval mírně, takže si většina řešení vysloužila plné bodové ohodnocení. Body jsem nejčastěji strhával za chybné tvrzení, že iracionálních čísel musí být v dané množině sudý počet, aby se po dvou vykrátila. Jednoduchým protipříkladem je například množina $\{\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, -3\sqrt{2}\}$. *(Martin „E.T.“ Sýkora)*

Úloha 5.

(50; 45; 3,96; 5,0)

David dostal k narozeninám dvě kladná reálná čísla a, b, jejichž součin je 100 *a jejichž součet je celé číslo, které dává zbytek dva po dělení čtyřmi. Dokažte, že $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ musí být iracionální.*

(David Hruška)

Řešení:

Nechť a, b jsou kladná reálná čísla vyhovující podmínkám zadání. Existuje tedy nezáporné celé číslo k takové, že $a + b = 4k + 2$. Dále budeme upravovat zadaný výraz tak, abychom ho mohli zredukovat za pomoci zadaných podmínek:

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)^2} = \sqrt{a + 2\sqrt{ab} + b} = \sqrt{4k + 2 + 2\sqrt{100}} = \sqrt{4k + 22}.$$

Zkoumané číslo je tedy druhou odmocninou z kladného celého čísla $4k + 22$, které je dělitelné dvěma, ale není dělitelné čtyřmi. To znamená, že toto celé číslo není druhou mocninou celého čísla a jeho druhá odmocnina je podle textu k této sérii číslo iracionální. Tím je tvrzení dokázáno.

Poznámky:

Tvrzení se podobně dalo dokázat sporem, jenom si někteří řešitelé nedali pozor na to, že musí pro spor uvažovat obecné racionální číslo $\frac{p}{q}$. Tím se postup trochu komplikoval, a proto jsem v autorském řešení zvolil raději druhou variantu. Při opravování jsem narazil na zajímavý problém, zda zkoumaný součet může být celočíselný, pokud bychom druhou podmínku oslabili na $a + b = 2k$. Můžete si to vyzkoušet rozřešit jako cvičení. *(Filip Hlásek)*

[2] Podmnožiny, které se nerovnají původní množině, se běžně označují jako vlastní podmnožiny. Pojmem „zajímavá“ (který ustálený rozhodně není) tedy myslíme zkratku za „vlastní neprázdná“.

[3] Symbolem $M \setminus A$ značíme doplněk množiny A vzhledem k množině M, což je množina, která obsahuje ty prvky z M, které neobsahuje A (a žádné jiné).

Úloha 6.

(34; 27; 3,94; 5,0)

Pepa se jednou nudil a řekl si, že napíše iracionální číslo, za jehož desetinnou čárkou budou pouze nuly, jedničky a dvojky. Kopii hotového čísla dal Olinovi a Filipovi. Olin všechny svoje nuly přepsal na jedničky, Filip všechny jedničky své kopie změnil na dvojky. Mohlo se stát, že Olin i Filip měli po přepsání racionální čísla? *(Pepa Tkadlec)*

První řešení:

Dokážeme to sporom. Predpokladajme, že Olinovo číslo O aj Filipovo číslo F sú racionálne, kým Pepovo číslo P je iracionálne. Ak má byť O (resp. F) racionálne, tak má buď ukončený desatinný rozvoj, alebo je periodické.

Žiadne z čísel nemôže mať ukončený desatinný rozvoj, pretože ani Olin, ani Filip neprepisujú žiadne cifry na nuly, a teda od istého desatinného miesta by muselo mať P už iba nuly a bolo by racionálne.

Druhá možnosť je, že sú obe čísla O a F periodické. Všimnime si, že O má dvojky na tých istých miestach ako P. Keďže O je periodické, tak od istého miesta sa v ňom zoskupenia dvojok opakujú periodicky, a teda sa musia opakovať aj v P. Označme dĺžku tejto periódy r. Podobne F má nuly na tých istých miestach ako P. Číslo F je periodické, preto od istého miesta sa v ňom zoskupenia núl opakujú periodicky, musia sa teda aj v P opakovať. Dĺžku tejto periódy označíme t. Potom ale od istého miesta (po skončení dlhšej z predperiód čísel O a F) sa v Pepovom čísle budú nuly aj dvojky opakovať s periódou rt. Na zvyšných miestach môžu byť už iba jednotky, a teda aj tie sa budú opakovať s periódou rt. Pepovo číslo je teda periodické, preto nemôže byť iracionálne a dostávame spor.

Druhé řešení:

Označme x_0 číslo, ktoré má za desatinnou čiarkou jednotky iba na tých miestach, kde má Pepovo číslo nuly, a na ostatných miestach bude mať nuly. Podobne x_1 je číslo, ktoré má jednotky tam, kde má P jednotky, a inde má nuly, a x_2 je číslo, ktoré má jednotky tam, kde má P dvojky, a inde má nuly. Potom, keď si odmyslíme celé časti čísel, pretože tie aj tak nič nemenia na racionálnosti, platí

$$\begin{aligned} P &= x_1 + 2x_2, \\ O &= x_0 + x_1 + 2x_2, \\ F &= 2x_1 + 2x_2, \\ \tfrac{1}{9} &= x_0 + x_1 + x_2. \end{aligned}$$

Ďalej postupujme sporom. Predpokladáme, že O aj F sú racionálne a P je iracionálne. Keďže O je racionálne, tak aj $O - 1/9 = x_2$ je racionálne. Číslo F je racionálne, a preto aj $(F - 2x_2)/2 = x_1$ je racionálne. Konečne súčet racionálnych čísel $x_1 + 2x_2 = P$ je racionálny a dostávame spor.

Poznámky:

Prevažná väčšina riešení bola správna, či už postupovala jedným alebo druhým spôsobom. Občas niekto zabudol zmieniť predperiódy, alebo čo sa deje s číslom pred desatinnou čiarkou, ale za takéto chybičky krásy sme body nestrhávali. *(Marta Kossaczká)*

Úloha 7.

(17; 9; 2,65; 2,0)

Mějme tři kladná iracionální čísla a, b, c taková, že $a + b + c = 1$. Je-li některé z těchto tří čísel větší než $\frac{1}{2}$, každé z nich vynásobíme dvěma a následně největší číslo o jedna zmenšíme. Takto pokračujeme, dokud nejsou všechna tři čísla menší než $\frac{1}{2}$. Může se nám při nějaké volbě a, b, c stát, že nikdy neskončíme a budeme pokračovat do nekonečna? *(Tomáš „Šavlík“ Pavlík)*

Řešení:
Najdeme a, b, c taková, že budeme moci udělat nekonečně mnoho kroků. Taková vhodná čísla, zapsaná v binární číselné soustavě, jsou například tato:

$$a = 0{,}101001000100001\dots,$$
$$b = 0{,}0101001000100001\dots,$$
$$c = 0{,}0000100110011100\dots.$$

Číslo a vzniklo postupným zvyšováním počtu nul mezi jednotlivými jedničkami, b je stejné, ale posunuté o jednu cifru doprava, tedy $b = a/2$. Číslo c je takové, že má jedničku přesně tam, kde ji nemá a ani b, tedy $c = 1 - a - b$.

Číslo a má neperiodický binární rozvoj, tedy je iracionální. Stejně tak je iracionální číslo $b = a/2$ (součin racionálního a iracionálního) a číslo $c = 1 - 3a/2$ (rozdíl racionálního a iracionálního). Nyní stačí sledovat, co se s čísly stane při jednom kroku. Při vynásobení čísla dvojkou se v binárním zápise jen posune dvojková čárka[4] o jednu pozici doprava. Následným odečtením jedničky pouze smažeme onu jednu jedničku před dvojkovou čárkou. Nyní už je jasné, že v každém kroku bude právě jedno číslo větší než $1/2$, a tedy se nikdy nezastavíme.

Poznámky:
Opět bylo dokázáno, že nekonečno dělá problémy. Hodně z vás tvrdilo, že taková čísla neexistují, protože by byla jen součtem nějakých racionálních čísel. To sice ano, ale pokud je součet nekonečný, pak se i z racionálních čísel může stát číslo iracionální. Důkazem toho může být například $\sum_{i=0}^{\infty} p_i \cdot 10^{-i}$, kde p_i je i-tá číslice v desetinném zápise čísla π. Tento součet je roven π, tedy je iracionální, ale všechny členy součtu jsou racionální. *(Tomáš „Šavlík“ Pavlík)*

Úloha 8.

(7; 4; 2,71; 3,0)

Najděte všechny polynomy $P(x)$ s reálnými koeficienty takové, že pro každé iracionální číslo i je $P(i)$ také iracionální. *(Alexander „Olin“ Slávik)*

Řešení:
Je-li polynom $P(x)$ konstantní, pak nutně $P(x) = i$ pro nějaké iracionální číslo i. Takovýto polynom zřejmě splňuje podmínku ze zadání.

Předpokládejme dále, že polynom $P(x)$ ze zadání existuje, má stupeň $n \geq 1$ a platí

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0,$$

kde $a_n \neq 0$. Naším prvním cílem bude ukázat, že čísla $a_0, a_1, \dots, a_n$ jsou všechna racionální.

Podmínku ze zadání budeme dále využívat také v její obměně: je-li $P(q)$ racionální, je i q racionální. Je známým faktem, že svými hodnotami v $n+1$ bodech je polynom stupně n již jednoznačně určen. Zvolme proto $n+1$ různých racionálních čísel $r_0, r_1, \dots, r_n$ z oboru hodnot $P(x)$ jakožto funkce; pro ta existují (nutně různá) racionální čísla $q_0, q_1, \dots, q_n$ taková, že $P(q_j) = r_j$ pro $0 \leq j \leq n$. Na tuto sadu rovností můžeme pohlížet jako na soustavu $n+1$ lineárních rovnic o $n+1$ neznámých $a_0, a_1, \dots, a_n$. Tato soustava má vzhledem k výše uvedeným skutečnostem (polynom $P(x)$ existuje a je těmito rovnicemi jednoznačně popsán) právě jedno řešení. Řešíme-li takovouto soustavu rovnic, dospějeme k výsledku jen pomocí sčítání, odčítání, násobení a dělení racionálních celých čísel, proto jsou i čísla $a_0, a_1, \dots, a_n$ vskutku racionální.

V případě $n = 1$ je patrné, že racionalita koeficientů již stačí pro splnění podmínky ze zadání, protože pro libovolná racionální čísla a_0, a_1 ($a_1 \neq 0$) a iracionální číslo i je $a_1 i + a_0$ iracionální. Pro $n \geq 2$ však žádný polynom nevyhovuje, jak dále dokážeme.

[4] Jde o analogii desetinné čárky v desítkovém zápise.

Předně poznamenejme, že polynom $P(x)$ vyhovuje zadání právě tehdy, když vyhovuje polynom $rP(x)$, kde $r \in \mathbb{Q}$, $r \neq 0$. Díky tomu můžeme předpokládat, že čísla $a_0, a_1, \ldots, a_n$ jsou dokonce celá (kdyby nebyla, tak polynom vynásobíme součinem jejich jmenovatelů). Nechť p je prvočíslo, které nedělí a_n, a d celé číslo nedělitelné p, pro které je d/p v oboru hodnot $P(x)$. Máme $P(q) = d/p$ pro nějaké racionální číslo q, které si zapíšeme jako u/v, kde u, v jsou nesoudělná celá čísla. Rovnost si rozepíšeme a upravíme:

$$
\begin{aligned}
a_n\left(\tfrac{u}{v}\right)^n + a_{n-1}\left(\tfrac{u}{v}\right)^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot \tfrac{u}{v} + a_0 &= \tfrac{d}{p}, \\
p \cdot \left(a_n u^n + a_{n-1}u^{n-1}v + \cdots + a_1 uv^{n-1} + a_0 v^n\right) &= dv^n.
\end{aligned}
$$

Jelikož je levá strana poslední rovnosti dělitelná p a $p \nmid d$, je $p \mid v$. Pravá strana je tedy dělitelná p^n, což spolu s $n > 1$ implikuje

$$
p \mid a_n u^n + a_{n-1}u^{n-1}v + \cdots + a_1 uv^{n-1} + a_0 v^n.
$$

Všechny sčítance s v jsou také dělitelné p, takže $p \mid a_n u^n$ a vzhledem k volbě p je $p \mid u$. To je ale ve sporu s nesoudělností čísel u, v, číslo d/p tedy nemůže mít racionální vzor a polynom $P(x)$ nemůže splňovat podmínku ze zadání.

Poznámky:
Všechna správná řešení stejně jako výše uvedené nejprve ukazovala, že nekonstantní polynom vyhovující zadání musí mít racionální koeficienty, a posléze nějak argumentovala skrze dělitelnost. Prezentovaný vzorový postup mi přišel jako vhodný kompromis mezi stručností a srozumitelností; povšimněte si, že v podstatě jde jen o variaci na důkaz iracionality $\sqrt{2}$ (neboli faktu, že 2 nemá racionální vzor v polynomu x^2), který byl uveden v úvodním textu!

(Alexander „Olin“ Slávik)

Stereometrie

3. JARNÍ SÉRIE — VZOROVÉ ŘEŠENÍ

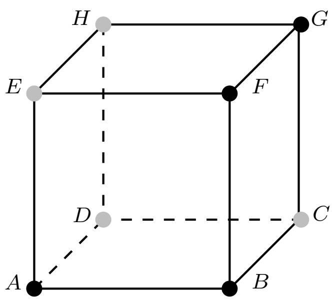
Úloha 1. (56; 46; 2,36; 3,0)

Obarvěte každý z osmi vrcholů krychle jednou ze dvou barev, a to tak, aby každá rovina procházející alespoň třemi body jedné barvy procházela i nějakým bodem druhé barvy.

(Pepa Tkadlec)

ŘEŠENÍ:

Označme a obarvěme vrcholy krychle tak jako na obrázku. Roviny, které procházejí třemi body modré barvy, jsou celkem čtyři, a sice ABF, ABG, AFG a BFG. V těchto rovinách přitom leží po řadě červené body E, H, D a C. Ze symetrie obarvení podle spojnice středů čtverců $ABCD$ a $EFGH$ plyne, že i všechny roviny procházející třemi červenými vrcholy obsahují alespoň jeden vrchol jiné barvy. Naše obarvení tak vyhovuje zadání.



POZNÁMKY:

S úlohou si většina řešitelů hravě poradila. Bohužel se ale našlo i poměrně velké množství lidí, kteří zapomněli na roviny procházející právě třemi vrcholy krychle. Někteří dokonce prohlašovali za zjevné, že takové neexistují, ale rovina ACF dokládá, že se mýlili.

Na závěr bych chtěl všem doporučit, aby si pečlivě četli zadání. Například v této sérii jsme jasně upozornili, že řešení neobsahující jakékoliv zdůvodnění nebudou hodnocena plným počtem bodů. I přesto několik řešitelů poslalo jen obrázek, což je zbytečně připravilo o jeden bod.

(Martin „E.T." Sýkora)

Úloha 2.

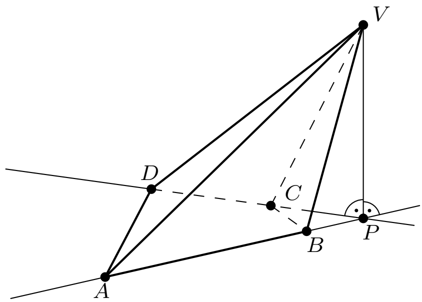
(55; 46; 2,36; 3,0)

Najděte čtyřboký jehlan,[5] *jehož dvě protější stěny jsou obě kolmé na podstavu.*

(David Hruška)

Řešení:

Čtyřboký jehlan vyhovující zadání můžeme sestrojit následujícím způsobem. Za podstavu zvolíme libovolný čtyřúhelník $ABCD$ takový, že strany AB a CD jsou různoběžné. Průsečík přímek AB a CD označíme P a na kolmici k rovině $ABCD$ z bodu P zvolíme bod V různý od P. Roviny stěn ABV a CDV pak obsahují přímku PV, takže jsou kolmé na podstavu, a jehlan $ABCDV$ tedy splňuje zadanou podmínku.



Poznámky:

Většina řešení měla správnou myšlenku, ale řada z nich byla neúplná. Někteří z vás se například omezili na pozorování, že podstava nesmí být rovnoběžník, nebo poslali jen nedostatečně okomentovaný obrázek. Taková řešení nedostala plný počet bodů, protože z nich nebylo jasné, jak jehlan vyhovující zadání skutečně najít. *(Ondra Cífka)*

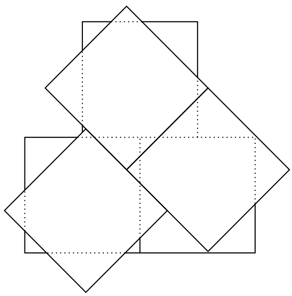
Úloha 3.

(43; 33; 2,49; 3,0)

Rozmístěte do prostoru šest krychlí tak, aby se žádné dvě neprotínaly a aby se každé dvě dotýkaly nějakou plochou. *(Pepa Tkadlec)*

Řešení:

Krychle si rozdělíme na dvě trojice. Každou z těchto trojic uspořádáme tak, aby se v ní každá krychle dotýkala každé a spodní stěny byly vyrovnané v jedné rovině. Tyto dvě trojice na sebe poté položíme, horní posuneme a pootočíme tak, abychom dostali pozici podobnou na obrázku níže.



[5] Jehlan (n-boký) je těleso určené *podstavou*, což je ne nutně pravidelný n-úhelník, a *hlavním vrcholem*, což je bod mimo rovinu podstavy.

Poznámky:
Většina řešitelů poslala správné řešení, našlo se však i pár takových, kteří si neuvědomili, že krychle není pouze plášť, ale celé trojrozměrné těleso. Proto se šest krychlí, které jsou do sebe navzájem vnořené, protíná a neřeší naši úlohu. *(Martin Čech)*

Úloha 4.

(27; 20; 3,63; 5,0)

Rozhodněte, zda existuje čtyřstěn, jehož tělesové výšky mají délky 1, 2, 3 a 6 cm.

(David Hruška)

Řešení:
Objem jehlanu je $V = \frac{1}{3}v_a S_a$, kde S_a je obsah jedné stěny jehlanu a v_a jí odpovídající výška. Podle zadání mají být výšky v poměru $1:2:3:6$, což znamená, že obsahy stěn musejí být v poměru $6:3:2:1$. Z toho plyne, že obsah největší stěny je roven součtu obsahů zbylých stěn. V prostoru platí obdoba trojúhelníkové nerovnosti, která říká, že obsah jedné stěny musí být menší než součet obsahů zbylých stěn. To znamená, že zadaný čtyřstěn existovat nemůže.

Poznámky:
Sešlo se relativně málo řešení, protože bez převedení poměru délek výšek na poměr obsahů stěn nešlo úlohu rozumně řešit. Na druhou stranu, kdo na tento trik přišel, získal většinou plný počet bodů. *(Martin Töpfer)*

Úloha 5.

(22; 20; 4,59; 5,0)

Mějme čtyřstěn s opsanou a vepsanou koulí. Označme R poloměr koule opsané, r poloměr koule vepsané, a délku nejdelší hrany čtyřstěnu a h délku jeho nejkratší tělesové výšky. Dokažte nerovnost

$$\frac{R}{r} > \frac{a}{h}.$$

(Filip Hlásek)

Řešení:
Dokážeme dvě nerovnosti: (a) $a \leq 2R$, (b) $2r < h$.

(a) Libovolná úsečka spojující dva body na povrchu koule o poloměru R má délku nejvýše rovnu průměru koule, tj. $2R$. Tedy i pro nejdelší hranu a čtyřstěnu s opsanou koulí poloměru R platí $a \leq 2R$.

(b) Označme vrcholy čtyřstěnu A, B, C, D. Nechť D je vrchol, z něhož je spuštěna výška délky h. Pak koule vepsaná čtyřstěnu $ABCD$ leží celá mezi rovinou ABC a rovinou s ní rovnoběžnou procházející bodem D. Vzdálenost těchto rovin je h, proto $2r < h$. Nerovnost je ostrá, neboť vepsaná koule neprochází bodem D.

Délky a, h, r, R jsou nezáporné, tudíž můžeme dokázané nerovnosti vynásobit. Dostáváme $2ar < 2Rh$; z toho ihned plyne $\frac{R}{r} > \frac{a}{h}$, což jsme měli dokázat.

Poznámky:
Drtivá většina řešitelů, kteří úlohu poslali, ji měla správně. Dokazovaná nerovnost není silná a nebylo potřeba znát o čtyřstěnu žádné vzorečky, přesto se někteří rozhodli použít hlubších znalostí. Například, že pro povrch čtyřstěnu S a objem V platí $Sr = 3V$, $V = \frac{1}{3}hs$, kde s je obsah stěny příslušné výšce délky h. A protože součet obsahů tří stěn čtyřstěnu je větší než obsah čtvrté stěny, platí $2sr < Sr = hs$, což nám opět dává nerovnost (b). Také těmto řešením jsem samozřejmě udělila plný počet bodů. *(Míša Hubatová)*

Úloha 6.

(25; 11; 2,04; 1,0)

David vlastní pozemek ve městě, kde stojí několik výškových budov.[6] *Řekneme, že jedna budova stíní jinou, pokud spojnice jejich horních konců svírá s rovinou města úhel větší než* 45°. *Dokažte, že pokud ve městě žádná budova nestíní jinou, může David na svém pozemku postavit budovu vysokou tak, že to bude platit i nadále.* *(Pepa Tkadlec)*

Řešení:

V bodě D Davidova pozemku vztyčíme kolmici k podstavné rovině a vyznačíme na ní následující intervaly: Pro $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ vyznačíme interval $I_i = \langle h_i - d_i, h_i + d_i \rangle$, kde h_i je výška i-tého domu a d_i je půdorysná vzdálenost i-tého domu od bodu D. Všimneme si, že interval I_i určuje dovolenou výšku Davidova domu vzhledem k i-tému domu.

Označme nejvyšší hodnotu ze všech dolních mezí těchto intervalů jako a a nejnižší ze všech horních mezí jako b. Pokud $a \leq b$, může David postavit budovu s libovolnou výškou z intervalu $\langle a, b \rangle$. Zbývá ukázat, že možnost $a > b$ nemohla nastat. Pro důkaz sporem proto předpokládejme, že nastala.

Nechť a je dolní mez intervalu I_p a b horní mez intervalu I_q (z $a > b$ plyne $p \neq q$). Tedy

$$\begin{aligned} h_p - d_p &> h_q + d_q, \\ h_p - h_q &> d_p + d_q \geq d_{pq}, \end{aligned}$$

kde d_{pq} značí vzdálenost p-té a q-té budovy. Rozdíl výšek p-té a q-té budovy převyšuje jejich vzdálenost, čili budova p stíní budovu q, což je spor se zadáním.

Poznámky:

V této úloze bylo zvlášť důležité hlídat ostré a neostré nerovnosti, dále pak využít trojúhelníkové nerovnosti. Bohužel jsem neobdržel žádné odůvodnění, že v případě prázdného průniku systému intervalů existují dva disjunktní. I proto jsem za to nestrhával body.

Našel se i jiný postup vedoucí k cíli, a sice konstrukcí „zakázaných" kuželů. Bylo však nutné vše správně a srozumitelně okomentovat, aby byl tento způsob korektní.

(Jakub „Roman" Klemsa)

Úloha 7.

(6; 4; 3,33; 5,0)

Koule vepsaná čtyřstěnu $ABCD$ se dotýká stěny ABC v bodě E. Koule jemu připsaná[7] *vzhledem k vrcholu D se stěny ABC dotýká v bodě F. Dokažte, že $|\sphericalangle ABE| = |\sphericalangle CBF|$.*

(Pepa Tkadlec)

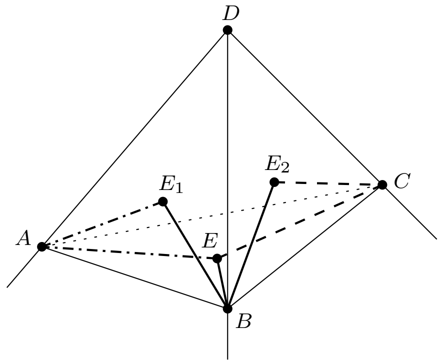
Řešení:

Označme body dotyku gule vpísanej s rovinami ABD a BDC postupne E_1 a E_2. Podobne, body dotyku gule pripísanej s rovinami ABD a BDC postupne F_1 a F_2. Priamky BE, BE_1, BE_2 sú dotyčnice z toho istého bodu k tej istej guli, preto $|BE| = |BE_1| = |BE_2|$. Podobne z dotyčníc z bodov A a C máme $|AE| = |AE_1|$, $|CE| = |CE_2|$ a analogicky pre guľu pripísanú $|BF| = |BF_1| = |BF_2|$, $|AF| = |AF_1|$ a $|CF| = |CF_2|$. Guľa vpísaná je rovnoľahlá s guľou pripísanou podľa bodu D, a preto platí $|E_1F_1| = |E_2F_2|$.

---

[6] Předpokládejme, že město je vodorovná rovina, výškové budovy jsou svislé úsečky se spodními konci v této rovině a pozemek je bod v této rovině.

[7] Koule dotýkající se rovin ABD, BCD a ACD mimo čtyřstěn a roviny ABC uvnitř příslušné stěny čtyřstěnu.



Máme teda veľa dvojíc zhodných trojuholníkov:

$$\triangle ABE \cong \triangle ABE_1, \quad \triangle ABF \cong \triangle ABF_1,$$
$$\triangle CBE \cong \triangle CBE_2, \quad \triangle CBF \cong \triangle CBF_2, \quad \triangle E_1BF_1 \cong \triangle E_2BF_2.$$

Preto platí:

$$|\sphericalangle ABE| = |\sphericalangle ABE_1|, \quad |\sphericalangle ABF| = |\sphericalangle ABF_1|,$$
$$|\sphericalangle CBE| = |\sphericalangle CBE_2|, \quad |\sphericalangle CBF| = |\sphericalangle CBF_2|, \quad |\sphericalangle E_1BF_1| = |\sphericalangle E_2BF_2|.$$

A keďže

$$|\sphericalangle ABE_1| + |\sphericalangle ABF_1| = |\sphericalangle E_1BF_1| = |\sphericalangle E_2BF_2| = |\sphericalangle CBE_2| + |\sphericalangle CBF_2|,$$

dostávame:

$$|\sphericalangle ABE| + |\sphericalangle ABF| = |\sphericalangle CBE| + |\sphericalangle CBF|.$$

Bez ujmy na všeobecnosti predpokladajme, že $|\sphericalangle ABE| \le |\sphericalangle ABF|$, a teda aj $|\sphericalangle CBE| \ge |\sphericalangle CBF|$, potom

$$|\sphericalangle ABE| + |\sphericalangle ABF| = |\sphericalangle CBE| + |\sphericalangle CBF|,$$
$$2|\sphericalangle ABE| + |\sphericalangle EBF| = |\sphericalangle EBF| + 2|\sphericalangle CBF|$$

a konečne $|\sphericalangle ABE| = |\sphericalangle CBF|$.

Poznámky:

Riešení bolo málo, ale zato v dvoch tretinách prípadov boli správne. Tým dvom, čo neuspeli, odkazujem, nech nezúfajú. A pre ostatných sa aspoň nájde skrytá slovná úloha: Koľko bolo riešení? *(Marta Kossaczká)*

Úloha 8.

(6; 0; 0,00; 0,0)

Máme jehlan[5] *s podstavou* $A_1A_2\dots A_n$ ($n \geq 4$) *a hlavním vrcholem* V. *Nechť rovina* ϱ *protíná hrany* $VA_1, VA_2, \dots, VA_n$ *v bodech* $B_1, B_2, \dots, B_n$. *Dokažte, že pokud jsou mnohoúhelníky* $A_1A_2\dots A_n$ *a* $B_1B_2\dots B_n$ *podobné (vrcholy si odpovídají v tomto pořadí), pak je* ϱ *rovnoběžná s podstavou.*

(Alexander „Olin“ Slávik)

Řešení:
Symbolem $S_{X_1X_2\dots X_k}$ budeme dále značit obsah mnohoúhelníku $X_1X_2\dots X_k$ a symbolem $V_{X_1X_2\dots X_k}$ objem jehlanu $VX_1\dots X_k$. Označme

$$t = \frac{V_{A_1\dots A_n}}{V_{B_1\dots B_n}}.$$

Pokud nazveme v_a, v_b postupně vzdálenosti vrcholu V od roviny podstavy a roviny ρ, můžeme spočítat objemy

$$V_{A_1A_3A_4} = \frac{v_a}{3} S_{A_1A_3A_4}, \quad V_{B_1B_3B_4} = \frac{v_b}{3} S_{B_1B_3B_4},$$

$$V_{A_1\dots A_n} = \frac{v_a}{3} S_{A_1\dots A_n}, \quad V_{B_1\dots B_n} = \frac{v_b}{3} S_{B_1\dots B_n}.$$

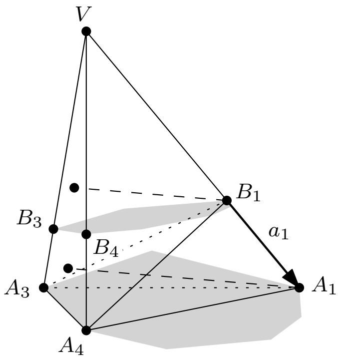
Podobnost podstav $A_1\dots A_n$ a $B_1\dots B_n$ dává shodnost poměrů

$$\frac{S_{A_1A_3A_4}}{S_{B_1B_3B_4}} = \frac{S_{A_1\dots A_n}}{S_{B_1\dots B_n}},$$

a proto i

$$\frac{V_{A_1A_3A_4}}{V_{B_1B_3B_4}} = \frac{V_{A_1\dots A_n}}{V_{B_1\dots B_n}} = t.$$

Nyní spočteme poměr objemů jehlanů $VA_1A_3A_4$ a $VB_1B_3B_4$ jiným způsobem. Označme $a_i = |VA_i| : |VB_i|$ pro $i = 1, \dots, n$. Počítejme objem jehlanu $VA_1A_3A_4$ jako podstava VA_3A_4 krát výška z bodu A_1 děleno třemi. Bod A_1 je od roviny VA_3A_4 přesně a_1-krát dál než bod B_1. Proto $V_{A_1A_3A_4} = a_1V_{B_1A_3A_4}$.



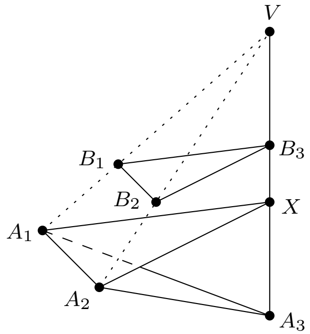
Opakováním úvahy dostáváme

$$V_{A_1A_3A_4} = a_1V_{B_1A_3A_4} = a_1a_3V_{B_1B_3A_4} = a_1a_3a_4V_{B_1B_3B_4},$$

takže $a_1a_3a_4 = t$. Obdobným způsobem bychom dostali i $a_2a_3a_4 = t$, a tak nutně $a_1 = a_2$. Cyklickou záměnou značení nakonec zjistíme, že všechna a_i jsou si rovna. To znamená, že mnohoúhelník $A_1\dots A_n$ vznikne z $B_1B_2\dots B_n$ stejnolehlostí se středem V a koeficientem a_1, takže jsou tyto mnohoúhelníky rovnoběžné.

Poznámky:

Jakkoli se to z řešení zcela nezdá, úloha se ukázala být velmi těžkou a žádný řešitel s ní nepohnul (počítat objemy byl zkrátka megatrik). Došlo sice několik pokusů přesvědčit mě důkazem opačné implikace či tvrzením „když jsou podstavy podobné, tak musí být stejnolehlé“, ale přesto jsem za celé opravování nerozdal ani bod. Kamenem úrazu, se kterým (zdá se) žádný z těchto pokusů o řešení nepočítal, je skutečnost, že pokud bychom v úloze povolili $n = 3$, tvrzení již neplatí.



Uvažme v prostoru dva shodné trojúhelníky $A_1A_2A_3$ a A_1A_2X, které neleží ve stejné rovině. Dále volme vrchol V na přímce XA_3. Kdykoli zvolíme rovinu ρ rovnoběžnou s trojúhelníkem A_1A_2X, bude ze stejnolehlosti výsledný trojúhelník $B_1B_2B_3$ podobný trojúhelníku A_1A_2X, a tedy i s ním shodnému $A_1A_2A_3$, avšak rovina ρ bude rovnoběžná s rovinou A_1A_2X, a nikoli s podstavou $A_1A_2A_3$. *(Mirek Olšák)*

Teorie čísel

3. seriálová série — Vzorové řešení

Úloha 1.

(25; 24; 4,56; 5,0)

Dokažte, že

$$\sum_{d^2 \mid n} \mu(d) = \mu^2(n).$$

(Josef Svoboda)

Řešení:

Nejprve se podívejme, jaká je hodnota levé a pravé strany, pokud je n bezčtvercové. Na pravé straně máme $\mu(n)^2 = (\pm 1)^2 = 1$. Součet na levé straně obsahuje jediný člen, a to $\mu(1) = 1$, neboť $d^2 = 1$ je jediný čtverec, který dělí bezčtvercové n. Rovnost je tedy splněna.

Nyní se zabývejme případem, kdy n je čtvercové. Pravá strana je rovna nule, proto je třeba ověřit, zda je i součet na levé straně nulový. Pro d čtvercová jsou příslušné členy v součtu nulové, stačí proto sčítat přes bezčtvercová d. Zároveň musí každé takové d dělit číslo n ve druhé mocnině, takže může mít ve svém prvočíselném rozkladu jen ta prvočísla, která také dělí n alespoň ve druhé mocnině. Pokud označíme k součin všech takovýchto prvočísel ($k > 1$, neboť n je čtvercové), dostaneme rovnost

$$\sum_{d^2 \mid n} \mu(d) = \sum_{d \mid k} \mu(d).$$

Pravá strana je rovna nule, neboť sumární funkce k μ je rovna nule pro všechna k větší než jedna.

Poznámky:

Většina příchozích řešení byla správně. Občas byl problém s formulací myšlenek týkajících se přechodu od původní sumy k sumě, která se dá dobře sečíst. Vyzdvihl bych přístup *Ondřeje Bínovského*, jenž chytře použil multiplikativitu obou stran rovnosti a dokázal obecnější tvrzení (můžete se také zamyslet, jak vypadá rovnost, když místo dvojky v exponentu dáme obecné k).

(Josef Svoboda)

Úloha 2.

(15; 13; 4,40; 5,0)

Víme, že platí známý vztah

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \Big(\sum_{i=1}^{n} i\Big)^2.$$

Dokažte, že pokud je $\tau(n)$ počet dělitelů čísla n, pak také

$$\sum_{d \mid n} \tau(d)^3 = \Big(\sum_{d \mid n} \tau(d)\Big)^2.$$

(Josef Svoboda)

Řešení:
Jelikož součin i konvoluce zachovávají multiplikativitu a funkce τ je multiplikativní, jsou multiplikativní i funkce na obou stranách rovnosti. Stačí tedy dokázat rovnost pro $n = p^k$. Ale dělitelé čísla p^k jsou $p^0, \ldots, p^k$ a $\tau(p^a) = a + 1$. S využitím rovnosti ze zadání platí:

$$\sum_{d|p^k} \tau(d)^3 = \sum_{a=0}^{k} \tau(p^a)^3 = \sum_{a=0}^{k} (a+1)^3 = \sum_{a=1}^{k+1} a^3 = \Big(\sum_{a=1}^{k+1} a\Big)^2 = \Big(\sum_{d|p^k} \tau(d)\Big)^2.$$

Poznámky:
Bohužel ne příliš mnoho řešitelů využilo toho, že obě strany jsou multiplikativní, a tak obvykle rozkládali n na prvočísla a postupovali indukcí. Naštěstí to ale nevedlo k o moc složitějším výrazům. Přitom ale část zapomněla zmínit možnost $n = 1$, tedy případ, kdy n na prvočísla rozložit nejde. (Všimněte si, že ve vzorovém řešení jsme tento případ zvlášť řešit nemuseli, protože multiplikativní funkce je dána svými hodnotami v číslech p^k. V jedničce se nutně rovná jedné.) Skoro každý, kdo se do úlohy pustil, ji také dotáhl do konce. Tak jen škoda, že to nezkusilo více z vás. *(Štěpán Šimsa)*

Úloha 3.

(20; 18; 4,00; 5,0)

Mějme číslo n. Dokažte, že počet dělitelů čísla n tvaru $4k + 1$ je alespoň takový, jako počet dělitelů čísla n tvaru $4k + 3$. *(Štěpán Šimsa)*

Řešení:
Definujme funkci $\chi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ takto:

$$\chi(n) = \begin{cases} 0, & \text{pro } n \equiv 0 \pmod 2, \\ 1, & \text{pro } n \equiv 1 \pmod 4, \\ -1, & \text{pro } n \equiv 3 \pmod 4. \end{cases}$$

Zadání úlohy říká, že máme pro všechna přirozená čísla n dokázat nerovnost

$$\sum_{d|n} \chi(d) \geq 0.$$

Označme ještě $\eta(n) = (\chi * u)(n)$. Funkce χ je multiplikativní, proto je (podle tvrzení ze seriálu) multiplikativní i η. Stačí proto dokázat $\eta(n) \geq 0$ pro n tvaru p^j, kde p je prvočíslo a j přirozené číslo.

Pokud $p = 2$, je $\eta(2^j) = 1$, protože mocniny dvojky nemají kromě jedničky žádné liché dělitele.

Je-li p tvaru $4k + 1$, pak všichni dělitelé p^j, což jsou nižší mocniny p, jsou také tvaru $4k + 1$, a tvrzení tak platí.

Konečně je-li p tvaru $4k + 3$, pak dělitelé tvaru $4k + 1$ jsou právě všechny sudé mocniny p (včetně nulté; nejvýše j-tá), naopak dělitelé tvaru $4k + 3$ jsou všechny liché mocniny p (nižší než j-tá). Pro lichá j pak dostaneme rovnost počtu obou druhů dělitelů, pro sudá budeme mít o jednoho dělitele tvaru $4k + 1$ více.

Tvrzení tedy platí pro všechny mocniny prvočísel, což se dá pomocí multiplikativity rozšířit na nerovnost pro všechna přirozená čísla.

Poznámky:
Mnoho řešitelů bohužel neřešilo úlohu pomocí znalostí nabytých v seriálu, nýbrž většinou rozebírali různé možnosti, nejprve podobně jako ve vzorovém řešení dokázali úlohu pro mocniny prvočísel a poté pomocí nějakého druhu indukce dokázali úlohu pro všechna n. Při rozebírání možností a diskutování, co se stane, pokud číslo n vynásobíme nějakým novým dělitelem, je bohužel velmi snadné zapomenout na nějaké možnosti, za což jsem občas strhával body. Zároveň si můžete rozmyslet, že všechny myšlenky, které se vyskytly při řešení indukcí a bez zavedení funkce χ, jsou prakticky totožné jako myšlenky ve vzorovém řešení, kde jsou však formálněji sepsané. *(Martin Čech)*

Finální myšmaš

4. jarní série Vzorové řešení

Úloha 1. (31; 25; 3,35; 4,0)

Kuba našel v šuplíku čtverečkovaný papír o rozměrech 20×14. *Několikrát jej přehnul podél stran čtverečků, čímž dostal jediný čtvereček* 1×1. *Kolik nejvíce kusů může vzniknout, pokud Kuba rozstřihne takto složený papír podél*

(a) *úsečky spojující středy dvou protějších stran?* *(Pepa Tkadlec)*

(b) *úsečky spojující středy dvou sousedních stran?* *(Pepa Tkadlec)*

Řešení:

(a) Obarvíme si všechny vodorovné čáry červeně a svislé žlutě. Při každém přehnutí se červené čáry přehnou na červené a žluté na žluté, výsledný čtvereček tedy opět bude mít červené vodorovné a žluté svislé hrany. Jedním střihem tedy přestřihneme buď všechny červené, nebo všechny žluté hrany, čímž rozstřihneme papír na několik proužků – buď 15, nebo 21. Nejvyšší počet částí, na které můžeme papír rozstřihnout, je tedy 21 (zřejmě tohoto počtu dosáhnout umíme).

(b) Tentokrát obarvíme vrcholy čtverečků, a to čtyřmi barvami – tak, aby žádný čtvereček neměl dva vrcholy stejné barvy a aby v každém řádku i sloupci byly použité barvy právě dvě. Všimneme si, že při každém přehnutí na sebe opět položíme vrcholy stejné barvy, výsledný složený papír tedy bude mít všechny stejnobarevné body pod sebou. Odstřižením bodů jedné barvy dostáváme jen čtyři možné podoby rozstříhaného papíru v závislosti na odstřižené barvě. Vznikne tolik částí, kolik je vrcholů odstřižené barvy, nesmíme však zapomenout na „velkou děravou" část. Celkem tak dostaneme nejvýše 89 částí.

Poznámky:

Ve vzorovém řešení jsme úlohu vyřešili pomocí obarvování, protože to je krásná technika, po jejímž použití se úloha hned vzdá. Na ni ovšem žádný z řešitelů nepřišel. Většina řešení však byla správně, úloha se tedy ukázala spíše jednoduchou. Nejčastěji řešitelé využili pozorování, že řezy na dvou sousedních čtverečcích musejí být osově souměrné podle jejich společné hrany, což znamená, že stačí znát směr řezu v jediném čtverečku, abychom mohli určit všechny ostatní. Strhával jsem body za nezdůvodnění toho, že v části (a) vždy vzniknou stejně dlouhé proužky papíru a v části (b) vzniknou „čtvercové díry kolem některých vrcholů". *(Martin Čech)*

Úloha 2. (33; 29; 2,42; 2,0)

(a) *Na straně* AB *konvexního čtyřúhelníku* $ABCD$ *je dán bod* E *tak, že* $EC \parallel AD$ *a* $ED \parallel BC$. *Dokažte, že*

$$S_{CDE} \leq \frac{1}{3} S_{ABCD},$$

kde S_{CDE} *a* S_{ABCD} *značí obsahy příslušných mnohoúhelníků.* *(Martina Vaváčková)*

(b) *Mějme různostranný ostroúhlý trojúhelník ABC. Označme H průsečík jeho výšek. Osa ostrého úhlu svíraného výškami z vrcholů B, C protne strany AB, AC po řadě v bodech P, Q. Nakonec buď M střed strany BC a R průsečík osy vnitřního úhlu u vrcholu A s úsečkou MH. Dokažte, že body A, P, Q, R leží na jedné kružnici.* *(Martina Vaváčková)*

ŘEŠENÍ:

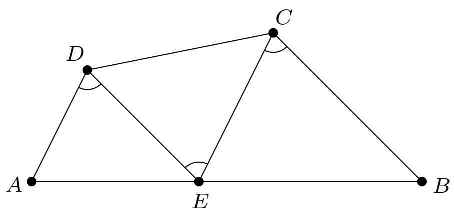
(a) Protože $AD \parallel EC$, je $|\sphericalangle DAE| = |\sphericalangle CEB|$; stejně tak, protože $ED \parallel BC$, je $|\sphericalangle AED| = |\sphericalangle EBC|$. Podle věty *uu* tedy platí $\triangle AED \sim \triangle EBC$. Koeficient podobnosti označme k, neboli $|AD| : |EC| = k$. Střídavé úhly mají stejnou velikost, proto

$$|\sphericalangle ADE| = |\sphericalangle DEC| = |\sphericalangle ECB| = \alpha.$$

Poznamenejme, že $\sin\alpha > 0$. Ekvivalentně upravujme nerovnost ze zadání:

$$\begin{aligned}
S_{CDE} &\le \tfrac{1}{3} S_{ABCD},\\
3S_{CDE} &\le S_{AED} + S_{CDE} + S_{EBC},\\
2S_{CDE} &\le S_{AED} + S_{EBC},\\
2\left(\tfrac{1}{2}\cdot(k|AD|)\cdot|DE|\cdot\sin\alpha\right) &\le \left(\tfrac{1}{2}\cdot|AD|\cdot|DE|\cdot\sin\alpha\right) + \left(\tfrac{1}{2}\cdot(k|AD|)\cdot(k|DE|)\cdot\sin\alpha\right),\\
2k &\le 1 + k^2,\\
0 &\le (k-1)^2.
\end{aligned}$$

Poslední nerovnost platí pro všechna reálná k a provedené úpravy byly ekvivalentní, proto platí i původní nerovnost.

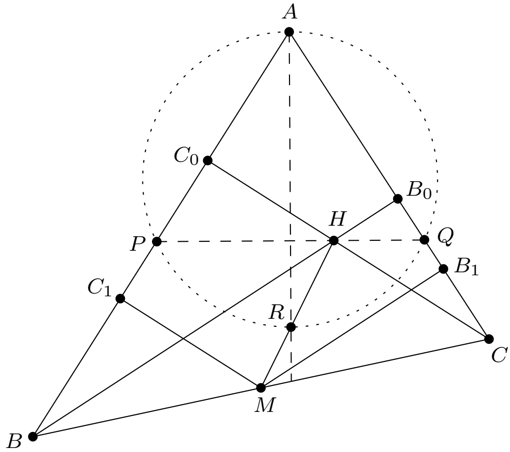


(b) Označme B_0, C_0 postupně paty výšek z vrcholů B, C. Ukážeme-li, že přímky RP, RQ jsou kolmicemi na strany AB, AC, již z toho plyne dokazované – body A, P, R, Q leží na kružnici nad průměrem AR. Konkrétně tedy dokážeme, že následující čtveřice přímek se protne v jednom bodě: osa úhlu u vrcholu A, přímka HM, kolmice na AB procházející P a kolmice na AC procházející Q.

Spočteme $|\sphericalangle HPC_0| = 90° - |\sphericalangle C_0HP| = 90° - |\sphericalangle B_0HQ| = |\sphericalangle B_0QH|$. (V prostřední rovnosti jsme využili skutečnosti, že OP je osou úhlu.) Díky tomu je trojúhelník APQ rovnoramenný. Tudíž se osa úhlu u vrcholu A a požadované dvě kolmice protnou v jednom bodě. Zbývá ukázat, že tento průsečík leží na přímce HM.

Nakonec ještě označme B_1, C_1 postupně kolmé projekce bodu M na strany AC, AB. Jelikož jsou trojúhelníky CC_0B a BB_0C pravoúhlé, je B_1 středem úsečky B_0C a C_1 středem úsečky C_0B. Dále platí $|\sphericalangle HCB_0| = 90° - |\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle HBC_0|$, navíc jsou oba trojúhelníky HCB_0, HBC_0 pravoúhlé, a proto podobné. V obou těchto podobných trojúhelnících je přímka PQ osou úhlu, proto $|B_0Q| : |B_1Q| = |C_0P| : |C_1P|$.

Kolmice na stranu AB vedená bodem P dělí úsečku HM v poměru $|C_0P| : |C_1P|$; ve stejném poměru ji dělí i kolmice vedená bodem Q na stranu AB. Proto tyto dvě kolmice protínají HM v jednom bodě, což jsme chtěli dokázat.



POZNÁMKY:

S první úlohou si poradil prakticky každý, kdo se do ní pustil. Zásadní bylo všimnout si podobnosti trojúhelníků. Pak už stačilo vyjádřit obsahy a dojít ke známé nerovnosti. Jen mě zarazilo, že několik řešitelů počítalo obsah trojúhelníku jako dvojnásobek platného vzorce $S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$, kde γ je úhel mezi stranami a, b. Na další postup chyba neměla vliv, ale ta polovina tam opravdu patří.

Druhá úloha naopak dělala velké problémy. I došlých řešení bylo poskrovnu, navíc velká část z nich skončila ještě před dotažením důkazu. Zaujalo mě, že z těch správných řešení žádná dvě nebyla stejná, každý řešitel postupoval jiným způsobem. Využívali stejnolehlost, osovou symetrii i další zobrazení a více či méně komplikovaně nakonec došli k cíli. *(Bára Kociánová)*

Úloha 3.

(29; 23; 2,48; 2,0)

(a) *Nalezněte funkci definovanou na reálných číslech, jejímž grafem je lomená čára[8] a která nabývá každé reálné hodnoty právě třikrát.* *(David Hruška)*

(b) *Pro která přirozená čísla n existuje polynom f stupně n a nekonečná posloupnost navzájem různých přirozených čísel $a_1, a_2, \ldots$ taková, že platí $f(a_1) = 0$ a $f(a_i) = a_{i-1}$ pro každé $i > 1$?* *(David Hruška)*

ŘEŠENÍ:

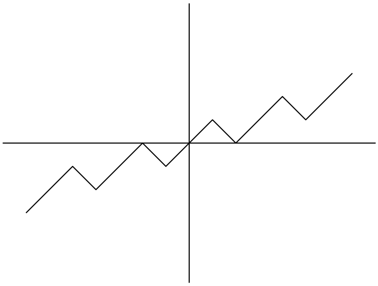
(a) (PODĽA JÁNA JURKU)

Zadanie splňuje funkcia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definovaná tak, že pre každé $k \in \mathbb{Z}$ platí:

$$f(x) = \begin{cases} x - 2k & \text{pre } 3k - 1 \le x \le 3k + 1, \\ -x + 2 + 4k & \text{pre } 3k + 1 \le x \le 3k + 2. \end{cases}$$

Graf tejto funkcie vyzerá takto:

[8] *Lomená čára* je množina libovolně (tedy i nekonečně) mnoha na sebe navazujících úseček.



Z obrázku je jasné, že táto funkcia vyhovuje zadaniu.

(b) (Podľa Mateja Konečného)
Pre $n = 1$ existuje napríklad polynóm $f(x) = x - 1$ s postupnosťou $a_i = i$. Sporom ukážeme, že pre $n \geq 2$ taký polynóm nenájdeme.

Nech teda existuje taký polynóm f, ktorý splňuje naše zadanie. Podľa znamienka pri vedúcom koeficiente je náš polynóm od nejakého x buď stále kladný, alebo stále záporný. Ak by bol od tohto x stále záporný, tak by náš polynóm f mohol nadobúdať iba konečne veľa kladných hodnôt, čo je spor. Keďže je náš polynóm stupňa aspoň dva, potom aj polynóm $f(x) - x$ je od nejakého x_0 stále kladný. Tým pádom pre všetky x väčšie ako x_0 platí $f(x) > x$.

Označme i_0 také prirodzené číslo, že pre všetky prirodzené i väčšie ako i_0 platí, že aj a_i je väčšie ako x_0. (Poznamenajme, že také i_0 existuje, pretože a_i je nekonečná postupnosť rôznych prirodzených čísel a tých, ktoré sú menšie ako x_0, je konečne veľa.)

Pozrime sa na našu postupnosť $a_{i_0+1}, a_{i_0+2}, \ldots$. Zo zadania platí, že $a_{i_0+j} = f(a_{i_0+j+1})$ pre všetky prirodzené j, a keďže a_{i_0+j+1} je väčšie ako x_0, tak platí aj $f(a_{i_0+j+1}) > a_{i_0+j+1}$. Podobnou úvahou dostávame, že $a_{i_0+j} > a_{i_0+j+1} > a_{i_0+j+2} > \cdots$. Keďže neexistuje nekonečná klesajúca postupnosť prirodzených čísel, tak sa dostávame k sporu, že taký polynóm $f(x)$ existuje.

Poznámky:
Komentár k (a): Došlo mi veľa rozmanitých predpisov funkcií, ktoré vyhovovali zadaniu. Väčšina z vás mala obrázok podobný tomu, ktorý je uvedený vo vzoráku.

Komentár k (b): Chcel by som vás pochváliť, že ste sa nezľakli zadania a pokúsili sa ho vyriešiť. Všetci ste to mali viac-menej správne, čo ma potešilo. *(Viktor Szabados)*

Úloha 4.

(39; 20; 2,05; 2,0)

V některých k políčkách tabulky 10×10 *je neviditelným inkoustem nakreslená jedna úhlopříčka. Čuch chce zjistit, která políčka to jsou. Když ukáže shora či zdola na nějaký sloupec nebo zleva či zprava na nějaký řádek, dozví se, kudy by z tabulky vyletěl paprsek světla, kdyby do ní vletěl právě z onoho směru a odrážel se pouze od vyznačených úhlopříček jako od zrcadel. Kolikrát nejméně musí Čuch do tabulky ukázat, aby potom mohl vždy s jistotou určit, kde se zrcátka nacházejí, pokud*

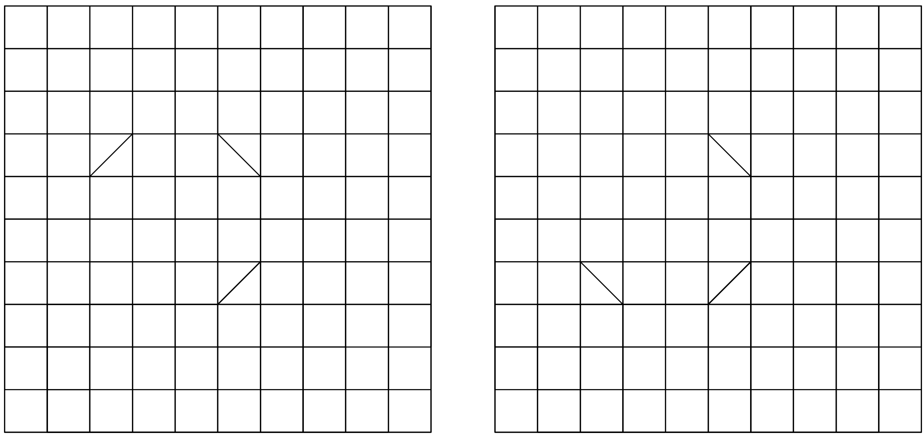
(a) $k = 2$, *(Martin Čech)*

(b) $k = 3$? *(David Hruška)*

Řešení:
(a) Nejprve dokážeme, že deset ukázání nestačí. Po devíti ukázáních totiž určitě najdeme alespoň jeden sloupec nebo řádek, v němž Čuch neukázal na alespoň dvě políčka. Jsou-li zrcátka zrovna na těchto políčkách, pak Čuch nemůže jedním ukázáním zjistit, jak jsou natočená.

Nyní dokážeme, že jedenáct pokusů stačí. Čuch bude postupně odshora ukazovat na jednotlivé řádky. Jakmile narazí na zrcátko (což je právě tehdy, když paprsek nevyletí na druhé straně), ukáže na příslušný řádek z druhé strany. Tím určí počet a polohu zrcátek v tomto řádku. Pokud našel pouze jedno zrcátko, pokračuje dále, dokud nenarazí na řádek se zrcátkem. Polohu tohoto zrcátka už umí jednoznačně určit. Ukázal tedy na devět řádků nejvýše jednou a na jeden dvakrát, což je dohromady nanejvýš jedenáct pokusů.

(b) Čuchovi se to nemusí podařit, ať svítí jakkoli – existují totiž dvě různá rozmístění zrcátek taková, že každý vyslaný paprsek vyletí z obou na stejném místě. Jedna z mnoha možných dvojic je na obrázku:



Poznámky:
Část (a) se nakonec ukázala skoro těžší než část (b). Bylo to hlavně proto, že jsem se rozhodl být přísný a strhávat bod za neúplný důkaz toho, že deset ukázání nestačí. Tvrzeními typu „nejvýhodnější bude …“ nebo „nejhorší, co se může stát, je, že …“ začínají přesně ty části důkazů, za které se nejčastěji strhávají body – je tedy potřeba je pořádně odůvodnit nebo vysvětlit (spousta řešitelů používajících tyto výrazy navíc dospěla k závěru, že u tří zrcátek je potřeba 18–19 pokusů, přestože většinou to jde na 12). Řešení části (b) bylo možná trochu nečekané, ale nebylo to tak těžké – při rozebírání možností se na něj nutně muselo narazit. Překvapivě se však našlo několik zkušených řešitelů, kteří se pokusili dokázat, že dvanáct ukázání stačí. Za to jsem uděloval jeden bod. *(Martin Čech)*

Úloha 5.

(24; 20; 3,50; 4,5)

(a) *Mějme posloupnost přirozených čísel $a_1, a_2, \ldots$ takovou, že každé přirozené číslo se v ní nachází právě jednou. Dokažte, že pak existují přirozená čísla l, m, pro která platí $1 < l < m$ a $a_1 + a_m = 2a_l$.* *(Alča Skálová)*

(b) *Rozmístěte čísla $1, 2, \ldots, n$ do řady tak, aby aritmetický průměr žádných dvou z nich neležel mezi nimi.* *(Tomáš „Šavlík“ Pavlík)*

Řešení:
(a) Najdeme nejmenší index l takový, že $a_l > a_1$, a dále budeme hledat index m, aby platila rovnost ze zadání: $a_1 + a_m = 2a_l$, kterou si upravíme na $a_m = 2a_l - a_1$. Jelikož je v posloupnosti

každé přirozené číslo právě jednou, je v ní i toto číslo a_m. Platí $a_l > a_1$, proto $2a_l - a_1 > a_l$, tedy $a_m > a_l > a_1$. Protože l je nejmenší index čísla většího než a_1, je index m určitě větší. V libovolné posloupnosti přirozených čísel tedy umíme najít indexy l, m takové, že platí $1 < l < m$ a zároveň $a_1 + a_m = 2a_l$.

(b) Konečné posloupnosti čísel, ve které mezi žádnými dvěma čísly neleží jejich aritmetický průměr, budeme nazývat *vhodné*. Vhodnou n-prvkovou permutací rozumíme vhodnou n-prvkovou posloupnost, která obsahuje každé číslo $1, \ldots, n$ právě jednou. Automaticky je 1-prvková permutace vhodná, jelikož ani neobsahuje dva různé členy.

Z n-prvkové vhodné permutace $a_1, \ldots, a_n$ sestrojíme $2n$-prvkovou vhodnou permutaci. Pro dané x, y, z je výrok „y je aritmetickým průměrem x a z“ ekvivalentní výroku „$2y$ je aritmetickým průměrem $2x$ a $2z$“ a rovněž výroku „$2y - 1$ je aritmetickým průměrem $2x - 1$ a $2z - 1$“. Proto je vhodná i posloupnost

$$2a_1, 2a_2, \ldots, 2a_n \quad \text{a stejně tak} \quad 2a_1 - 1, 2a_2 - 1, \ldots, 2a_n - 1.$$

Zbývá si uvědomit, že položením obou vhodných posloupností za sebe získáme stále vhodnou posloupnost – první posloupnost totiž obsahuje pouze sudá čísla a druhá lichá, nemá tedy smysl uvažovat průměry napříč oběma posloupnostmi. Navíc je zde použito právě jednou každé číslo od 1 do $2n$, tedy jedná se o kýženou $2n$-prvkovou permutaci.

Opakováním tohoto postupu vyřešíme úlohu pro všechna n, která jsou mocninou dvojky. Pro n různé od mocniny dvojky stačí uvážit konstrukci pro nejbližší vyšší mocninu dvojky a následně nadbytečné prvky z permutace odebrat, čímž se její vhodnost neporuší.

Poznámky:

K části (a): Některá řešení se více či méně podobala tomu výše uvedenému, které mi připadá nejsnadnější. Zbytek většinou našel někde v posloupnosti číslo $a_1 + 1$ a postupoval sporem. Zjistil, že v nevyhovující posloupnosti by všechna $a_1 + 2^k$, $k > 0$, musela ležet před $a_1 + 1$. Což ale nelze, protože bychom před $a_1 + 1$ měli nekonečně mnoho členů. Oba postupy jsou správné a většina řešitelů si vysloužila dva body.

K části (b): I v této části byly dva oblíbené způsoby řešení. Kromě tohoto indukčního se řešitelé pouštěli do důkazu správnosti rekurzivního algoritmu, v němž v každém kroku rozdělili část posloupnosti na dvě podle zbytků po dělení mocninou dvou. Ti, kteří se nezamotali v indexech a úvahách, dostali plný počet bodů. *(Bára Kociánová)*

Úloha 6.

(35; 32; 2,63; 2,0)

(a) *Některé body na přímce p jsou fešné. Navíc platí: vezmeme-li libovolný bod z p, pak jeho vzdálenost od alespoň jednoho z fešných bodů je iracionální. Kolik nejméně může být fešných bodů?* *(Tomáš „Šavlík“ Pavlík)*

(b) *Řešte tutéž úlohu, je-li p rovina (nikoli přímka).* *(Tomáš „Šavlík“ Pavlík)*

Řešení:

(a) Jeden fešný bod nám nestačí, pretože určite nájdeme bod v racionálnej vzdialenosti od neho (napr. on sám). Ukážeme, že dva fešné body stačia.

Zvoľme ľubovoľné dva body priamky, ktorých vzdialenosť je iracionálna (napr. $\sqrt{2}$). Ak má ľubovoľný bod z priamky racionálnu vzdialenosť x k jednému z nich, jeho vzdialenosť od druhého fešného bodu je (podľa vzájomnej polohy bodov) buď $x + \sqrt{2}$, $\sqrt{2} - x$, alebo $x - \sqrt{2}$, ale vo všetkých troch prípadoch dostaneme iracionálne číslo.

(b) Podobne ako v a), jeden fešný bod nestačí. Rovnako nestačia ani dva fešné body (vo vzdialenosti x), pretože vieme zostrojiť rovnoramenný trojuholník, kde základňu tvorí spojnica fešných bodov a ramená majú dĺžku $\lceil x \rceil$. Posledný vrchol má teda racionálnu vzdialenosť od oboch fešných bodov. Ukážeme, že nám postačia tri body.

Označme za fešné body $(0,0)$, $(1,0)$ a $(\sqrt{2},0)$ a pre spor predpokladajme, že nejaký bod (x,y) má od všetkých troch racionálne vzdialenosti – označme ich postupne k, l a m. Potom dostávame:

$$\begin{aligned} k^2 &= x^2+y^2, \\ l^2 &= (x-1)^2+y^2 = x^2+y^2+1-2x, \\ m^2 &= \left(x-\sqrt{2}\right)^2+y^2 = x^2+y^2+2-2\sqrt{2}\,x. \end{aligned}$$

Z prvých dvoch vzťahov a racionality k a l dostávame, že aj x musí byť racionálne, a teda $\sqrt{2}\,x$ je iracionálne. Keď to ale dosadíme do posledného vzťahu, dostaneme, že m^2 musí byť iracionálne, čo je spor s predpokladom, že m je racionálne.

Vidíme teda, že takto zvolené fešné body zadaniu vyhovujú.

Poznámky:

Úloha (alebo aspoň časť (a)) nebola ťažká, čomu odpovedá aj to, že takmer všetky riešenia boli správne. Niektorí ste síce zabudli spomenúť, prečo jeden bod nestačil, ale body som za to nestrhával. Za konštatovanie, že musia byť 2 fešné body, ale bez patričného odôvodnenia, ste mohli dostať len jeden bod.

Ak ste poslali aj časť (b) (a nezamotali sa v dôkaze), tak som vám to väčšinou uznal aj napriek malým problémom v značení alebo znamienkach. Opäť, za obyčajné konštatovanie, že musia byť tri fešné body, ktoré ste ale nedokázali (aspoň trochu uveriteľne), bol iba jeden bodík.

(Peter „πtr“ Korcsok)

Úloha 7.

(24; 23; 1,92; 2,0)

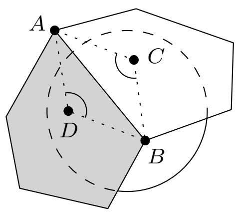
(a) *Najděte konvexní mnohostěn, jehož stěny lze obarvit černě a bíle tak, aby černých stěn bylo více než bílých, ale žádné dvě černé stěny neměly společnou hranu.* *(Pepa Tkadlec)*

(b) *Dokažte, že žádnému takovému mnohostěnu nelze vepsat kouli.*[9] *(Pepa Tkadlec)*

Řešení:

(a) Mnohostěn můžeme zkonstruovat například takto: Vezmeme krychli, která je uvnitř černá a na povrchu bílá. Poté odřízneme každý roh krychle rovinou. Tím dostaneme těleso, které je jistě konvexní, má šest bílých a osm černých stěn a žádné dvě černé stěny se nedotýkají hranou.

(b) Předpokládejme pro spor, že máme nějaký mnohostěn, který splňuje podmínky a přitom má vepsanou kouli. Vezměme nějaké dvě stěny mnohostěnu, které se dotýkají hranou AB. Body dotyku vepsané koule s těmito dvěma stěnami označme C a D. Trojúhelníky ABC a ABD jsou shodné podle věty *sss*, neboť délka různých tečen (jako úseček) z bodu ke kouli je stejná.



[9] Koule *vepsaná* mnohostěnu se dotýká všech jeho stěn.

Nyní zvlášť pro černé a zvlášť pro bílé stěny spočítáme součet úhlů ACB za všechny hrany mnohostěnu. Při každé hraně máme buď jednu černou a jednu bílou stěnu, nebo dokonce dvě bílé, výsledný součet u černých stěn tedy (díky shodnosti) určitě nebude vyšší než součet u bílých stěn. Přitom je ale černých stěn více než bílých a součet úhlů u každého z bodů dotyku je $360°$, takže musí být součet úhlů u černých stěn alespoň o $360°$ větší než u těch bílých. To je spor.

Poznámky:

Naprostá většina z vás si poradila s částí (a). Objevily se rozmanité tvary, nejčastěji krychle bez rohů nebo dva víceboké jehlany vzájemně k sobě šikovně přilepené podstavami. Jako bonus si můžete rozmyslet, kolik nejméně stěn je třeba. Bohužel nikdo nevyřešil část (b), která přitom nevyžadovala žádné složité techniky, jen pěknou myšlenku. *(Josef Svoboda)*

2. jarní série – Iracionální čísla

Výsledková listina

1.–3.	*František*	*Couf*	1	GZborovPH	3 3 – 5 5 5 5 5	25	**25,00**
1.–3.	*Martin*	*Raszyk*	4	G Karviná	3 3 3 5 5 5 5 5	25	**25,00**
1.–3.	*Radovan*	*Švarc*	3	G ČTřebová	3 0 3 5 5 5 5 5	25	**25,00**
4.	*Václav*	*Rozhoň*	3	GJirsíkaČB	3 3 – 5 5 5 5 –	23	**23,63**
5.	*Eduard*	*Batmendijn*	3	CGStĽubovňa	3 – – 5 5 5 5 –	23	**23,58**
6.	*Filip*	*Bialas*	1	GOpatovPH	3 3 – 5 5 5 – –	21	**23,42**
7.	*Pavel*	*Turek*	1	GTomkovaOL	3 3 3 5 5 5 1 –	21	**23,04**
8.	*Jakub*	*Löwit*	2	GČeskoliPH	3 0 3 5 5 5 2 –	21	**22,20**
9.–10.	*Vojtěch*	*Suchánek*	3	GJarošeBO	3 3 3 5 5 5 – –	21	**22,17**
9.–10.	*Mikuláš*	*Zindulka*	3	GMikul23PL	3 3 – 5 5 5 – –	21	**22,17**
11.	*Zuzana*	*Tréglová*	1	G Žatec	3 3 2 5 – 5 – –	18	**21,88**
12.	*Martin*	*Surma*	3	GJWolkraPV	3 3 3 5 5 5 – –	21	**21,76**
13.	*Jan*	*Václavek*	2	G Ústí n O	3 3 3 5 5 – – –	19	**21,52**
14.	*Václav*	*Steinhauser*	0	ZŠVranéNVl	3 3 1 5 5 – – –	17	**21,40**
15.	*Minh Tri*	*Pham*	2	NPorg	3 3 3 – 5 5 – –	19	**21,25**
16.	*Karolína*	*Kuchyňová*	3	GMLerchaBO	3 3 3 5 5 5 – –	21	**21,21**
17.	*Matěj*	*Konečný*	3	G Jírov ČB	3 3 3 5 5 5 – –	21	**21,14**
18.	*Martin*	*Hora*	4	GMikul23PL	3 – – 5 5 5 5 –	23	**20,80**
19.	*Jan*	*Šorm*	2	GJarošeBO	3 3 3 5 5 – – –	19	**20,77**
20.	*Jan*	*Jurka*	3	GMLerchaBO	3 3 3 5 5 – – –	19	**20,55**
21.	*Jan*	*Soukup*	3	G Klatovy	3 3 3 5 5 5 4 –	22	**20,50**
22.	*Markéta*	*Calábková*	3	GJŠkodyPŘ	3 3 2 5 4 5 – –	20	**20,47**
23.	*Hedvika*	*Ranošová*	0	GBudějovPH	3 3 3 5 – – – –	14	**20,44**
24.	*Daniel*	*Pišťák*	2	GZborovPH	3 3 3 3 5 5 – –	19	**20,00**
25.	*Libor*	*Drozdek*	3	G Holešov	3 3 3 – 4 5 – –	18	**19,71**
26.	*Jakub*	*Svoboda*	4	G KomHavíř	3 3 3 5 5 5 1 3	21	**19,54**
27.	*Tomáš*	*Kuzma*	2	GAB Senec	3 3 3 3 4 – – –	16	**19,37**
28.	*Martin*	*Kopřiva*	2	GMikul23PL	3 3 3 5 2 – – –	16	**19,28**
29.	*Matyáš*	*Grof*	3	GZborovPH	3 3 3 2 4 4 2 1	17	**19,00**
30.	*Marián*	*Poppr*	3	GJNerudyPH	3 3 3 5 1 5 – –	19	**17,97**
31.	*Katarína*	*Krajčiová*	3	GAlejKošic	3 3 3 – 5 5 – –	19	**17,91**
32.	*Antonín*	*Češík*	4	SPŠElek PA	3 3 3 5 – 5 – –	19	**17,70**
33.	*Jan*	*Krejčí*	4	G Bílovec	3 3 3 5 5 2 – –	19	**17,62**
34.	*Dominik*	*Krasula*	1	G Krnov	3 0 3 5 1 1 1 –	13	**17,15**
35.	*Marian*	*Poljak*	2	GJŠkodyPŘ	3 3 2 – 5 – – –	13	**16,90**
36.	*Tomáš*	*Fiala*	3	GLedečNSáz	3 0 3 4 5 – – –	15	**16,69**
37.–38.	*Markéta*	*Horová*	2	GMikul23PL	3 3 3 – 3 – – –	12	**16,00**
37.–38.	*Vojtěch*	*Lukeš*	2	G LPika PL	3 3 1 – 5 – – –	12	**16,00**
39.	*Lukáš*	*Kubacki*	1	GNadKavaPH	3 3 3 – – – 1 –	10	**15,89**

40.	*Lukáš*	*Černý*	2	NPorg	3 3 3 – 2 – – –	11	**15,05**
41.	*Tereza*	*Kislingerová*	1	G Klatovy	3 3 3 – – – – –	9	**14,89**
42.	*Jiří*	*Zeman*	4	GLesníZlín	3 3 – 5 5 – – –	16	**14,56**
43.–45.	*Anh*	*Le Hoang*	2	GJarošeBO	3 3 1 0 2 0 – 0	9	**13,00**
43.–45.	*Jaroslav*	*Stránský*	2	G Tišnov	3 0 3 – 2 1 – –	9	**13,00**
43.–45.	*Šimon*	*Tabačko*	2	EvG Košice	1 0 2 1 5 – – –	9	**13,00**
46.	*Jakub*	*Hledík*	3	GSŘMRSkuteč	3 – 3 – 5 – – –	11	**12,57**
47.	*Zuzana*	*Šimečková*	3	GCON ČesBuď	3 – 3 – 5 – – –	11	**12,33**
48.	*Peter Pavel Arthur*	*Petráš*	2	ŠpMNDaG BA	– 3 1 – 4 – – –	8	**11,89**
49.	*Zuzana*	*Svobodová*	2	G FrýdlNOs	3 3 3 0 – – – –	9	**11,75**
50.	*Jaromír*	*Mielec*	1	GVolgogrOS	3 3 2 – – – – –	8	**11,50**
51.–53.	*Marek*	*Černý*	3	G Chrudim	– 3 3 – 3 – – –	9	**11,39**
51.–53.	*Marek*	*Štěpán*	3	SPŠE Fren	3 3 – – 2 – 1 –	9	**11,39**
51.–53.	*Peter*	*Vook*	3	GPošKošice	3 3 3 – – – – –	9	**11,39**
54.	*Robert*	*Keřlík*	4	GOPavla PH	3 3 – 2 2 1 1 –	11	**11,00**
55.	*Patricie*	*Klosse*	2	G ČKrumlov	3 1 3 – – – – –	7	**10,72**
56.	*Jiří*	*Štrincl*	3	GSRandyJN	3 0 – 5 – – – –	8	**10,30**
57.–58.	*Lukáš*	*Honsa*	2	G Jírov ČB	3 3 – – – – – –	6	**9,48**
57.–58.	*Matěj*	*Seidl*	2	PORG PH	3 0 3 – – – – –	6	**9,48**
59.	*Lukáš*	*Sadlek*	3	G Čadca	3 1 3 – – – – –	7	**9,17**
60.–62.	*Petr*	*Jakubčík*	0	PORG PH	3 0 – – – – – –	3	**8,34**
60.–62.	*Vojtěch*	*Lanz*	0	GZborovPH	3 0 0 0 – 0 – –	3	**8,34**
60.–62.	*Přemysl*	*Šťastný*	0	G Žamberk	3 – – – – – – –	3	**8,34**
63.	*Ivona*	*Hrivová*	4	GOkrŽilina	3 2 3 – 2 – – –	10	**8,29**
64.–65.	*Andrea*	*Kučerová*	2	G ČKrumlov	3 0 2 – – – – –	5	**8,17**
64.–65.	*Timotej*	*Šujan*	2	GJarošeBO	– – – – 5 – – –	5	**8,17**
66.	*Zuzana*	*Vlasáková*	4	G Rumburk	3 3 3 – – – – –	9	**7,43**
67.–70.	*Kateřina*	*Nová*	1	G Vimperk	3 – – – – – – –	3	**6,79**
67.–70.	*Jáchym*	*Solecký*	1	PORG PH	3 0 – – – – – –	3	**6,79**
67.–70.	*Marie*	*Vonzino*	1	GTomkovaOL	3 – – – – – – –	3	**6,79**
67.–70.	*Ondřej*	*Zeman*	3	G Lovosice	– – – – – 5 – –	5	**6,79**
71.–73.	*Michaela*	*Brezinová*	2	GKomTrebiš	3 1 – – – – – –	4	**6,76**
71.–73.	*Jiřina*	*Duspivová*	2	G Kralupy	3 – 1 – – – – –	4	**6,76**
71.–73.	*Jakub*	*Marták*	2	G GolNitra	2 0 1 – 0 0 1 –	4	**6,76**
74.	*Michaela*	*Brabcová*	2	G Jírov ČB	3 – – – – – – –	3	**5,27**
75.	*Adam*	*Gálik*	4	GOlivuPopr	3 0 0 1 1 0 0 0	5	**5,00**
76.	*Jakub*	*Sláma*	3	GOpatovPH	3 – – – – – – –	3	**4,23**
77.	*Jan*	*Erhart*	3	GFXŠaldyLI	– – 3 – – – – –	3	**3,21**
78.	*Kristýna*	*Ilievová*	3	G Milevsko	3 – – – – – – –	3	**2,87**
79.	*Matěj*	*Coufal*	1	G HavlBrod	0 1 – – 0 – – –	1	**2,67**

3. jarní série – Stereometrie

Výsledková listina

1.	*Pavel*	*Turek*	1	GTomkovaOL	3 3 3 5 5 5 5 –	23	**24,07**
2.	*František*	*Couf*	1	GZborovPH	3 3 3 5 5 5 5 –	23	**23,94**
3.	*Filip*	*Bialas*	1	GOpatovPH	3 3 3 5 5 – – –	19	**22,43**
4.	*Mikuláš*	*Zindulka*	3	GMikul23PL	2 3 – 5 5 5 – –	20	**21,41**
5.	*Radovan*	*Švarc*	3	G ČTřebová	3 3 – 5 5 5 5 –	23	**21,23**
6.	*Hedvika*	*Ranošová*	0	GBudějovPH	1 3 1 5 5 – – –	15	**21,07**
7.	*Martin*	*Raszyk*	4	G Karviná	3 3 3 5 5 5 5 –	23	**20,50**
8.	*Katarína*	*Krajčiová*	3	GAlejKošic	3 3 3 5 5 5 – –	21	**20,18**
9.	*Martin*	*Surma*	3	GJWolkraPV	3 3 3 5 5 – – –	19	**20,05**
10.	*Vojtěch*	*Lukeš*	2	G LPika PL	3 3 3 – 5 1 – –	15	**18,59**
11.	*Václav*	*Rozhoň*	3	GJirsíkaČB	3 3 3 5 – 2 – –	16	**18,15**
12.	*Eduard*	*Batmendijn*	3	CGStĽubovňa	3 3 – 5 1 4 – –	16	**17,98**
13.	*Tomáš*	*Fiala*	3	GLedečNSáz	3 3 3 – 5 1 – –	15	**16,69**
14.	*Petr*	*Jakubčík*	0	PORG PH	3 3 3 – – – – –	9	**16,42**
15.	*Václav*	*Steinhauser*	0	ZŠVranéNVl	2 0 3 5 – – – –	10	**16,06**
16.	*Jakub*	*Svoboda*	4	G KomHavíř	3 3 3 4 5 1 – –	18	**15,93**
17.–18.	*Tomáš*	*Kuzma*	2	GAB Senec	2 2 – 2 5 – – 0	11	**15,05**
17.–18.	*Šimon*	*Tabačko*	2	EvG Košice	3 3 3 – – 2 – –	11	**15,05**
19.	*Tereza*	*Kislingerová*	1	G Klatovy	3 3 3 – – – – –	9	**14,89**
20.	*Jakub*	*Löwit*	2	GČeskoliPH	1 3 3 – 5 0 – –	12	**14,53**
21.	*Karolína*	*Kuchyňová*	3	GMLerchaBO	3 3 3 5 – – – –	14	**14,39**
22.	*Jan*	*Soukup*	3	G Klatovy	2 2 3 5 5 1 – –	17	**14,26**
23.	*Vojtěch*	*Suchánek*	3	GJarošeBO	1 3 3 – – 5 – –	12 – *i*	**14,20**
24.	*Vojtěch*	*Lanz*	0	GZborovPH	0 0 1 0 5 – – 0	6	**13,03**
25.–26.	*Marian*	*Poljak*	2	GJŠkodyPŘ	3 3 3 – – – – –	9	**13,00**
25.–26.	*Jan*	*Václavek*	2	G Ústí n O	3 3 3 – – – – –	9	**13,00**
27.	*Martin*	*Kopřiva*	2	GMikul23PL	3 3 3 – – – – –	9	**12,87**
28.	*Lukáš*	*Kubacki*	1	GNadKavaPH	1 3 3 – – – – –	7	**12,64**
29.	*Daniel*	*Pišťák*	2	GZborovPH	3 2 – 5 – 1 – –	11	**12,45**
30.	*Jan*	*Jurka*	3	GMLerchaBO	3 2 – 5 – – – –	10	**12,31**
31.	*Jan*	*Šorm*	2	GJarošeBO	3 3 3 – – – – –	9	**11,62**
32.–33.	*Matyáš*	*Grof*	3	GZborovPH	3 3 3 – – 0 0 0	9	**11,39**
32.–33.	*Peter*	*Vook*	3	GPošKošice	3 3 3 – – – – –	9	**11,39**
34.–36.	*Kateřina*	*Nová*	1	G Vimperk	1 2 3 – – – – –	6	**11,38**
34.–36.	*Jáchym*	*Solecký*	1	PORG PH	2 3 1 – – – – –	6	**11,38**
34.–36.	*Zuzana*	*Tréglová*	1	G Žatec	3 2 1 – – – – –	6	**11,38**
37.	*Jakub*	*Hledík*	3	GSŘMRSkuteč	3 3 3 – – 0 – –	9	**10,50**
38.	*Jan*	*Kadlec*	3	G Klatovy	2 2 3 5 – – – –	12	**10,46**
39.	*Antonín*	*Češík*	4	SPŠElek PA	3 3 3 – – 3 – –	12	**10,35**

40.	*Matěj*	*Konečný*	3	G Jírov ČB	1 3 1 – 5 – – –	10	**10,26**
41.	*Zuzana*	*Svobodová*	2	G FrýdlNOs	1 2 3 1 – – – –	7	**9,51**
42.–44.	*Markéta*	*Horová*	2	GMikul23PL	2 1 3 – – – – –	6	**9,48**
42.–44.	*Patricie*	*Klosse*	2	G ČKrumlov	2 3 1 0 – – – –	6	**9,48**
42.–44.	*Andrea*	*Kučerová*	2	G ČKrumlov	2 3 1 0 – – – 0	6	**9,48**
45.	*Zuzana*	*Šimečková*	3	GCON ČesBuď	2 3 3 – – 0 – –	8	**9,21**
46.	*Marián*	*Poppr*	3	GJNerudyPH	– 3 1 1 5 0 – –	10	**8,74**
47.	*Jiřina*	*Duspivová*	2	G Kralupy	2 – 3 – – – – –	5	**8,17**
48.	*Lukáš*	*Sadlek*	3	G Čadca	3 0 3 – – – – –	6	**8,00**
49.	*Minh Tri*	*Pham*	2	NPorg	3 2 – – – – – –	5	**7,71**
50.	*Martin*	*Hora*	4	GMikul23PL	– – – 5 5 0 – –	10	**5,71**
51.	*Markéta*	*Calábková*	3	GJŠkodyPŘ	– – – – 5 – – –	5	**5,51**
52.	*Dominik*	*Krasula*	1	G Krnov	3 – – – – – – –	3	**5,47**
53.	*Jakub*	*Marták*	2	G GolNitra	0 2 1 0 – 0 – 0	3	**5,27**
54.	*Jakub*	*Sláma*	3	GOpatovPH	2 1 – – – – – –	3	**4,23**
55.	*Ivona*	*Hrivová*	4	GOkrŽilina	3 0 2 – – – – –	5	**3,92**
56.	*Jiří*	*Zeman*	4	GLesníZlín	1 3 – – – – – –	4	**3,25**
57.	*Jiří*	*Štrincl*	3	GSRandyJN	2 0 – – – 0 – –	2	**2,88**
58.	*Kristýna*	*Ilievová*	3	G Milevsko	3 – – – – – – –	3	**2,87**
59.	*Adam*	*Gálik*	4	GOlivuPopr	2 0 0 0 0 0 0 0	2	**2,00**
60.	*Timotej*	*Šujan*	2	GJarošeBO	– 0 – – – – – –	0	**0,00**

3. seriálová série – Teorie čísel

Výsledková listina

1.–10.	*Filip*	*Bialas*	1	GOpatovPH	5	5	5	15	**15,00**
1.–10.	*Ondrej*	*Bínovský*	3	GAnMeTr	5	5	5	$15 + i$	**15,00**
1.–10.	*František*	*Couf*	1	GZborovPH	5	5	5	15	**15,00**
1.–10.	*Jakub*	*Löwit*	2	GČeskoliPH	5	5	5	15	**15,00**
1.–10.	*Martin*	*Raszyk*	4	G Karviná	5	5	5	15	**15,00**
1.–10.	*Václav*	*Rozhoň*	3	GJirsíkaČB	5	5	5	15	**15,00**
1.–10.	*Jakub*	*Svoboda*	4	G KomHavíř	5	5	5	15	**15,00**
1.–10.	*Radovan*	*Švarc*	3	G ČTřebová	5	5	5	15	**15,00**
1.–10.	*Pavel*	*Turek*	1	GTomkovaOL	5	5	5	15	**15,00**
1.–10.	*Mikuláš*	*Zindulka*	3	GMikul23PL	5	5	5	15	**15,00**
11.	*Jan*	*Soukup*	3	G Klatovy	5	5	3	13	**12,02**
12.	*Dominik*	*Krasula*	1	G Krnov	4	5	–	9	**11,28**
13.	*Jan*	*Jurka*	3	GMLerchaBO	5	5	–	10	**11,16**
14.	*Karolína*	*Kuchyňová*	3	GMLerchaBO	5	–	5	10	**10,21**
15.	*Matěj*	*Konečný*	3	G Jírov ČB	5	–	5	10	**10,14**
16.	*Jan*	*Šorm*	2	GJarošeBO	5	–	3	8	**9,58**
17.	*Jan*	*Václavek*	2	G Ústí n O	5	–	–	5	**7,36**
18.	*Martin*	*Hora*	4	GMikul23PL	5	–	5	10	**7,09**
19.–20.	*Matyáš*	*Grof*	3	GZborovPH	2	1	2	5	**6,40**
19.–20.	*Vojtěch*	*Suchánek*	3	GJarošeBO	5	–	–	5	**6,40**
21.	*Tomáš*	*Fiala*	3	GLedečNSáz	5	–	–	5	**6,02**
22.	*Jakub*	*Hledík*	3	GSŘMRSkuteč	4	–	–	4	**4,79**
23.	*Markéta*	*Calábková*	3	GJŠkodyPŘ	–	–	4	4	**4,37**
24.	*Antonín*	*Češík*	4	SPŠElek PA	5	–	–	5	**4,15**
25.	*Martin*	*Kopřiva*	2	GMikul23PL	–	–	2	2	**3,41**
26.	*Marián*	*Poppr*	3	GJNerudyPH	4	–	–	4	**3,40**
27.	*Timotej*	*Šujan*	2	GJarošeBO	–	–	1	1	**1,85**
28.	*Adam*	*Gálik*	4	GOlivuPopr	0	0	0	0	**0,00**

4. jarní série – Finální myšmaš

Výsledková listina

1.	*Pavel*	*Turek*	1	GTomkovaOL	5 4 5 5 5 5 2	31	**33,10**
2.	*Jakub*	*Löwit*	2	GČeskoliPH	5 4 4 4 5 5 2	29	**30,78**
3.	*František*	*Couf*	1	GZborovPH	4 2 2 5 5 5 2	25	**28,97**
4.	*Filip*	*Bialas*	1	GOpatovPH	5 2 5 1 5 2 2	22	**28,68**
5.	*Martin*	*Raszyk*	4	G Karviná	5 5 5 5 5 5 2	32	**28,31**
6.	*Jáchym*	*Solecký*	1	PORG PH	5 2 2 4 5 2 –	20	**27,29**
7.	*Vojtěch*	*Suchánek*	3	GJarošeBO	5 5 – 2 5 5 2	24	**26,77**
8.	*Radovan*	*Švarc*	3	G ČTřebová	5 5 5 3 5 5 2	30	**26,18**
9.	*Jakub*	*Svoboda*	4	G KomHavíř	5 2 4 4 5 5 2	27	**24,40**
10.	*Vojtěch*	*Lanz*	0	GZborovPH	5 2 1 1 2 – 2	13	**23,38**
11.	*Jan*	*Soukup*	3	G Klatovy	5 2 2 5 5 5 2	26	**22,51**
12.	*Martin*	*Surma*	3	GJWolkraPV	5 2 2 4 2 2 2	19	**21,09**
13.	*Vojtěch*	*Lukeš*	2	G LPika PL	5 2 2 1 1 2 2	15	**20,68**
14.	*Antonín*	*Češík*	4	SPŠElek PA	5 2 5 5 5 – –	22	**19,75**
15.	*Katarína*	*Krajčiová*	3	GAlejKošic	5 2 2 2 4 2 2	19	**17,04**
16.	*Václav*	*Rozhoň*	3	GJirsíkaČB	– 2 2 2 5 2 –	13	**16,38**
17.	*Hedvika*	*Ranošová*	0	GBudějovPH	– 2 2 1 – 2 –	7	**16,32**
18.	*Tomáš*	*Kuzma*	2	GAB Senec	1 4 1 2 – 2 –	10	**15,25**
19.	*Karolína*	*Kuchyňová*	3	GMLerchaBO	2 2 2 2 2 2 2	14	**14,53**
20.	*Dominik*	*Krasula*	1	G Krnov	2 – 2 2 1 2 –	9	**14,42**
21.	*Jan*	*Václavek*	2	G Ústí n O	5 2 – 1 – 1 –	9	**14,03**
22.	*Jan*	*Jurka*	3	GMLerchaBO	– 4 2 – 3 2 –	$11 - i$	**13,70**
23.	*Marián*	*Poppr*	3	GJNerudyPH	2 5 0 2 – 4 2	15	**13,20**
24.	*Jakub*	*Hledík*	3	GSŘMRSkuteč	– 2 2 2 – 2 2	10	**11,90**
25.	*Markéta*	*Horová*	2	GMikul23PL	– – 2 1 – 2 2	7	**11,43**
26.	*Jan*	*Šorm*	2	GJarošeBO	1 2 – 1 – 2 2	8	**11,00**
27.	*Lukáš*	*Kubacki*	1	GNadKavaPH	– 2 – 1 – 2 –	5	**10,89**
28.	*Daniel*	*Pišťák*	2	GZborovPH	2 2 – 1 2 2 –	9	**10,65**
29.	*Zuzana*	*Svobodová*	2	G FrýdlNOs	2 2 – 1 – – 2	7	**9,91**
30.–31.	*Matyáš*	*Grof*	3	GZborovPH	3 – 1 1 – 2 –	7	**9,50**
30.–31.	*Jiří*	*Štrincl*	3	GSRandyJN	3 – 2 0 – 2 –	7	**9,50**
32.	*Matěj*	*Konečný*	3	G Jírov ČB	– 2 5 – – 2 –	9	**9,30**
33.	*Petr*	*Jakubčík*	0	PORG PH	0 – – 3 – 0 –	3	**9,20**
34.	*Zuzana*	*Tréglová*	1	G Žatec	3 – – 1 – – –	4	**9,15**
35.	*Jakub*	*Marták*	2	G GolNitra	0 0 – 0 3 2 –	5	**8,59**
36.	*Tomáš*	*Fiala*	3	GLedečNSáz	– 1 – 1 – 2 2	6	**7,60**
37.	*Jiří*	*Zeman*	4	GLesníZlín	1 – 2 1 – 2 2	8	**6,60**
38.	*Kristýna*	*Šudomová*	2	GValašKlob	3 – – – 1 – –	4	**6,42**
39.	*Markéta*	*Calábková*	3	GJŠkodyPŘ	– – 0 1 2 2 –	5	**5,55**

40.	*Kateřina*	*Nová*	1	G Vimperk	– – – 2 – – –	2	**5,13**
41.	*Adam*	*Gálik*	4	GOlivuPopr	0 0 1 0 1 1 0	3	**3,00**
42.	*Zuzana*	*Šimečková*	3	GCON ČesBuď	– – – – – – 2	2	**2,45**
43.	*Ivona*	*Hrivová*	4	GOkrŽilina	– 1 – – – – 2	3	**2,28**
44.	*Kristýna*	*Ilievová*	3	G Milevsko	– 2 – – – – –	2	**1,91**
45.	*Timotej*	*Šujan*	2	GJarošeBO	– – – 0 – – –	0	**0,00**

Výsledková listina jarní části semináře

1.	*Pavel*	*Turek*	1	GTomkovaOL	24	23	24	33	15	15	**133,96**	264
2.	*František*	*Couf*	1	GZborovPH	24	25	24	29	15	15	**131,85**	367
3.	*Martin*	*Raszyk*	4	G Karviná	25	25	21	28	15	15	**128,81**	752
4.	*Filip*	*Bialas*	1	GOpatovPH	24	23	22	29	15	15	**128,44**	128
5.	*Radovan*	*Švarc*	3	G ČTřebová	25	25	21	26	15	15	**127,41**	831
6.	*Jakub*	*Löwit*	2	GČeskoliPH	24	22	15	31	11	15	**117,41**	334
7.	*Jakub*	*Svoboda*	4	G KomHavíř	25	20	16	24	15	15	**114,87**	327
8.	*Václav*	*Rozhoň*	3	GJirsíkaČB	25	24	18	16	15	15	**113,16**	113
9.	*Jan*	*Soukup*	3	G Klatovy	19	21	14	23	15	12	**103,08**	613
10.	*Martin*	*Surma*	3	GJWolkraPV	22	22	20	21	11	–	**95,66**	203
11.	*Vojtěch*	*Suchánek*	3	GJarošeBO	11	22	14	27	14	6	**95,25**	95
12.	*Jan*	*Jurka*	3	GMLerchaBO	23	21	12	9	15	11	**91,42**	109
13.	*Mikuláš*	*Zindulka*	3	GMikul23PL	22	22	21	–	6	15	**87,35**	87
14.	*Karolína*	*Kuchyňová*	3	GMLerchaBO	20	21	14	15	4	10	**84,07**	284
15.	*Antonín*	*Češík*	4	SPŠElek PA	20	18	10	20	9	4	**81,03**	213
16.–17.	*Hedvika*	*Ranošová*	0	GBudějovPH	23	20	21	16	–	–	**80,62**	81
16.–17.	*Vojtěch*	*Lukeš*	2	G LPika PL	18	16	19	21	7	–	**80,62**	81
18.	*Katarína*	*Krajčiová*	3	GAlejKošic	20	18	20	17	4	–	**79,90**	411
19.	*Matěj*	*Konečný*	3	G Jírov ČB	17	21	10	9	11	10	**78,48**	286
20.	*Jan*	*Šorm*	2	GJarošeBO	22	21	12	11	3	10	**78,32**	273
21.	*Dominik*	*Krasula*	1	G Krnov	20	17	5	14	10	11	**78,12**	264
22.	*Jan*	*Václavek*	2	G Ústí n O	15	22	13	14	5	7	**75,86**	76
23.	*Tomáš*	*Kuzma*	2	GAB Senec	16	19	15	15	6	–	**71,86**	72
24.	*Daniel*	*Pišťák*	2	GZborovPH	17	20	12	11	8	–	**68,27**	407
25.	*Václav*	*Steinhauser*	0	ZŠVranéNVl	22	21	16	–	7	–	**67,03**	164
26.	*Zuzana*	*Tréglová*	1	G Žatec	23	22	11	9	–	–	**65,83**	66
27.	*Martin*	*Hora*	4	GMikul23PL	25	21	6	–	7	7	**65,69**	637
28.	*Martin*	*Kopřiva*	2	GMikul23PL	21	19	13	–	8	3	**65,36**	84
29.	*Markéta*	*Horová*	2	GMikul23PL	13	16	9	11	12	–	**61,84**	62
30.	*Eduard*	*Batmendijn*	3	CGStĽubovňa	20	24	18	–	–	–	**61,25**	86
31.	*Jáchym*	*Solecký*	1	PORG PH	15	7	11	27	–	–	**60,63**	61
32.	*Vojtěch*	*Lanz*	0	GZborovPH	15	8	13	23	–	–	**60,14**	60
33.	*Jakub*	*Hledík*	3	GSŘMRSkuteč	14	13	11	12	6	5	**59,22**	161
34.	*Tomáš*	*Fiala*	3	GLedečNSáz	11	17	17	8	–	6	**58,02**	135
35.	*Lukáš*	*Kubacki*	1	GNadKavaPH	15	16	13	11	–	–	**54,59**	55
36.	*Markéta*	*Calábková*	3	GJŠkodyPŘ	15	20	6	6	–	4	**50,65**	224
37.	*Marian*	*Poljak*	2	GJŠkodyPŘ	19	17	13	–	–	–	**49,27**	49
38.	*Zuzana*	*Šimečková*	3	GCON ČesBuď	14	12	9	2	11	–	**49,01**	174
39.	*Zuzana*	*Svobodová*	2	G FrýdlNOs	17	12	10	10	–	–	**48,10**	226
40.	*Petr*	*Jakubčík*	0	PORG PH	13	8	16	9	–	–	**46,99**	47

41.	*Matyáš*	*Grof*	3	GZborovPH	–	19	11	10	–	6	**46,29**	46
42.	*Jan*	*Krejčí*	4	G Bílovec	16	18	–	–	11	–	**45,09**	186
43.	*Tereza*	*Kislingerová*	1	G Klatovy	15	15	15	–	–	–	**44,95**	45
44.	*Minh Tri*	*Pham*	2	NPorg	16	21	8	–	–	–	**44,48**	117
45.	*Marián*	*Poppr*	3	GJNerudyPH	–	18	9	13	–	3	**43,31**	368
46.	*Jakub*	*Marták*	2	G GolNitra	14	7	5	9	6	–	**41,13**	41
47.	*Šimon*	*Tabačko*	2	EvG Košice	12	13	15	–	–	–	**40,24**	40
48.	*Anh Dung*	*Le*	4	G Tachov	25	–	–	–	15	–	**40,00**	983
49.	*Anh*	*Le Hoang*	2	GJarošeBO	14	13	–	–	13	–	**39,69**	40
50.	*Jaromír*	*Mielec*	1	GVolgogrOS	20	12	–	–	7	–	**38,49**	319
51.	*Kateřina*	*Nová*	1	G Vimperk	13	7	11	5	–	–	**35,94**	36
52.	*Andrea*	*Kučerová*	2	G ČKrumlov	18	8	9	–	–	–	**35,64**	36
53.	*Patricie*	*Klosse*	2	G ČKrumlov	15	11	9	–	–	–	**35,51**	36
54.	*Ivona*	*Hrivová*	4	GOkrŽilina	15	8	4	2	4	–	**33,09**	183
55.	*Jakub*	*Sláma*	3	GOpatovPH	18	4	4	–	6	–	**32,37**	32
56.	*Peter*	*Vook*	3	GPošKošice	8	11	11	–	–	–	**30,78**	31
57.	*Lukáš*	*Sadlek*	3	G Čadca	11	9	8	–	3	–	**30,57**	31
58.	*Jan*	*Kadlec*	3	G Klatovy	11	–	10	–	7	–	**28,70**	375
59.	*Lukáš*	*Černý*	2	NPorg	13	15	–	–	–	–	**28,05**	28
60.	*Jiří*	*Zeman*	4	GLesníZlín	3	15	3	7	–	–	**27,66**	145
61.	*Jaroslav*	*Stránský*	2	G Tišnov	12	13	–	–	–	–	**24,89**	25
62.	*Michaela*	*Brabcová*	2	G Jírov ČB	13	5	–	–	6	–	**24,46**	24
63.	*Adam*	*Gálik*	4	GOlivuPopr	9	5	2	3	5	0	**24,00**	24
64.	*Ondřej*	*Zeman*	3	G Lovosice	17	7	–	–	–	–	**23,40**	23
65.	*Matěj*	*Seidl*	2	PORG PH	12	9	–	–	2	–	**23,22**	23
66.	*Lukáš*	*Honsa*	2	G Jírov ČB	13	9	–	–	–	–	**22,77**	23
67.	*Jiří*	*Štrincl*	3	GSRandyJN	–	10	3	10	–	–	**22,68**	23
68.	*Jan*	*Erhart*	3	GFXŠaldyLI	14	3	–	–	4	–	**21,91**	216
69.	*Michaela*	*Brezinová*	2	GKomTrebiš	13	7	–	–	–	–	**19,76**	20
70.	*Libor*	*Drozdek*	3	G Holešov	–	20	–	–	–	–	**19,71**	42
71.	*Marie*	*Vonzino*	1	GTomkovaOL	13	7	–	–	–	–	**19,43**	19
72.	*Martin*	*Špilar*	3	G Vyškov	18	–	–	–	–	–	**18,38**	18
73.	*Zuzana*	*Drázdová*	3	GCON ČesBuď	13	–	–	–	5	–	**17,28**	124
74.	*Přemysl*	*Šťastný*	0	G Žamberk	8	8	–	–	0	–	**16,68**	17
75.	*Matěj*	*Coufal*	1	G HavlBrod	14	3	–	–	0	–	**16,48**	16
76.	*Kristýna*	*Šudomová*	2	GValašKlob	8	–	–	6	2	–	**15,65**	115
77.	*Ondrej*	*Bínovský*	3	GAnMeTr	–	–	–	–	–	15	**15,00**	15
78.	*Jiřina*	*Duspivová*	2	G Kralupy	–	7	8	–	–	–	**14,93**	15
79.	*Adam*	*Říha*	2	G ČesLípa	13	–	–	–	–	–	**13,29**	13
80.	*Jan*	*Alfery*	2	GNPražačPH	13	–	–	–	–	–	**13,04**	49
81.–82.	*Daniel*	*Backov*	2	G Ružomb	12	–	–	–	–	–	**11,89**	12
81.–82.	*Peter Pavel Arthur*	*Petráš*	2	ŠpMNDaG BA	–	12	–	–	–	–	**11,89**	12
83.	*Marek*	*Vícha*	3	MendelG OP	12	–	–	–	–	–	**11,68**	12
84.–85.	*Marek*	*Černý*	3	G Chrudim	–	11	–	–	–	–	**11,39**	11
84.–85.	*Marek*	*Štěpán*	3	SPŠE Fren	–	11	–	–	–	–	**11,39**	11
86.	*Markéta*	*Ospálková*	1	G Uničov	11	–	–	–	–	–	**11,38**	11
87.	*Robert*	*Keřlík*	4	GOPavla PH	–	11	–	–	–	–	**11,00**	11
88.	*Kristýna*	*Ilievová*	3	G Milevsko	3	3	3	2	–	–	**10,52**	255
89.	*Timotej*	*Šujan*	2	GJarošeBO	–	8	0	0	–	2	**10,02**	10
90.	*Tomáš*	*Flaschka*	2	G Hlučín	9	–	–	–	–	–	**9,48**	9
91.	*Zuzana*	*Vlasáková*	4	G Rumburk	–	7	–	–	–	–	**7,43**	151

92.–94.	*Kryštof*	*Kolář*	2	GJarošeBO	5	–	–	–	–	–	**5,27**	5
92.–94.	*Martin*	*Konečný*	2	GStrážnice	5	–	–	–	–	–	**5,27**	5
92.–94.	*Peter Kulcsár*	*Szabó*	2	GHSelyhoKM	5	–	–	–	–	–	**5,27**	5
95.	*Vojtěch*	*Juříček*	2	G Kralupy	5	–	–	–	–	–	**5,13**	32
96.	*Václav*	*Krchňák*	2	GJarošeBO	5	–	–	–	–	–	**4,96**	69
97.	*Michael*	*Bucha*	3	G Zábřeh	4	–	–	–	–	–	**4,23**	4
98.–99.	*Dušan*	*Klíma*	2	GRychnovKn	2	–	–	–	–	–	**1,91**	2
98.–99.	*Tomáš*	*Velich*	2	GJHroncaBA	2	–	–	–	–	–	**1,91**	2
100.	*Tomáš*	*Valovič*	4	GAHŠ VKrtíš	1	–	–	–	–	–	**1,00**	1

Výsledková listina seriálu

1.	*Pavel*	*Turek*	1	GTomkovaOL	24	23	24	33	15	15	**133,96**	264
2.	*František*	*Couf*	1	GZborovPH	24	25	24	29	15	15	**131,85**	367
3.	*Martin*	*Raszyk*	4	G Karviná	25	25	21	28	15	15	**128,81**	752
4.	*Filip*	*Bialas*	1	GOpatovPH	24	23	22	29	15	15	**128,44**	128
5.	*Radovan*	*Švarc*	3	G ČTřebová	25	25	21	26	15	15	**127,41**	831
6.	*Jakub*	*Löwit*	2	GČeskoliPH	24	22	15	31	11	15	**117,41**	334
7.	*Jakub*	*Svoboda*	4	G KomHavíř	25	20	16	24	15	15	**114,87**	327
8.	*Václav*	*Rozhoň*	3	GJirsíkaČB	25	24	18	16	15	15	**113,16**	113
9.	*Jan*	*Soukup*	3	G Klatovy	19	21	14	23	15	12	**103,08**	613
10.	*Jan*	*Jurka*	3	GMLerchaBO	23	21	12	14	15	11	**95,78**	114
11.	*Martin*	*Surma*	3	GJWolkraPV	22	22	20	21	11	–	**95,66**	203
12.	*Vojtěch*	*Suchánek*	3	GJarošeBO	11	22	14	27	14	6	**95,25**	95
13.	*Mikuláš*	*Zindulka*	3	GMikul23PL	22	22	21	–	6	15	**87,35**	87
14.	*Karolína*	*Kuchyňová*	3	GMLerchaBO	20	21	14	15	4	10	**84,07**	284
15.	*Antonín*	*Češík*	4	SPŠElek PA	20	18	10	20	9	4	**81,03**	213
16.–17.	*Hedvika*	*Ranošová*	0	GBudějovPH	23	20	21	16	–	–	**80,62**	81
16.–17.	*Vojtěch*	*Lukeš*	2	G LPika PL	18	16	19	21	7	–	**80,62**	81
18.	*Katarína*	*Krajčiová*	3	GAlejKošic	20	18	20	17	4	–	**79,90**	411
19.	*Matěj*	*Konečný*	3	G Jírov ČB	17	21	10	9	11	10	**78,48**	286
20.	*Jan*	*Šorm*	2	GJarošeBO	22	21	12	11	3	10	**78,32**	273
21.	*Dominik*	*Krasula*	1	G Krnov	20	17	5	14	10	11	**78,12**	264
22.	*Jan*	*Václavek*	2	G Ústí n O	15	22	13	14	5	7	**75,86**	76
23.	*Tomáš*	*Kuzma*	2	GAB Senec	16	19	15	15	6	–	**71,86**	72
24.	*Daniel*	*Pišťák*	2	GZborovPH	17	20	12	11	8	–	**68,27**	407
25.	*Václav*	*Steinhauser*	0	ZŠVranéNVl	22	21	16	–	7	–	**67,03**	164
26.	*Zuzana*	*Tréglová*	1	G Žatec	23	22	11	9	–	–	**65,83**	66
27.	*Martin*	*Hora*	4	GMikul23PL	25	21	6	–	7	7	**65,69**	637
28.	*Martin*	*Kopřiva*	2	GMikul23PL	21	19	13	–	8	3	**65,36**	84
29.	*Markéta*	*Horová*	2	GMikul23PL	13	16	9	11	12	–	**61,84**	62
30.	*Eduard*	*Batmendijn*	3	CGStĽubovňa	20	24	18	–	–	–	**61,25**	86
31.	*Jáchym*	*Solecký*	1	PORG PH	15	7	11	27	–	–	**60,63**	61
32.	*Vojtěch*	*Lanz*	0	GZborovPH	15	8	13	23	–	–	**60,14**	60
33.	*Jakub*	*Hledík*	3	GSŘMRSkuteč	14	13	11	12	6	5	**59,22**	161
34.	*Tomáš*	*Fiala*	3	GLedečNSáz	11	17	17	8	–	6	**58,02**	135
35.	*Lukáš*	*Kubacki*	1	GNadKavaPH	15	16	13	11	–	–	**54,59**	55
36.	*Markéta*	*Calábková*	3	GJŠkodyPŘ	15	20	6	6	–	4	**50,65**	224
37.	*Marian*	*Poljak*	2	GJŠkodyPŘ	19	17	13	–	–	–	**49,27**	49
38.	*Zuzana*	*Šimečková*	3	GCON ČesBuď	14	12	9	2	11	–	**49,01**	174
39.	*Zuzana*	*Svobodová*	2	G FrýdlNOs	17	12	10	10	–	–	**48,10**	226
40.	*Petr*	*Jakubčík*	0	PORG PH	13	8	16	9	–	–	**46,99**	47

41.	*Matyáš*	*Grof*	3	GZborovPH	–	19	11	10	–	6	**46,29**	46
42.	*Jan*	*Krejčí*	4	G Bílovec	16	18	–	–	11	–	**45,09**	186
43.	*Tereza*	*Kislingerová*	1	G Klatovy	15	15	15	–	–	–	**44,95**	45
44.	*Minh Tri*	*Pham*	2	NPorg	16	21	8	–	–	–	**44,48**	117
45.	*Marián*	*Poppr*	3	GJNerudyPH	–	18	9	13	–	3	**43,31**	368
46.	*Jakub*	*Marták*	2	G GolNitra	14	7	5	9	6	–	**41,13**	41
47.	*Šimon*	*Tabačko*	2	EvG Košice	12	13	15	–	–	–	**40,24**	40
48.	*Anh Dung*	*Le*	4	G Tachov	25	–	–	–	15	–	**40,00**	983
49.	*Anh*	*Le Hoang*	2	GJarošeBO	14	13	–	–	13	–	**39,69**	40
50.	*Jaromír*	*Mielec*	1	GVolgogrOS	20	12	–	–	7	–	**38,49**	319
51.	*Kateřina*	*Nová*	1	G Vimperk	13	7	11	5	–	–	**35,94**	36
52.	*Andrea*	*Kučerová*	2	G ČKrumlov	18	8	9	–	–	–	**35,64**	36
53.	*Patricie*	*Klosse*	2	G ČKrumlov	15	11	9	–	–	–	**35,51**	36
54.	*Ivona*	*Hrivová*	4	GOkrŽilina	15	8	4	2	4	–	**33,09**	183
55.	*Jakub*	*Sláma*	3	GOpatovPH	18	4	4	–	6	–	**32,37**	32
56.	*Peter*	*Vook*	3	GPošKošice	8	11	11	–	–	–	**30,78**	31
57.	*Lukáš*	*Sadlek*	3	G Čadca	11	9	8	–	3	–	**30,57**	31
58.	*Jan*	*Kadlec*	3	G Klatovy	11	–	10	–	7	–	**28,70**	375
59.	*Lukáš*	*Černý*	2	NPorg	13	15	–	–	–	–	**28,05**	28
60.	*Jiří*	*Zeman*	4	GLesníZlín	3	15	3	7	–	–	**27,66**	145
61.	*Jaroslav*	*Stránský*	2	G Tišnov	12	13	–	–	–	–	**24,89**	25
62.	*Michaela*	*Brabcová*	2	G Jírov ČB	13	5	–	–	6	–	**24,46**	24
63.	*Adam*	*Gálik*	4	GOlivuPopr	9	5	2	3	5	0	**24,00**	24
64.	*Ondřej*	*Zeman*	3	G Lovosice	17	7	–	–	–	–	**23,40**	23
65.	*Matěj*	*Seidl*	2	PORG PH	12	9	–	–	2	–	**23,22**	23
66.	*Lukáš*	*Honsa*	2	G Jírov ČB	13	9	–	–	–	–	**22,77**	23
67.	*Jiří*	*Štrincl*	3	GSRandyJN	–	10	3	10	–	–	**22,68**	23
68.	*Jan*	*Erhart*	3	GFXŠaldyLI	14	3	–	–	4	–	**21,91**	216
69.	*Michaela*	*Brezinová*	2	GKomTrebiš	13	7	–	–	–	–	**19,76**	20
70.	*Libor*	*Drozdek*	3	G Holešov	–	20	–	–	–	–	**19,71**	42
71.	*Marie*	*Vonzino*	1	GTomkovaOL	13	7	–	–	–	–	**19,43**	19
72.	*Martin*	*Špilar*	3	G Vyškov	18	–	–	–	–	–	**18,38**	18
73.	*Zuzana*	*Drázdová*	3	GCON ČesBuď	13	–	–	–	5	–	**17,28**	124
74.	*Přemysl*	*Šťastný*	0	G Žamberk	8	8	–	–	0	–	**16,68**	17
75.	*Matěj*	*Coufal*	1	G HavlBrod	14	3	–	–	0	–	**16,48**	16
76.	*Kristýna*	*Šudomová*	2	GValašKlob	8	–	–	6	2	–	**15,65**	115
77.	*Ondrej*	*Bínovský*	3	GAnMeTr	–	–	–	–	–	15	**15,00**	15
78.	*Jiřina*	*Duspivová*	2	G Kralupy	–	7	8	–	–	–	**14,93**	15
79.	*Adam*	*Říha*	2	G ČesLípa	13	–	–	–	–	–	**13,29**	13
80.	*Jan*	*Alfery*	2	GNPražačPH	13	–	–	–	–	–	**13,04**	49
81.–82.	*Daniel*	*Backov*	2	G Ružomb	12	–	–	–	–	–	**11,89**	12
81.–82.	*Peter Pavel Arthur*	*Petráš*	2	ŠpMNDaG BA	–	12	–	–	–	–	**11,89**	12
83.	*Marek*	*Vícha*	3	MendelG OP	12	–	–	–	–	–	**11,68**	12
84.–85.	*Marek*	*Černý*	3	G Chrudim	–	11	–	–	–	–	**11,39**	11
84.–85.	*Marek*	*Štěpán*	3	SPŠE Fren	–	11	–	–	–	–	**11,39**	11
86.	*Markéta*	*Ospálková*	1	G Uničov	11	–	–	–	–	–	**11,38**	11
87.	*Robert*	*Keřlík*	4	GOPavla PH	–	11	–	–	–	–	**11,00**	11
88.	*Kristýna*	*Ilievová*	3	G Milevsko	3	3	3	2	–	–	**10,52**	255
89.	*Timotej*	*Šujan*	2	GJarošeBO	–	8	0	0	–	2	**10,02**	10
90.	*Tomáš*	*Flaschka*	2	G Hlučín	9	–	–	–	–	–	**9,48**	9
91.	*Zuzana*	*Vlasáková*	4	G Rumburk	–	7	–	–	–	–	**7,43**	151

92.–94.	*Kryštof*	*Kolář*	2	GJarošeBO	5	–	–	–	–	–	**5,27**	5
92.–94.	*Martin*	*Konečný*	2	GStrážnice	5	–	–	–	–	–	**5,27**	5
92.–94.	*Peter Kulcsár*	*Szabó*	2	GHSelyhoKM	5	–	–	–	–	–	**5,27**	5
95.	*Vojtěch*	*Juříček*	2	G Kralupy	5	–	–	–	–	–	**5,13**	32
96.	*Václav*	*Krchňák*	2	GJarošeBO	5	–	–	–	–	–	**4,96**	69
97.	*Michael*	*Bucha*	3	G Zábřeh	4	–	–	–	–	–	**4,23**	4
98.–99.	*Dušan*	*Klíma*	2	GRychnovKn	2	–	–	–	–	–	**1,91**	2
98.–99.	*Tomáš*	*Velich*	2	GJHroncaBA	2	–	–	–	–	–	**1,91**	2
100.	*Tomáš*	*Valovič*	4	GAHŠ VKrtíš	1	–	–	–	–	–	**1,00**	1

Výsledková listina 32. ročníku

1.	*František*	*Couf*	1	GZborovPH	25	25	25	24	24	25	24	29	15	15	15	**245,41**	480
2.	*Pavel*	*Turek*	1	GTomkovaOL	24	22	25	23	24	23	24	33	15	15	15	**242,63**	373
3.	*Filip*	*Bialas*	1	GOpatovPH	25	24	23	23	24	23	22	29	15	15	15	**238,54**	239
4.	*Radovan*	*Švarc*	3	G ČTřebová	25	23	25	19	25	25	21	26	15	15	15	**234,60**	939
5.	*Martin*	*Raszyk*	4	G Karviná	16	25	23	21	25	25	21	28	15	15	15	**227,95**	851
6.	*Jakub*	*Löwit*	2	GČeskoliPH	23	21	20	22	24	22	15	31	14	11	15	**218,18**	435
7.	*Jakub*	*Svoboda*	4	G KomHavíř	22	24	21	21	25	20	16	24	14	15	15	**216,56**	429
8.	*Václav*	*Rozhoň*	3	GJirsíkaČB	25	21	21	24	25	24	18	16	7	15	15	**210,52**	211
9.	*Jan*	*Soukup*	3	G Klatovy	22	19	21	21	19	21	14	23	15	15	12	**200,51**	711
10.	*Martin*	*Surma*	3	GJWolkraPV	23	22	23	23	22	22	20	21	–	11	–	**187,44**	294
11.	*Vojtěch*	*Suchánek*	3	GJarošeBO	20	24	21	22	11	22	14	27	–	14	6	**181,31**	181
12.	*Jan*	*Jurka*	3	GMLerchaBO	13	15	21	22	23	21	12	14	11	15	11	**178,99**	197
13.	*Mikuláš*	*Zindulka*	3	GMikul23PL	21	21	17	24	22	22	21	–	7	6	15	**177,56**	178
14.	*Martin*	*Hora*	4	GMikul23PL	25	23	25	21	25	21	6	–	15	7	7	**174,77**	746
15.	*Katarína*	*Krajčiová*	3	GAlejKošic	25	21	20	21	20	18	20	17	4	4	–	**172,06**	503
16.	*Karolína*	*Kuchyňová*	3	GMLerchaBO	23	18	19	21	20	21	14	15	5	4	10	**171,73**	372
17.	*Matěj*	*Konečný*	3	G Jírov ČB	14	16	20	21	17	21	10	9	15	11	10	**165,31**	373
18.	*Antonín*	*Češík*	4	SPŠElek PA	20	20	19	20	20	18	10	20	4	9	4	**164,61**	297
19.	*Eduard*	*Batmendijn*	3	CGStĽubovňa	25	18	21	22	20	24	18	–	15	–	–	**162,72**	188
20.	*Jan*	*Šorm*	2	GJarošeBO	17	21	19	17	22	21	12	11	10	3	10	**161,88**	357
21.	*Václav*	*Steinhauser*	0	ZŠVranéNVl	23	23	19	21	22	21	16	–	9	7	–	**161,68**	259
22.	*Martin*	*Kopřiva*	2	GMikul23PL	21	19	17	20	21	19	13	–	10	8	3	**153,16**	172
23.	*Markéta*	*Horová*	2	GMikul23PL	22	22	14	22	13	16	9	11	10	12	–	**150,11**	150
24.	*Dominik*	*Krasula*	1	G Krnov	15	14	13	20	20	17	5	14	4	10	11	**144,95**	331
25.	*Vojtěch*	*Lukeš*	2	G LPika PL	13	14	19	16	18	16	19	21	–	7	–	**142,26**	142
26.	*Daniel*	*Pišťák*	2	GZborovPH	8	17	19	19	17	20	12	11	4	8	–	**135,64**	475
27.	*Vojtěch*	*Lanz*	0	GZborovPH	19	17	15	16	15	8	13	23	–	–	–	**128,33**	128
28.	*Tomáš*	*Kuzma*	2	GAB Senec	13	18	7	14	16	19	15	15	–	6	–	**123,44**	123
29.	*Marian*	*Poljak*	2	GJŠkodyPŘ	17	22	18	18	19	17	13	–	–	–	–	**123,23**	123
30.	*Anh Dung*	*Le*	4	G Tachov	22	22	14	8	25	–	–	–	15	15	–	**121,45**	106
31.	*Jan*	*Václavek*	2	G Ústí n O	13	17	11	–	15	22	13	14	3	5	7	**119,95**	120
32.	*Jan*	*Krejčí*	4	G Bílovec	21	10	17	20	16	18	–	–	7	11	–	**119,94**	261
33.	*Lukáš*	*Sadlek*	3	G Čadca	18	20	21	15	11	9	8	–	10	3	–	**115,75**	116
34.–35.	*Minh Tri*	*Pham*	2	NPorg	17	16	15	21	16	21	8	–	–	–	–	**112,69**	186
34.–35.	*Zuzana*	*Svobodová*	2	G FrýdlNOs	18	18	17	10	17	12	10	10	2	–	–	**112,69**	291
36.	*Marián*	*Poppr*	3	GJNerudyPH	14	23	16	12	–	18	9	13	5	–	3	**112,27**	437
37.	*Petr*	*Jakubčík*	0	PORG PH	18	16	12	18	13	8	16	9	0	–	–	**111,53**	112
38.	*Tomáš*	*Fiala*	3	GLedečNSáz	19	13	12	7	11	17	17	8	1	–	6	**110,51**	188
39.	*Markéta*	*Calábková*	3	GJŠkodyPŘ	12	7	16	16	15	20	6	6	6	–	4	**106,15**	279
40.	*Tereza*	*Kislingerová*	1	G Klatovy	18	22	19	0	15	15	15	–	–	–	–	**103,60**	104

41.	*Jakub*	*Hledík*	3	GSŘMRSkuteč	17	4	9	11	14	13	11	12	1	6	5	**101,56**	204
42.	*Kateřina*	*Nová*	1	G Vimperk	19	14	10	15	13	7	11	5	3	–	–	**96,43**	96
43.	*Jaromír*	*Mielec*	1	GVolgogrOS	6	17	16	17	20	12	–	–	2	7	–	**95,44**	376
44.	*Anh*	*Le Hoang*	2	GJarošeBO	11	20	13	–	14	13	–	–	8	13	–	**91,96**	92
45.	*Jakub*	*Sláma*	3	GOpatovPH	12	14	14	15	18	4	4	–	1	6	–	**90,64**	91
46.	*Jan*	*Kadlec*	3	G Klatovy	18	9	15	13	11	–	10	–	4	7	–	**88,17**	434
47.	*Marko*	*Puza*	4	GPošKošice	23	20	17	21	–	–	–	–	7	–	–	**87,94**	502
48.	*Miroslav*	*Stankovič*	4	GPošKošice	22	25	18	15	–	–	–	–	8	–	–	**87,58**	538
49.	*Martin*	*Špilar*	3	G Vyškov	22	17	14	14	18	–	–	–	–	–	–	**86,76**	87
50.	*Miroslav*	*Psota*	4	GHlinŽilina	21	20	20	22	–	–	–	–	3	–	–	**86,50**	280
51.	*Lukáš*	*Kubacki*	1	GNadKavaPH	11	7	8	0	15	16	13	11	3	–	–	**83,75**	84
52.	*Hedvika*	*Ranošová*	0	GBudějovPH	–	–	–	–	23	20	21	16	–	–	–	**80,62**	81
53.	*Zuzana*	*Tréglová*	1	G Žatec	11	–	–	–	23	22	11	9	–	–	–	**77,21**	77
54.	*Andrea*	*Kučerová*	2	G ČKrumlov	19	17	5	–	18	8	9	–	–	–	–	**77,18**	77
55.	*Michaela*	*Brabcová*	2	G Jírov ČB	16	14	12	11	13	5	–	–	–	6	–	**77,12**	77
56.	*Patricie*	*Klosse*	2	G ČKrumlov	16	17	5	–	15	11	9	–	–	–	–	**73,68**	74
57.	*Minh Thao*	*Nguyen*	2	GEBenešeKL	17	22	19	13	–	–	–	–	3	–	–	**73,48**	73
58.	*Jáchym*	*Solecký*	1	PORG PH	13	0	–	–	15	7	11	27	–	–	–	**73,27**	73
59.	*Jakub*	*Dargaj*	4	GPošKošice	19	17	12	22	–	–	–	–	3	–	–	**73,12**	459
60.	*Jakub*	*Marták*	2	G GolNitra	12	4	5	11	14	7	5	9	0	6	–	**72,66**	73
61.	*Miroslav*	*Krabec*	4	G KomHavíř	16	17	17	17	–	–	–	–	–	–	–	**67,58**	256
62.	*Ondřej*	*Darmovzal*	3	GJarošeBO	23	21	23	–	–	–	–	–	–	–	–	**67,42**	67
63.	*Jiří*	*Zeman*	4	GLesníZlín	–	18	12	5	3	15	3	7	–	–	–	**62,63**	180
64.	*Anna*	*Steinhauserová*	4	G Dačice	21	17	10	12	–	–	–	–	3	–	–	**62,05**	554
65.	*Vít*	*Kalisz*	2	FSG Pirna	12	17	13	14	–	–	–	–	–	–	–	**56,13**	56
66.	*Jiřina*	*Duspivová*	2	G Kralupy	11	17	5	7	–	7	8	–	–	–	–	**54,58**	55
67.	*Marie*	*Vonzino*	1	GTomkovaOL	16	3	7	8	13	7	–	–	–	–	–	**53,26**	53
68.	*Daniela*	*Šindelářová*	2	GaSOŠ Telč	21	13	8	9	–	–	–	–	–	–	–	**51,49**	51
69.	*Lukáš*	*Honsa*	2	G Jírov ČB	9	8	11	–	13	9	–	–	–	–	–	**51,14**	51
70.	*Jaroslav*	*Stránský*	2	G Tišnov	11	5	8	–	12	13	–	–	–	–	–	**49,05**	49
71.	*Zuzana*	*Šimečková*	3	GCON ČesBuď	–	–	–	–	14	12	9	2	–	11	–	**49,01**	174
72.	*Michaela*	*Brezinová*	2	GKomTrebiš	12	16	–	–	13	7	–	–	–	–	–	**47,65**	48
73.	*Přemysl*	*Šťastný*	0	G Žamberk	14	6	–	10	8	8	–	–	–	0	–	**47,31**	47
74.	*Šimon*	*Tabačko*	2	EvG Košice	–	7	–	–	12	13	15	–	–	–	–	**47,00**	47
75.	*Michael*	*Bucha*	3	G Zábřeh	10	11	16	4	4	–	–	–	–	–	–	**46,51**	47
76.	*Matyáš*	*Grof*	3	GZborovPH	–	–	–	–	–	19	11	10	–	–	6	**46,29**	46
77.	*Daniel*	*Backov*	2	G Ružomb	16	0	5	13	12	–	–	–	–	–	–	**46,16**	46
78.	*Adam*	*Gálik*	4	GOlivuPopr	7	1	6	7	9	5	2	3	0	5	0	**45,00**	45
79.	*Petr*	*Lukeš*	4	GNeumannŽR	10	17	12	–	–	–	–	–	5	–	–	**44,45**	208
80.	*Kristýna*	*Šmídová*	4	GMensaPH	18	19	4	–	–	–	–	–	–	–	–	**41,68**	136
81.	*Kristýna*	*Šudomová*	2	GValašKlob	14	3	3	5	8	–	–	6	0	2	–	**41,43**	140
82.	*Jan*	*Alfery*	2	GNPražačPH	9	–	18	–	13	–	–	–	–	–	–	**40,67**	77
83.	*Ivona*	*Hrivová*	4	GOkrŽilina	7	–	–	–	15	8	4	2	–	4	–	**40,47**	190
84.	*Peter*	*Vook*	3	GPošKošice	9	–	–	–	8	11	11	–	–	–	–	**39,95**	40
85.	*Jiří*	*Štrincl*	3	GSRandyJN	11	0	6	–	–	10	3	10	–	–	–	**39,60**	40
86.	*Jakub*	*Šebek*	4	GKepleraPH	21	18	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**38,87**	98
87.–88.	*Markéta*	*Ospálková*	1	G Uničov	15	3	7	3	11	–	–	–	0	–	–	**38,40**	38
87.–88.	*Marek*	*Vícha*	3	MendelG OP	11	12	3	–	12	–	–	–	–	–	–	**38,40**	38
89.	*Zuzana*	*Vlasáková*	4	G Rumburk	4	12	9	5	–	7	–	–	–	–	–	**37,67**	182
90.	*Adam*	*Říha*	2	G ČesLípa	12	7	5	–	13	–	–	–	–	–	–	**37,21**	37
91.	*Jiří*	*Češka*	1	CMGProstěj	19	17	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**35,35**	35

92.	*Kristýna*	*Ilievová*	3	G Milevsko	6	13	3	3	3	3	3	2	–	–	–	**34,74**	279
93.	*Štefan*	*Račák*	2	GTajBanBys	18	4	7	5	–	–	–	–	–	–	–	**33,45**	33
94.	*Anežka*	*Michálková*	2	GaSOŠ Telč	19	–	7	5	–	–	–	–	2	–	–	**32,47**	32
95.	*Mihály*	*Kotiers*	2	GHSelyhoKM	13	19	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**32,37**	32
96.	*Jan*	*Erhart*	3	GFXŠaldyLI	9	–	–	–	14	3	–	–	–	4	–	**31,36**	225
97.	*Tomáš*	*Flaschka*	2	G Hlučín	12	5	4	–	9	–	–	–	–	–	–	**30,29**	30
98.	*Lenka*	*Kopfová*	0	CZŠSL HnM	16	13	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**29,10**	29
99.	*Peter Kulcsár*	*Szabó*	2	GHSelyhoKM	9	14	–	0	5	–	–	–	–	–	–	**28,80**	29
100.	*Viktor*	*Němeček*	3	GJMasar JI	19	9	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**28,11**	338
101.	*Lukáš*	*Černý*	2	NPorg	–	–	–	–	13	15	–	–	–	–	–	**28,05**	28
102.	*Barbora*	*Hudcová*	4	PORG PH	10	17	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**27,31**	92
103.	*Lucie*	*Roškotová*	2	G Turnov	9	7	–	11	–	–	–	–	–	–	–	**26,96**	27
104.	*Ondrej*	*Bínovský*	3	GAnMeTr	–	–	–	–	–	–	–	–	11	–	15	**26,46**	26
105.	*Kryštof*	*Kolář*	2	GJarošeBO	5	–	5	9	5	–	–	–	–	–	–	**25,29**	25
106.	*Ondřej*	*Zeman*	3	G Lovosice	–	–	–	–	17	7	–	–	–	–	–	**23,40**	23
107.	*David*	*Ucháč*	1	VOŠDoprPH	14	3	7	–	–	–	–	–	–	–	–	**23,27**	23
108.	*Matěj*	*Seidl*	2	PORG PH	–	–	–	–	12	9	–	–	–	2	–	**23,22**	23
109.	*Henrieta*	*Micheľová*	2	GAlejKošic	11	12	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**22,94**	163
110.	*Tereza*	*Koberová*	3	G Chrudim	9	8	6	–	–	–	–	–	–	–	–	**22,70**	23
111.	*Emese*	*Szabó*	3	GZKMJ Gal	13	4	4	–	–	–	–	–	–	–	–	**21,93**	22
112.	*Martin*	*Konečný*	2	GStrážnice	13	4	–	–	5	–	–	–	–	–	–	**21,92**	22
113.	*Marek*	*Štěpán*	3	SPŠE Fren	10	–	–	–	–	11	–	–	–	–	–	**21,69**	22
114.	*Michaela*	*Bieliková*	4	G Sereď	11	9	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**20,58**	161
115.	*David*	*Peňáz*	2	GNeumannŽR	12	8	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**20,06**	20
116.	*Victoria María*	*Nájares Romero*	0	GZborovPH	20	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**19,76**	20
117.	*Libor*	*Drozdek*	3	G Holešov	–	–	–	–	–	20	–	–	–	–	–	**19,71**	42
118.	*Tomáš*	*Velich*	2	GJHroncaBA	12	2	0	4	2	–	–	–	–	–	–	**19,36**	19
119.	*Vojtěch*	*Linhart*	3	SlovanG OL	18	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**18,15**	18
120.	*Martin*	*Minasjan*	4	GKepleraPH	18	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**17,82**	135
121.	*Jana*	*Vráblíková*	2	GLesníZlín	14	4	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**17,70**	18
122.	*Veronika*	*Holubová*	3	PORG PH	8	3	–	7	–	–	–	–	–	–	–	**17,67**	18
123.	*Zuzana*	*Drázdová*	3	GCON ČesBuď	–	–	–	–	13	–	–	–	–	5	–	**17,28**	124
124.	*Vojtěch*	*Juříček*	2	G Kralupy	12	–	–	–	5	–	–	–	–	–	–	**16,83**	44
125.	*Matěj*	*Coufal*	1	G HavlBrod	–	–	–	–	14	3	–	–	–	0	–	**16,48**	16
126.	*Ľudmila*	*Šimková*	4	GPároNitra	5	10	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**15,47**	78
127.	*Tereza*	*Rašková*	3	GTomkovaOL	15	0	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**15,43**	15
128.	*Otto*	*Hollmann*	4	GUBalvanJN	7	6	2	–	–	–	–	–	–	–	–	**15,00**	15
129.	*Pavel*	*Souček*	2	G Nymburk	–	9	5	–	–	–	–	–	–	–	–	**14,75**	15
130.–131.	*Radim*	*Bárta*	3	GJarošeBO	14	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**14,47**	14
130.–131.	*Jan*	*Knížek*	3	G Strakon	14	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**14,47**	14
132.	*Tran Vi Thanh*	*Pham*	4	GNeumannŽR	7	7	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**14,08**	150
133.–136.	*Petr*	*Červenka*	2	GNadKavaPH	14	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**14,05**	14
133.–136.	*Jozef*	*Mišt*	2	GAHŠ VKrtíš	14	0	–	–	–	–	–	–	0	–	–	**14,05**	14
133.–136.	*Jakub*	*Starý*	2	VOŠKutHora	14	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**14,05**	14
133.–136.	*Jakub*	*Ševčík*	2	GKukučPopr	14	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**14,05**	14
137.	*Nicholas*	*Čapek*	4	GBNěmcovHK	11	3	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**13,78**	129
138.	*Barbora*	*Pešlová*	3	G Vimperk	13	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**13,41**	131
139.–141.	*Matyáš*	*Medek*	4	GMozartovaPA	13	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**13,00**	13
139.–141.	*Jakub*	*Schinko*	2	GNadKavaPH	13	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**13,00**	13
139.–141.	*Lukáš*	*Zíb*	2	GPísnickPH	13	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**13,00**	13
142.	*Jakub Josef*	*Slavík*	1	BiskG Brno	13	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**12,64**	13

143.	*Martin*	*Šourek*	3	GCoubTábor	12	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**12,45**	12
144.–146.	*Jakub*	*Hrubý*	2	G Chrudim	12	0	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**11,89**	12
144.–146.	*Martin*	*Kutiš*	2	G Humpolec	12	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**11,89**	12
144.–146.	*Peter Pavel Arthur*	*Petráš*	2	ŠpMNDaG BA	–	–	–	–	–	12	–	–	–	–	–	**11,89**	12
147.	*Adéla*	*Šedová*	2	GJungmanLT	8	4	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**11,82**	12
148.	*Pavlína*	*Hartmanová*	2	G Broumov	12	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**11,76**	30
149.	*Borek*	*Požár*	0	G Rakovník	12	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**11,66**	12
150.–152.	*Tomáš*	*Beneš*	2	GVráLevice	9	2	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**11,39**	11
150.–152.	*Martin*	*Chabada*	2	G Bardejov	9	2	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**11,39**	11
150.–152.	*Marek*	*Černý*	3	G Chrudim	–	–	–	–	–	11	–	–	–	–	–	**11,39**	11
153.	*Michaela*	*Biová*	3	MendelG OP	7	–	4	–	–	–	–	–	–	–	–	**11,02**	11
154.–155.	*Robert*	*Keřlík*	4	GOPavla PH	–	–	–	–	–	11	–	–	–	–	–	**11,00**	11
154.–155.	*Tomáš*	*Valovič*	4	GAHŠ VKrtíš	8	2	–	–	1	–	–	–	–	–	–	**11,00**	11
156.–157.	*Petra*	*Kratochvílová*	2	GHustopeče	11	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**10,72**	11
156.–157.	*Daniel*	*Krejbych*	2	G Litomyšl	11	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**10,72**	11
158.	*Cedrik*	*Horčička*	3	G ČesLípa	9	–	–	1	–	–	–	–	–	–	–	**10,64**	11
159.–160.	*Jiří*	*Čech*	3	G Strakon	–	–	10	–	–	–	–	–	–	–	–	**10,30**	10
159.–160.	*Vít*	*Fojtík*	3	GÚstavníPH	–	–	10	–	–	–	–	–	–	–	–	**10,30**	10
161.	*Katarína*	*Behinská*	2	G GolNitra	8	0	–	2	–	–	–	–	–	–	–	**10,08**	10
162.	*Timotej*	*Šujan*	2	GJarošeBO	–	–	–	–	–	8	0	0	–	–	2	**10,02**	10
163.–166.	*Dominik*	*Hodan*	1	GNadAlejPH	10	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**10,00**	10
163.–166.	*Věra*	*Tesařová*	1	MasG Plzeň	10	0	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**10,00**	10
163.–166.	*The Minh*	*Tran*	1	PČGKarVary	10	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**10,00**	10
163.–166.	*Kateřina*	*Volková*	1	MG Vsetín	10	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**10,00**	10
167.–169.	*Denisa*	*Kolenčíková*	3	GNámestovo	9	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**9,17**	9
167.–169.	*Jan*	*Krůza*	3	GVPavlovic	9	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**9,17**	9
167.–169.	*Tomáš*	*Vaníček*	3	G Jírov ČB	9	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**9,17**	9
170.	*Daniel*	*Kočik*	4	GŠroKošice	9	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**9,00**	9
171.	*Hana*	*Daňková*	1	G Vimperk	–	8	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**8,48**	8
172.	*Jan*	*Lukáč*	3	G ČKrumlov	4	4	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**8,46**	8
173.	*Lenka*	*Vincenová*	0	GTomkovaOL	8	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**8,34**	8
174.–175.	*Matěj*	*Kosma*	2	SOŠDoprOS	8	0	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**8,17**	8
174.–175.	*Dennis*	*Ryšánek*	2	SPŠÚžlabPH	8	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**8,17**	8
176.–178.	*Antonie*	*Brožová*	4		8	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**8,00**	8
176.–178.	*Jakub*	*Kříž*	4	SPŠ PB	8	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**8,00**	8
176.–178.	*Matěj*	*Sháněl*	4	G VysMýto	8	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**8,00**	8
179.	*Vendula*	*Kotyzová*	4	WichtG OS	8	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**7,76**	113
180.	*Marie*	*Koutná*	4	GTNovákBO	7	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**7,00**	7
181.–184.	*Levente*	*Berky*	3	GZKMJ Gal	7	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**6,79**	7
181.–184.	*Kristýna*	*Davídková*	1	OA Liberec	7	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**6,79**	7
181.–184.	*Anna*	*Filipová*	3	G Kolín	7	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**6,79**	7
181.–184.	*Jana*	*Menšíková*	1	G Frýdlant	7	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**6,79**	7
185.–186.	*Alena*	*Košáková*	2	G Strakon	7	0	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**6,76**	7
185.–186.	*Ronald*	*Luc*	2	GJarošeBO	7	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**6,76**	7
187.	*Tomáš*	*Konečný*	1	GJirsíkaČB	6	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**5,75**	143
188.–190.	*Stanislav*	*Kruml*	3	G Chotěboř	6	0	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**5,53**	6
188.–190.	*Barbora*	*Kubicová*	3	PORG PH	6	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**5,53**	6
188.–190.	*Vít*	*Maroščík*	3	G Bohumín	6	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**5,53**	6
191.	*Valentína*	*Straková*	4	G Sereď	5	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**5,36**	68
192.–194.	*Matej*	*Kašťák*	2	G Hlohovec	5	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**5,27**	5
192.–194.	*Marina*	*Pogarčenko*	2	GJungmanLT	5	0	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**5,27**	5

192.–194.	*Tomáš*	*Šácha*	2	SPŠEB Břeclav	–	5	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**5,27**	5
195.–196.	*Irena*	*Bačinská*	4	ŠpMNDaG BA	0	5	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**5,00**	5
195.–196.	*Jaromír*	*Kuchyňka*	4	GStrážnice	5	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**5,00**	5
197.	*Václav*	*Krchňák*	2	GJarošeBO	0	–	–	–	5	–	–	–	–	–	–	**4,96**	69
198.	*Karel*	*Vlachovský*	2	MasG Plzeň	5	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**4,90**	82
199.–200.	*Petr*	*Gintar*	3	MendelG OP	4	0	0	–	–	–	–	–	0	–	–	**4,23**	4
199.–200.	*Silvia*	*Nepšinská*	3	GJChalBR	4	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**4,23**	4
201.	*Ondřej*	*Broža*	4		4	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**4,00**	4
202.	*Jaroslav*	*Cerman*	2	GJilemnice	4	0	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**3,65**	4
203.–204.	*Ondřej*	*Havlík*	3	MSOŠ Klob	3	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**2,88**	3
203.–204.	*Rostislav*	*Lukosz*	3	G Bohumín	3	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**2,88**	3
205.	*Jana*	*Lepšová*	4	G Dobruška	–	3	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**2,58**	79
206.	*Marcela*	*Fialová*	4	SOŠ Kolín	2	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**2,00**	2
207.	*Dušan*	*Klíma*	2	GRychnovKn	–	–	–	–	2	–	–	–	–	–	–	**1,91**	2
208.	*Kateřina*	*Fuková*	1	GOhradníPH	0	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**0,00**	0

adresa: *Korespondenční seminář*
KAM MFF UK
Malostranské náměstí 25
118 00 Praha 1
web: *http://mks.mff.cuni.cz/*
e-mail: *mks@mff.cuni.cz*