Stereometrie

3. JARNÍ SÉRIE TERMÍN ODESLÁNÍ: 7. DUBNA 2014

Řešení obsahující pouze obrázek bez slovního popisu, proč je dané řešení správné, nebudou ohodnocena plným počtem bodů.

ÚLOHA 1. (3 BODY)
Obarvěte každý z osmi vrcholů krychle jednou ze dvou barev, a to tak, aby každá rovina procházející alespoň třemi body jedné barvy procházela i nějakým bodem druhé barvy.

ÚLOHA 2. (3 BODY)
Najděte čtyřboký jehlan,[1] jehož dvě protější stěny jsou obě kolmé na podstavu.

ÚLOHA 3. (3 BODY)
Rozmístěte do prostoru šest krychlí tak, aby se žádné dvě neprotínaly a aby se každé dvě dotýkaly nějakou plochou.

ÚLOHA 4. (5 BODŮ)
Rozhodněte, zda existuje čtyřstěn, jehož tělesové výšky mají délky 1, 2, 3 a 6 cm.

ÚLOHA 5. (5 BODŮ)
Mějme čtyřstěn s opsanou a vepsanou koulí. Označme R poloměr koule opsané, r poloměr koule vepsané, a délku nejdelší hrany čtyřstěnu a h délku jeho nejkratší tělesové výšky. Dokažte nerovnost

$$\frac{R}{r} > \frac{a}{h}.$$

ÚLOHA 6. (5 BODŮ)
David vlastní pozemek ve městě, kde stojí několik výškových budov.[2] Řekneme, že jedna budova stíní jinou, pokud spojnice jejich horních konců svírá s rovinou města úhel větší než 45°. Dokažte, že pokud ve městě žádná budova nestíní jinou, může David na svém pozemku postavit budovu vysokou tak, že to bude platit i nadále.

ÚLOHA 7. (5 BODŮ)
Koule vepsaná čtyřstěnu $ABCD$ se dotýká stěny ABC v bodě E. Koule jemu připsaná[3] vzhledem k vrcholu D se stěny ABC dotýká v bodě F. Dokažte, že $|\sphericalangle ABE| = |\sphericalangle CBF|$.

[1] Jehlan (n-boký) je těleso určené *podstavou*, což je ne nutně pravidelný n-úhelník, a *hlavním vrcholem*, což je bod mimo rovinu podstavy.

[2] Předpokládejme, že město je vodorovná rovina, výškové budovy jsou svislé úsečky se spodními konci v této rovině a pozemek je bod v této rovině.

[3] Koule dotýkající se rovin ABD, BCD a ACD mimo čtyřstěn a roviny ABC uvnitř příslušné stěny čtyřstěnu.

Úloha 8. (5 bodů)

Máme jehlan[1] s podstavou $A_1A_2\ldots A_n$ ($n \geq 4$) a hlavním vrcholem V. Nechť rovina ϱ protíná hrany $VA_1, VA_2, \ldots, VA_n$ v bodech $B_1, B_2, \ldots, B_n$. Dokažte, že pokud jsou mnohoúhelníky $A_1A_2\ldots A_n$ a $B_1B_2\ldots B_n$ podobné (vrcholy si odpovídají v tomto pořadí), pak je ϱ rovnoběžná s podstavou.

Stereometrie

3. jarní série — Vzorové řešení

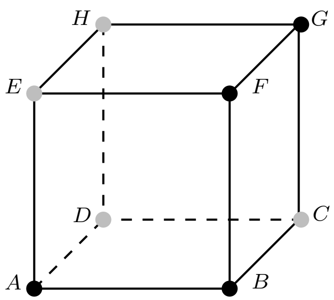
Úloha 1. (56; 46; 2,36; 3,0)

Obarvěte každý z osmi vrcholů krychle jednou ze dvou barev, a to tak, aby každá rovina procházející alespoň třemi body jedné barvy procházela i nějakým bodem druhé barvy.

(Pepa Tkadlec)

Řešení:

Označme a obarvěme vrcholy krychle tak jako na obrázku. Roviny, které procházejí třemi body modré barvy, jsou celkem čtyři, a sice ABF, ABG, AFG a BFG. V těchto rovinách přitom leží po řadě červené body E, H, D a C. Ze symetrie obarvení podle spojnice středů čtverců $ABCD$ a $EFGH$ plyne, že i všechny roviny procházející třemi červenými vrcholy obsahují alespoň jeden vrchol jiné barvy. Naše obarvení tak vyhovuje zadání.



Poznámky:

S úlohou si většina řešitelů hravě poradila. Bohužel se ale našlo i poměrně velké množství lidí, kteří zapomněli na roviny procházející právě třemi vrcholy krychle. Někteří dokonce prohlašovali za zjevné, že takové neexistují, ale rovina ACF dokládá, že se mýlili.

Na závěr bych chtěl všem doporučit, aby si pečlivě četli zadání. Například v této sérii jsme jasně upozornili, že řešení neobsahující jakékoliv zdůvodnění nebudou hodnocena plným počtem bodů. I přesto několik řešitelů poslalo jen obrázek, což je zbytečně připravilo o jeden bod.

(Martin „E.T.“ Sýkora)

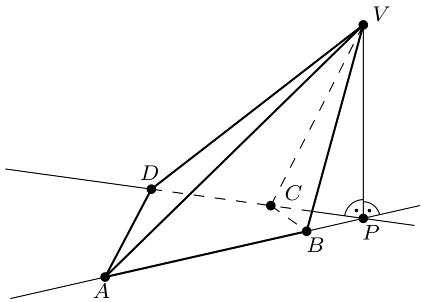
Úloha 2. (55; 46; 2,36; 3,0)

Najděte čtyřboký jehlan,[4] jehož dvě protější stěny jsou obě kolmé na podstavu.

(David Hruška)

Řešení:

Čtyřboký jehlan vyhovující zadání můžeme sestrojit následujícím způsobem. Za podstavu zvolíme libovolný čtyřúhelník $ABCD$ takový, že strany AB a CD jsou různoběžné. Průsečík přímek AB a CD označíme P a na kolmici k rovině $ABCD$ z bodu P zvolíme bod V různý od P. Roviny stěn ABV a CDV pak obsahují přímku PV, takže jsou kolmé na podstavu, a jehlan $ABCDV$ tedy splňuje zadanou podmínku.



Poznámky:

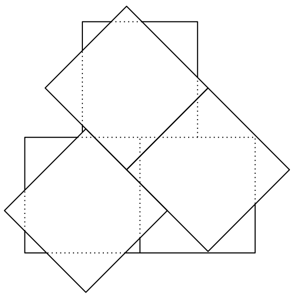
Většina řešení měla správnou myšlenku, ale řada z nich byla neúplná. Někteří z vás se například omezili na pozorování, že podstava nesmí být rovnoběžník, nebo poslali jen nedostatečně okomentovaný obrázek. Taková řešení nedostala plný počet bodů, protože z nich nebylo jasné, jak jehlan vyhovující zadání skutečně najít. *(Ondra Cífka)*

Úloha 3. (43; 33; 2,49; 3,0)

Rozmístěte do prostoru šest krychlí tak, aby se žádné dvě neprotínaly a aby se každé dvě dotýkaly nějakou plochou. *(Pepa Tkadlec)*

Řešení:

Krychle si rozdělíme na dvě trojice. Každou z těchto trojic uspořádáme tak, aby se v ní každá krychle dotýkala každé a spodní stěny byly vyrovnané v jedné rovině. Tyto dvě trojice na sebe poté položíme, horní posuneme a pootočíme tak, abychom dostali pozici podobnou na obrázku níže.



[4] Jehlan (n-boký) je těleso určené *podstavou*, což je ne nutně pravidelný n-úhelník, a *hlavním vrcholem*, což je bod mimo rovinu podstavy.

Poznámky:
Většina řešitelů poslala správné řešení, našlo se však i pár takových, kteří si neuvědomili, že krychle není pouze plášť, ale celé trojrozměrné těleso. Proto se šest krychlí, které jsou do sebe navzájem vnořené, protíná a neřeší naši úlohu. *(Martin Čech)*

Úloha 4.

(27; 20; 3,63; 5,0)

Rozhodněte, zda existuje čtyřstěn, jehož tělesové výšky mají délky 1, 2, 3 a 6 cm.

(David Hruška)

Řešení:
Objem jehlanu je $V = \frac{1}{3}v_a S_a$, kde S_a je obsah jedné stěny jehlanu a v_a jí odpovídající výška. Podle zadání mají být výšky v poměru $1 : 2 : 3 : 6$, což znamená, že obsahy stěn musejí být v poměru $6 : 3 : 2 : 1$. Z toho plyne, že obsah největší stěny je roven součtu obsahů zbylých stěn. V prostoru platí obdoba trojúhelníkové nerovnosti, která říká, že obsah jedné stěny musí být menší než součet obsahů zbylých stěn. To znamená, že zadaný čtyřstěn existovat nemůže.

Poznámky:
Sešlo se relativně málo řešení, protože bez převedení poměru délek výšek na poměr obsahů stěn nešlo úlohu rozumně řešit. Na druhou stranu, kdo na tento trik přišel, získal většinou plný počet bodů. *(Martin Töpfer)*

Úloha 5.

(22; 20; 4,59; 5,0)

Mějme čtyřstěn s opsanou a vepsanou koulí. Označme R poloměr koule opsané, r poloměr koule vepsané, a délku nejdelší hrany čtyřstěnu a h délku jeho nejkratší tělesové výšky. Dokažte nerovnost

$$\frac{R}{r} > \frac{a}{h}.$$

(Filip Hlásek)

Řešení:
Dokážeme dvě nerovnosti: (a) $a \leq 2R$, (b) $2r < h$.

(a) Libovolná úsečka spojující dva body na povrchu koule o poloměru R má délku nejvýše rovnu průměru koule, tj. $2R$. Tedy i pro nejdelší hranu a čtyřstěnu s opsanou koulí poloměru R platí $a \leq 2R$.

(b) Označme vrcholy čtyřstěnu A, B, C, D. Nechť D je vrchol, z něhož je spuštěna výška délky h. Pak koule vepsaná čtyřstěnu $ABCD$ leží celá mezi rovinou ABC a rovinou s ní rovnoběžnou procházející bodem D. Vzdálenost těchto rovin je h, proto $2r < h$. Nerovnost je ostrá, neboť vepsaná koule neprochází bodem D.

Délky a, h, r, R jsou nezáporné, tudíž můžeme dokázané nerovnosti vynásobit. Dostáváme $2ar < 2Rh$; z toho ihned plyne $\frac{R}{r} > \frac{a}{h}$, což jsme měli dokázat.

Poznámky:
Drtivá většina řešitelů, kteří úlohu poslali, ji měla správně. Dokazovaná nerovnost není silná a nebylo potřeba znát o čtyřstěnu žádné vzorečky, přesto se někteří rozhodli použít hlubších znalostí. Například, že pro povrch čtyřstěnu S a objem V platí $Sr = 3V$, $V = \frac{1}{3}hs$, kde s je obsah stěny příslušné výšce délky h. A protože součet obsahů tří stěn čtyřstěnu je větší než obsah čtvrté stěny, platí $2sr < Sr = hs$, což nám opět dává nerovnost (b). Také těmto řešením jsem samozřejmě udělila plný počet bodů. *(Míša Hubatová)*

Úloha 6.

(25; 11; 2,04; 1,0)

David vlastní pozemek ve městě, kde stojí několik výškových budov.[5] *Řekneme, že jedna budova stíní jinou, pokud spojnice jejich horních konců svírá s rovinou města úhel větší než* 45°*. Dokažte, že pokud ve městě žádná budova nestíní jinou, může David na svém pozemku postavit budovu vysokou tak, že to bude platit i nadále.* *(Pepa Tkadlec)*

Řešení:

V bodě D Davidova pozemku vztyčíme kolmici k podstavné rovině a vyznačíme na ní následující intervaly: Pro $i \in \{1, 2, \dots , n\}$ vyznačíme interval $I_i = \langle h_i - d_i, h_i + d_i\rangle$, kde h_i je výška i-tého domu a d_i je půdorysná vzdálenost i-tého domu od bodu D. Všimneme si, že interval I_i určuje dovolenou výšku Davidova domu vzhledem k i-tému domu.

Označme nejvyšší hodnotu ze všech dolních mezí těchto intervalů jako a a nejnižší ze všech horních mezí jako b. Pokud $a \leq b$, může David postavit budovu s libovolnou výškou z intervalu $\langle a, b\rangle$. Zbývá ukázat, že možnost $a > b$ nemohla nastat. Pro důkaz sporem proto předpokládejme, že nastala.

Nechť a je dolní mez intervalu I_p a b horní mez intervalu I_q (z $a > b$ plyne $p \neq q$). Tedy

$$h_p - d_p > h_q + d_q,$$
$$h_p - h_q > d_p + d_q \geq d_{pq},$$

kde d_{pq} značí vzdálenost p-té a q-té budovy. Rozdíl výšek p-té a q-té budovy převyšuje jejich vzdálenost, čili budova p stíní budovu q, což je spor se zadáním.

Poznámky:

V této úloze bylo zvlášť důležité hlídat ostré a neostré nerovnosti, dále pak využít trojúhelníkové nerovnosti. Bohužel jsem neobdržel žádné odůvodnění, že v případě prázdného průniku systému intervalů existují dva disjunktní. I proto jsem za to nestrhával body.

Našel se i jiný postup vedoucí k cíli, a sice konstrukcí „zakázaných“ kuželů. Bylo však nutné vše správně a srozumitelně okomentovat, aby byl tento způsob korektní.

(Jakub „Roman“ Klemsa)

Úloha 7.

(6; 4; 3,33; 5,0)

Koule vepsaná čtyřstěnu $ABCD$ se dotýká stěny ABC v bodě E. Koule jemu připsaná[6] *vzhledem k vrcholu D se stěny ABC dotýká v bodě F. Dokažte, že $|\sphericalangle ABE| = |\sphericalangle CBF|$.*

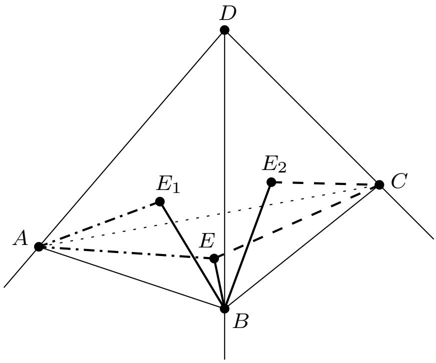
(Pepa Tkadlec)

Řešení:

Označme body dotyku gule vpísanej s rovinami ABD a BDC postupne E_1 a E_2. Podobne, body dotyku gule pripísanej s rovinami ABD a BDC postupne F_1 a F_2. Priamky BE, BE_1, BE_2 sú dotyčnice z toho istého bodu k tej istej guli, preto $|BE| = |BE_1| = |BE_2|$. Podobne z dotyčníc z bodov A a C máme $|AE| = |AE_1|$, $|CE| = |CE_2|$ a analogicky pre guľu pripísanú $|BF| = |BF_1| = |BF_2|$, $|AF| = |AF_1|$ a $|CF| = |CF_2|$. Guľa vpísaná je rovnoľahlá s guľou pripísanou podľa bodu D, a preto platí $|E_1F_1| = |E_2F_2|$.

[5] Předpokládejme, že město je vodorovná rovina, výškové budovy jsou svislé úsečky se spodními konci v této rovině a pozemek je bod v této rovině.

[6] Koule dotýkající se rovin ABD, BCD a ACD mimo čtyřstěn a roviny ABC uvnitř příslušné stěny čtyřstěnu.



Máme teda veľa dvojíc zhodných trojuholníkov:

$$\triangle ABE \cong \triangle ABE_1, \quad \triangle ABF \cong \triangle ABF_1,$$
$$\triangle CBE \cong \triangle CBE_2, \quad \triangle CBF \cong \triangle CBF_2, \quad \triangle E_1BF_1 \cong \triangle E_2BF_2.$$

Preto platí:

$$|\sphericalangle ABE| = |\sphericalangle ABE_1|, \quad |\sphericalangle ABF| = |\sphericalangle ABF_1|,$$
$$|\sphericalangle CBE| = |\sphericalangle CBE_2|, \quad |\sphericalangle CBF| = |\sphericalangle CBF_2|, \quad |\sphericalangle E_1BF_1| = |\sphericalangle E_2BF_2|.$$

A keďže

$$|\sphericalangle ABE_1| + |\sphericalangle ABF_1| = |\sphericalangle E_1BF_1| = |\sphericalangle E_2BF_2| = |\sphericalangle CBE_2| + |\sphericalangle CBF_2|,$$

dostávame:

$$|\sphericalangle ABE| + |\sphericalangle ABF| = |\sphericalangle CBE| + |\sphericalangle CBF|.$$

Bez ujmy na všeobecnosti predpokladajme, že $|\sphericalangle ABE| \leq |\sphericalangle ABF|$, a teda aj $|\sphericalangle CBE| \geq |\sphericalangle CBF|$, potom

$$|\sphericalangle ABE| + |\sphericalangle ABF| = |\sphericalangle CBE| + |\sphericalangle CBF|,$$
$$2|\sphericalangle ABE| + |\sphericalangle EBF| = |\sphericalangle EBF| + 2|\sphericalangle CBF|$$

a konečne $|\sphericalangle ABE| = |\sphericalangle CBF|$.

Poznámky:

Riešení bolo málo, ale zato v dvoch tretinách prípadov boli správne. Tým dvom, čo neuspeli, odkazujem, nech nezúfajú. A pre ostatných sa aspoň nájde skrytá slovná úloha: Koľko bolo riešení? *(Marta Kossaczká)*

Úloha 8.

(6; 0; 0,00; 0,0)

Máme jehlan[4] *s podstavou* $A_1A_2\dots A_n$ $(n \geq 4)$ *a hlavním vrcholem* V. *Nechť rovina* ϱ *protíná hrany* $VA_1, VA_2, \dots, VA_n$ *v bodech* $B_1, B_2, \dots, B_n$. *Dokažte, že pokud jsou mnohoúhelníky* $A_1A_2\dots A_n$ *a* $B_1B_2\dots B_n$ *podobné (vrcholy si odpovídají v tomto pořadí), pak je* ϱ *rovnoběžná s podstavou.* *(Alexander „Olin“ Slávik)*

Řešení:

Symbolem $S_{X_1X_2\dots X_k}$ budeme dále značit obsah mnohoúhelníku $X_1X_2\dots X_k$ a symbolem $V_{X_1X_2\dots X_k}$ objem jehlanu $VX_1\dots X_k$. Označme

$$t = \frac{V_{A_1\dots A_n}}{V_{B_1\dots B_n}}.$$

Pokud nazveme v_a, v_b postupně vzdálenosti vrcholu V od roviny podstavy a roviny ρ, můžeme spočítat objemy

$$V_{A_1A_3A_4} = \frac{v_a}{3}S_{A_1A_3A_4}, \quad V_{B_1B_3B_4} = \frac{v_b}{3}S_{B_1B_3B_4},$$

$$V_{A_1\dots A_n} = \frac{v_a}{3}S_{A_1\dots A_n}, \quad V_{B_1\dots B_n} = \frac{v_b}{3}S_{B_1\dots B_n}.$$

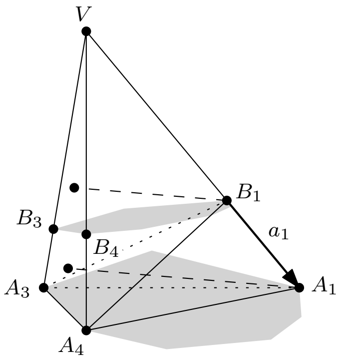
Podobnost podstav $A_1\dots A_n$ a $B_1\dots B_n$ dává shodnost poměrů

$$\frac{S_{A_1A_3A_4}}{S_{B_1B_3B_4}} = \frac{S_{A_1\dots A_n}}{S_{B_1\dots B_n}},$$

a proto i

$$\frac{V_{A_1A_3A_4}}{V_{B_1B_3B_4}} = \frac{V_{A_1\dots A_n}}{V_{B_1\dots B_n}} = t.$$

Nyní spočteme poměr objemů jehlanů $VA_1A_3A_4$ a $VB_1B_3B_4$ jiným způsobem. Označme $a_i = |VA_i| : |VB_i|$ pro $i = 1, \dots, n$. Počítejme objem jehlanu $VA_1A_3A_4$ jako podstava VA_3A_4 krát výška z bodu A_1 děleno třemi. Bod A_1 je od roviny VA_3A_4 přesně a_1-krát dál než bod B_1. Proto $V_{A_1A_3A_4} = a_1V_{B_1A_3A_4}$.



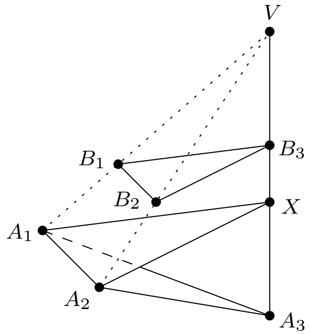
Opakováním úvahy dostáváme

$$V_{A_1A_3A_4} = a_1V_{B_1A_3A_4} = a_1a_3V_{B_1B_3A_4} = a_1a_3a_4V_{B_1B_3B_4},$$

takže $a_1a_3a_4 = t$. Obdobným způsobem bychom dostali i $a_2a_3a_4 = t$, a tak nutně $a_1 = a_2$. Cyklickou záměnou značení nakonec zjistíme, že všechna a_i jsou si rovna. To znamená, že mnohoúhelník $A_1\dots A_n$ vznikne z $B_1B_2\dots B_n$ stejnolehlostí se středem V a koeficientem a_1, takže jsou tyto mnohoúhelníky rovnoběžné.

Poznámky:

Jakkoli se to z řešení zcela nezdá, úloha se ukázala být velmi těžkou a žádný řešitel s ní nepohnul (počítat objemy byl zkrátka megatrik). Došlo sice několik pokusů přesvědčit mě důkazem opačné implikace či tvrzením „když jsou podstavy podobné, tak musí být stejnolehlé“, ale přesto jsem za celé opravování nerozdal ani bod. Kamenem úrazu, se kterým (zdá se) žádný z těchto pokusů o řešení nepočítal, je skutečnost, že pokud bychom v úloze povolili $n = 3$, tvrzení již neplatí.



Uvažme v prostoru dva shodné trojúhelníky $A_1A_2A_3$ a A_1A_2X, které neleží ve stejné rovině. Dále volme vrchol V na přímce XA_3. Kdykoli zvolíme rovinu ρ rovnoběžnou s trojúhelníkem A_1A_2X, bude ze stejnolehlosti výsledný trojúhelník $B_1B_2B_3$ podobný trojúhelníku A_1A_2X, a tedy i s ním shodnému $A_1A_2A_3$, avšak rovina ρ bude rovnoběžná s rovinou A_1A_2X, a nikoli s podstavou $A_1A_2A_3$. *(Mirek Olšák)*