Funkce

3. PODZIMNÍ SÉRIE TERMÍN ODESLÁNÍ: 2. PROSINCE 2013

ÚLOHA 1. (3 BODY)

Z jednoho znaku x, tří jedniček, tří minusů a čtyř svislých čar (tj. symbolů použitelných pro zápis absolutní hodnoty) složte výraz, jehož hodnota je nulová pro alespoň čtyři reálná čísla x.

ÚLOHA 2. (3 BODY)

Nalezněte nekonstantní funkci $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takovou, že funkce $f(2x)$ a $(f(x))^2$ jsou periodické a mají stejnou nejkratší periodu.

ÚLOHA 3. (3 BODY)

Jsou dány ryze[1] monotónní funkce $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takové, že funkce $f(g(x))$ je rostoucí. Dokažte, že funkce $g(f(x))$ je rovněž rostoucí.

ÚLOHA 4. (5 BODŮ)

Je dána funkce $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ splňující současně následující dvě podmínky:

(i) Pro každá dvě nesoudělná[2] kladná celá čísla a, b platí $f(ab) = f(a) \cdot f(b)$.

(ii) Pro každá dvě (ne nutně různá) prvočísla p, q platí $f(p+q) = f(p) + f(q)$.

Dokažte, že $f(3) = 3$.

ÚLOHA 5. (5 BODŮ)

Najděte všechna reálná čísla x, pro která platí[3]

$$x\lfloor x\lfloor x\lfloor x\rfloor\rfloor\rfloor = 2001.$$

ÚLOHA 6. (5 BODŮ)

Pro daná dvě celá čísla p, q uvažme kvadratickou funkci $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ určenou předpisem

$$f(x) = x^2 + px + q.$$

Řekneme, že celé číslo t je *dobré*, jestliže čísla $f(t)$ a $f(t+1)$ jsou různá a jedno je násobkem druhého. Dokažte, že je-li počet dobrých čísel konečný, pak je sudý.

ÚLOHA 7. (5 BODŮ)

Rozhodněte, zda lze funkci $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ určenou předpisem $f(x) = x^2$ zapsat jako součet dvou periodických funkcí.

ÚLOHA 8. (5 BODŮ)

Nalezněte všechny funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takové, že pro všechny čtveřice reálných čísel x, y, u, v splňujících $x + y = u + v$ platí

$$\big(f(x) - f(y)\big) \cdot (u - v) = \big(f(u) - f(v)\big) \cdot (x - y).$$

---

[1] O funkci řekneme, že je ryze monotónní, pokud je rostoucí nebo klesající.

[2] Dvě celá čísla jsou *nesoudělná*, jestliže je jejich největší společný dělitel roven jedné.

[3] Symbol $\lfloor x\rfloor$ značí dolní celou část čísla x, tedy největší celé číslo nepřevyšující x.

Povídání k třetí podzimní sérii

Třetí podzimní série prověří Tvoji zdatnost v práci s funkcemi. Tento text by Ti měl pomoci zorientovat se v zadáních úloh a osvětlit některé důležité pojmy. Pokud však zadáním rozumíš už teď, není třeba jej číst příliš podrobně.

Co je funkce?

Pravděpodobně nejnázornější pohled na funkce (někdy též zvané *zobrazení*) je ten, že funkci vnímáme jako tajemnou černou krabičku. Tato krabička přijímá nějaké vstupy[4] a v závislosti na tom, jaký vstup dostane, vydá výstup. Množinu všech vstupů funkce f nazýváme *definičním oborem* a značíme zpravidla D_f nebo $D(f)$, množinu všech výstupů nazýváme *oborem hodnot* a značíme H_f nebo $H(f)$.

Formálněji můžeme říci, že funkce $f\colon X \to Y$ je přiřazení, v němž každému $x \in X$ odpovídá právě jedno $y \in Y$.[5] Tento zápis nám tedy prozrazuje, že funkce f je definována na celém X ($D(f) = X$). O tom, jestli tato funkce nabývá všech hodnot z Y, ovšem nic neříká.

Rovností funkcí $f = g$ rozumíme, že $D(f) = D(g)$ a zároveň $f(x) = g(x)$ pro všechna x z definičního oboru. Rovnost $f(x) = g(x)$ přitom znamená, že funkční hodnoty v bodě x jsou u obou funkcí stejné.

Definujeme-li funkci předpisem, musíme uvádět její definiční obor vždy, když není zřejmý z kontextu. Pokud tedy napíšeme pouze $f(x) = x^2$, nedefinujeme tím žádnou funkci, neboť o x nic nevíme. Dále je dobré si uvědomit, že funkce není totéž, co předpis funkce. Uvážíme-li například

$$f(x) = x^2 - 1,\ x \in \mathbb{R}, \qquad g(x) = (x+1)(x-1),\ x \in \mathbb{R},$$

vidíme, že ačkoliv se předpisy těchto dvou funkcí liší, platí $f = g$.

Některé funkce navíc vůbec nemusejí být dány vzorcem. Takovou funkcí může být třeba $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$, která každému reálnému číslu přiřadí počet sedmiček v jeho desetinném zápisu, pokud jich je konečně mnoho, a -1 v opačném případě.

Vlastnosti funkcí

U funkcí rozlišujeme různé vlastnosti, jejichž znalost nám mnohdy může značně pomoci při řešení úloh. Zde je uveden seznam těch, se kterými se shledáváme nejčastěji. Funkce $f\colon X \to Y$ je

(i) *rostoucí*, pokud pro každá dvě $x, y \in X$ taková, že $x > y$, platí $f(x) > f(y)$,
(ii) *klesající*, pokud pro každá dvě $x, y \in X$ taková, že $x > y$, platí $f(x) < f(y)$,
(iii) *neklesající*, pokud pro každá dvě $x, y \in X$ taková, že $x > y$, platí $f(x) \geq f(y)$,
(iv) *nerostoucí*, pokud pro každá dvě $x, y \in X$ taková, že $x > y$, platí $f(x) \leq f(y)$,
(v) *monotónní*, pokud je nerostoucí nebo neklesající,

[4] Těm formálněji říkáme *argumenty*.

[5] Písmena X, Y značí nějaké (libovolné) množiny. My si ale vystačíme s běžně používanými číselnými množinami, jimiž jsou například přirozená nebo reálná čísla.

(vi) *periodická*, pokud existuje kladné reálné číslo t takové, že pro všechna $x \in X$ platí $x \pm t \in X$ a zároveň $f(x) = f(x + t)$,[6]
(vii) *sudá*, pokud pro každé $x \in X$ platí $-x \in X$ a zároveň $f(x) = f(-x)$,
(viii) *lichá*, pokud pro každé $x \in X$ platí $-x \in X$ a zároveň $f(x) = -f(-x)$,
(ix) *prostá*, pokud nabývá každé hodnoty nejvýše jednou, tedy pokud pro každá dvě $x, y \in X$ taková, že $x \neq y$, platí $f(x) \neq f(y)$,
(x) *na*, pokud nabývá každé hodnoty z Y alespoň jednou, tedy pokud pro každé $z \in Y$ existuje $x \in X$ takové, že $f(x) = z$,
(xi) *bijekce*, pokud je prostá a zároveň na, tedy pokud nabývá každé hodnoty z množiny Y právě jednou.

Abychom se s výše uvedenými pojmy seznámili, vyřešíme si následující příklad.

Příklad. Dokažte, že periodická funkce nemůže být rostoucí.

Řešení. Předpokládejme, že funkce f je periodická s nějakou periodou t. Dále si zvolme libovolné x_0 z definičního oboru funkce f. Protože t je kladné číslo, platí $x_0 + t > x_0$. Zároveň ale z definice periodické funkce vyplývá, že $f(x_0 + t) = f(x_0)$. Tedy f nemůže být rostoucí.

Skládání funkcí

Při práci s funkcemi se můžeme setkat s pojmem *skládání funkcí*. Abychom si tento termín vysvětlili, opět se vrátíme ke „krabičkovému modelu funkcí“. Předpokládejme, že máme dvě krabičky (funkce) takové, že výstupy jedné fungují jako vstupy té druhé, ze které vycházejí nějaké finální výstupy. Tyto dvě funkce se tedy dohromady chovají jako jedna samostatná funkce. Tomuto „zapojování funkcí za sebe“ říkáme skládání.

Poněkud formálněji se můžeme na skládání funkcí dívat takto: Mějme funkce $f\colon A \to B$, $g\colon B \to C$ a definujme funkci $g \circ f$ předpisem $(g \circ f)(x) = g(f(x))$,[7] přičemž definičním oborem této funkce je množina A. Funkci $g \circ f$ nazýváme složenou funkcí.

Povšimni si ale, že vnitřní funkce musí zobrazovat do definičního oboru vnější funkce. Kdybychom tedy chtěli složit $f \circ g$, musela by být množina C podmnožinou množiny A.

Dále je důležité si uvědomit, že $f \circ g$ není totéž jako $g \circ f$. Položme $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}; f(x) = x^2$, $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}; g(x) = x - 1$. Pak pro každé reálné x máme $(f \circ g)(x) = (x-1)^2$, zatímco $(g \circ f)(x) = x^2 - 1$. Tedy například $(f \circ g)(0) = 1 \neq -1 = (g \circ f)(0)$.

Funkcionální rovnice

Bavíme-li se o funkcionálních rovnicích, máme na mysli rovnice, v nichž jsou neznámými funkce, nikoliv čísla. Jinak řečeno, hledáme funkce (resp. jejich předpisy) takové, že pro všechna možná čísla z nějaké množiny platí zadaná rovnost. Obecný postup řešení těchto rovnic neexistuje, většinou ale postupujeme v několika základních krocích. Prvním z nich je předpoklad, že nějaká funkce f je řešením naší rovnice. Druhým je zjišťování vlastností této funkce za pomoci dané rovnice (většinou tak, že dosazujeme konkrétní hodnoty). Posledním, často opomíjeným krokem je ověření, že námi nalezená funkce je opravdu řešením dané rovnice. Pro objasnění si vyřešme dva ilustrační příklady:

Příklad. Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující pro všechna reálná x, y vztah

$$f(xy) = yf(x).$$

[6] Číslo t se pak nazývá *periodou* funkce f.
[7] Právě kvůli tomuto předpisu říkáme funkci, do které vstupují x, *vnitřní* a té druhé *vnější*.

Řešení. Předpokládejme, že funkce f je řešením dané rovnice. Zadaný vztah má platit pro všechny dvojice x, y, takže musí speciálně platit pro ty dvojice, v nichž je $x = 1$, neboli

$$f(1 \cdot y) = yf(1),$$
$$f(y) = yf(1).$$

Úprava, kterou jsme právě udělali, není ekvivalentní, protože zkoumá pouze jeden konkrétní případ $x = 1$. Může tedy existovat funkce, která neřeší naši rovnici, ale tomuto konkrétnímu případu vyhovuje. Proto musíme při řešení funkcionálních rovnic vždy provádět zkoušku.

Teď, poučeni o nutnosti zkoušky, pokračujme v řešení. Protože $f(1)$ je nějaké (neměnné) reálné číslo, můžeme jej označit $c = f(1)$ a psát $f(y) = cy$. Nyní stačí zjistit, pro která c je funkce $f(y) = cy$ opravdu řešením. Dosazením do původní rovnice dostáváme:

$$f(xy) = yf(x),$$
$$c \cdot xy = y \cdot cx,$$

což platí pro všechna reálná c. Řešením jsou tedy všechny funkce tvaru $f(x) = cx$, kde c je nějaké pevné reálné číslo.

Možná Tě překvapilo, že jsme na konci řešení nedělali zkoušku. Ve skutečnosti jsme ji ale provedli, byť poněkud skrytě, v posledním kroku.

Příklad. Nalezněte všechny funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vyhovující pro všechna $x, y \in D(f)$ rovnici

$$f(xy) = x + f(y).$$

Řešení. Předpokládejme, že funkce f vyhovuje zadání, a do rovnice dosaďme $y = 1$. Po úpravě získáme $f(x) = x + f(1)$. Tedy $f(x)$ je tvaru $x + c$, kde c je reálné číslo. Nyní už nám zbývá jen zjistit, pro která c je funkce $f(x) = x + c$ řešením. Víme, že pro všechna x, y má být splněn vztah $f(xy) = x + f(y)$, tedy:

$$xy + c = x + y + c,$$
$$xy = x + y.$$

Tento výraz však neplatí pro všechna reálná čísla x, y, takže námi nalezená funkce neřeší rovnici pro žádné reálné c. Zadaná rovnice tedy nemá řešení.

Pro hlubší seznámení s tématem funkcionálních rovnic doporučujeme prostudovat nějaký z textů k sérii na téma funkcionální rovnice z minulých ročníků (ty je možné nalézt v sekci našich stránek „minulé ročníky“), nebo nějaký z příspěvků o funkcionálních rovnicích v knihovně na našich internetových stránkách.[8]

[8] *http://mks.mff.cuni.cz/library/FunkcionalniRovniceVM/FunkcionalniRovniceVM.pdf*

Funkce

3. PODZIMNÍ SÉRIE VZOROVÉ ŘEŠENÍ

Úloha 1.

(91; 89; 2,86; 3,0)

Z jednoho znaku x, tří jedniček, tří minusů a čtyř svislých čar (tj. symbolů použitelných pro zápis absolutní hodnoty) složte výraz, jehož hodnota je nulová pro alespoň čtyři reálná čísla x. *(Anička Doležalová)*

ŘEŠENÍ:

Myšlenka úlohy spočívá v tom, že do sebe vnoříme dvě absolutní hodnoty. Příkladem řešení je funkce $f(x) = ||x| - 1 - 1| - 1$, která je nulová pro $x = \pm 1$ a $x = \pm 3$.

POZNÁMKY:

U této úlohy mě překvapila invence některých řešitelů, kteří se snažili část znaků umístit do exponentu. Bohužel si často neuvědomili, že 0^0 nemá definovanou hodnotu, a tak nalezené funkce neměly za definiční obor všechna reálná čísla. Objevilo se ale i několik řešitelů, kterým se povedlo najít funkci identicky rovnou nule. Příkladem takové funkce je $f(x) = |-1^1| - |-1^x|$.

(Martin Töpfer)

Úloha 2.

(49; 42; 2,49; 3,0)

Nalezněte nekonstantní funkci $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takovou, že funkce $f(2x)$ a $(f(x))^2$ jsou periodické a mají stejnou nejkratší periodu. *(Martin Sýkora)*

PRVNÍ ŘEŠENÍ:

Definujme funkci

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x \text{ celá sudá,} \\ -1 & \text{pro } x \text{ celá lichá,} \\ 0 & \text{pro } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Tato f je tedy dobře definována na $\mathbb{R}$. Ukážeme, že $f(2x)$ a $(f(x))^2$ jsou periodické a mají stejnou nejkratší periodu.

$$f(2x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x \text{ celá,} \\ -1 & \text{pro } x = \frac{k}{2}, \text{ kde } k \text{ je liché,} \\ 0 & \text{pro ostatní } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Tedy $f(2x)$ je periodická a má nejkratší periodu rovnu jedné.

$$(f(x))^2 = \begin{cases} 1 & \text{pro } x \in \mathbb{Z}, \\ 0 & \text{pro } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Tedy $(f(x))^2$ má nejkratší periodu také rovnu jedné.

Funkce $f(2x)$ a $(f(x))^2$ jsou periodické a mají stejnou nejkratší periodu, proto je zvolená f řešením úlohy.

Druhé řešení:

Ukážeme, že pro $f(x) = \sin(x)$ mají funkce $f(2x)$ a $(f(x))^2$ stejnou nejkratší periodu. Protože funkce $\sin(x)$ má nejkratší periodu 2π, pro funkci $\sin(2x)$ je to π. Nyní určíme nejkratší periodu funkce $\sin^2(x)$.

Platí $\sin x = -\sin(x + \pi)$, tedy $\sin^2(x) = \sin^2(x + \pi)$, proto π je perioda funkce $\sin^2 x$. Pro $x \in (0, \pi)$ platí, že $\sin x \neq 0$, tedy také $\sin^2 x \neq 0$, ale $\sin^2(0) = 0$, proto π je nejkratší perioda funkce $\sin^2 x$.

Tedy funkce $\sin(2x)$ a $\sin^2 x$ jsou periodické a mají stejnou nejkratší periodu, proto $f(x) = \sin x$ je řešením úlohy.

Poznámky:

Drtivá většina řešitelů volila $f(x) = \sin x$, ale ne všichni úspěšně ukázali, že skutečně $\sin(2x)$ a $\sin^2 x$ mají stejnou nejkratší periodu. O tom ale přece byla tahle úloha – vybrat si takovou f, u které umím ukázat nejen jaká je perioda $f(2x)$ a $(f(x))^2$, ale dokonce jaká je nejkratší perioda těchto funkcí. Z tohoto hlediska se mi první vzorové řešení zdá mnohem snazší, je to na něm totiž opravdu „vidět“. *(Michaela „Míša“ Hubatová)*

Úloha 3.

(52; 34; 1,96; 2,0)

Jsou dány ryze[9] monotónní funkce $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takové, že funkce $f(g(x))$ je rostoucí. Dokažte, že funkce $g(f(x))$ je rovněž rostoucí. *(David Hruška)*

Řešení:

Funkce f, g jsou podle zadání ryze monotónní, čili každá z nich je buď rostoucí, nebo klesající. Předpokládejme nejprve, že g je klesající. Vezměme si dvě libovolná reálná čísla x_1, x_2 splňující $x_1 < x_2$. Z předpokladu a definice klesající funkce plyne $g(x_1) > g(x_2)$. Ze zadání víme, že $f(g(x_1)) < f(g(x_2))$. Pokud by f byla rostoucí, platila by poslední nerovnost obráceně, čili f musí být klesající funkcí (víme už, že je rostoucí, nebo klesající). Potom již dvojím použitím definice klesající funkce pro každá dvě reálná $x_1 < x_2$ dostáváme $f(x_1) > f(x_2)$, a následně $g(f(x_1)) < g(f(x_2))$, což znamená, že složená funkce $g(f(x))$ je opravdu rostoucí, jak jsme měli dokázat.

Pokud je g rostoucí, dostaneme stejným postupem jako v prvním případě pro každá dvě reálná $x_1 < x_2$ nerovnost $g(x_1) < g(x_2)$. To spolu s $f(g(x_1)) < f(g(x_2))$ znamená, že f nemůže být klesající, proto je rostoucí. Opět tedy dostáváme $g(f(x_1)) < g(f(x_2))$, čili $g(f(x))$ je rostoucí funkce.

Poznámky:

Úloha byla jednoduchá, přesto byla zhruba polovina řešení zmatených nebo vyloženě scestných. Někteří z vás si správně všimli, že se monotónní funkce při skládání chovají jako násobení kladných/záporných čísel (známá pravidla typu „minus krát minus je plus“), ale místo důkazu tato „odpozorovaná“ pravidla jen používali. Jádrem úlohy byla právě manipulace s definicemi rostoucích a klesajících funkcí, takže za prohlašování těchto pravidel za zřejmá jsem bod(y) strhával. Několik řešitelů se také pokoušelo úlohu derivovat (v PraSeti se důrazně nedoporučuje) a bohužel došlo i na klasický přístup – ověření tvrzení pro jednu konkrétní dvojici funkcí, což přesně v úlohách typu „Dokažte …“ od řešitelů nechceme, ale o tom bylo již řečeno a napsáno dost. Na druhou stranu přišlo i mnoho správných a stručných řešení, nad kterými jsem si spravil náladu. *(David Hruška)*

[9] O funkci řekneme, že je ryze monotónní, pokud je rostoucí nebo klesající.

Úloha 4. (60; 48; 3,93; 5,0)

Je dána funkce $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *splňující současně následující dvě podmínky:*

(i) *Pro každá dvě nesoudělná*[10] *kladná celá čísla* a, b *platí* $f(ab) = f(a) \cdot f(b)$.

(ii) *Pro každá dvě (ne nutně různá) prvočísla* p, q *platí* $f(p+q) = f(p) + f(q)$.

Dokažte, že $f(3) = 3$. *(Filip Hlásek)*

Řešení:

Předpokládejme, že f je funkce vyhovující podmínkám v zadání. Speciálně tedy splňuje podmínku (i) pro nesoudělná $a = 2$, $b = 3$:

$$f(6) = f(3 \cdot 2) = f(3) \cdot f(2).$$

Zároveň pro funkci f platí podmínka (ii) pro prvočísla $p = 3$, $q = 3$:

$$f(6) = f(3+3) = f(3) + f(3) = 2f(3).$$

Vydělením předchozích dvou rovností získáváme $f(2) = 2$ (všechny členy jsou přirozená čísla).

Dále využijeme platnosti první podmínky pro nesoudělná $a = 3$, $b = 4$:

$$f(12) = f(3 \cdot 4) = f(3) \cdot f(4).$$

Poté několikrát použijeme druhou podmínku pro prvočísla 2, 3, 5, 7 a dosadíme předem zjištěné hodnoty. Tím získáme

$$\begin{aligned} f(4) &= f(2+2) = f(2) + f(2) = 4,\\ f(5) &= f(2+3) = f(2) + f(3) = 2 + f(3),\\ f(7) &= f(2+5) = f(2) + f(5) = 4 + f(3),\\ f(12) &= f(5+7) = f(5) + f(7) = 6 + 2f(3). \end{aligned}$$

Důkaz dokončíme srovnáním hodnoty $f(12)$:

$$\begin{aligned} f(3)f(4) &= 6 + 2f(3),\\ 4f(3) &= 6 + 2f(3),\\ f(3) &= 3. \end{aligned}$$

Poznámky:

Úloha vypadala na první pohled poměrně jednoduše, ale když do ní člověk zkusil něco dosadit, brzy zjistil, že zrovna hodnotu $f(3)$ není snadné vyjádřit. V podstatě všechna správná řešení se k výsledku dopracovala stejně jako v tom autorském za použití hodnoty $f(12)$. Bez chyby bylo také jedno, které mimo jiné používalo $f(11)$, $f(13)$, $f(19)$, $f(20)$ a $f(22)$.

Mnoho řešitelů si také správně povšimlo, že lze snadno ukázat $f(1) = 1$. Tohoto poznatku ale není možné v dalším řešení nijak použít a je potom vcelku zbytečné to do čistopisu vůbec psát.

Řešení, která nedostala plný počet bodů, se dají rozdělit do dvou skupin. První část se mě snažila (ať už úmyslně či neúmyslně) přesvědčit, že číslo 1 je prvočíslo, což bohužel není pravda. V jiné úloze by to nebyl takový problém, ale v této se jednalo o neúměrné zjednodušení, které zadaný problém činilo triviálním.

[10] Dvě celá čísla jsou *nesoudělná*, jestliže je jejich největší společný dělitel roven jedné.

Druhá častá chyba byla, že se někteří zaměřili pouze na jednu podmínku ze zadání (např. (i)) a tvrdili, že jí vyhovuje pouze značně omezená množina funkcí (např. $f(x) = k \cdot x^n$). To lze poté snadno dosadit do druhé z podmínek a ověřit, že jediná vyhovující funkce je $f(x) = x$. Úloha by takto byla jednoduchá a takové tvrzení obecně neplatí (náš příklad vyvrací funkce $f(x) = 2^{\text{počet\_prvočísel\_v\_rozkladu}(x)}$).

Kdo se nad úlohou zamýšlel dále, jistě ho napadlo zjistit, zda existuje i jiná funkce než očividná $f(x) = x$, která by vyhovovala podmínkám v zadání. Pokusme se společně dokázat, že jiná taková funkce neexistuje.

Při důkazu použijeme Goldbachovu hypotézu, která dodnes není dokázána, očekává se ale, že je platná. Pokud však neplatí, tak ani zmíněný důkaz nefunguje. Tvrzení říká, že každé sudé přirozené číslo větší než dva lze zapsat jako součet dvou prvočísel. Díky tomuto snadnému a pochopitelnému znění se hypotéza stala jedním z nejznámějších otevřených problémů, jehož rozřešením se stále můžete proslavit.

Postupujme matematickou indukcí. Použitím autorského řešení úlohy bychom pro všechna přirozená $x \leq 12$ ukázali $f(x) = x$. Dále předpokládejme, že pro přirozené $n \geq 6$ platí, že pro všechna přirozená $x \leq 2n$ je $f(x) = x$. Ukážeme, že $f(2n+1) = 2n+1$ a $f(2n+2) = 2n+2$ rozborem případů.

(1) $2n+1$ není žádná přirozená mocnina lichého prvočísla. Potom lze rozložit na součin dvou nesoudělných celých čísel a, b menších než $2n+1$, takže za použití (i) a indukčního předpokladu $f(2n+1) = f(ab) = f(a)f(b) = ab = 2n+1$.

(2) $2n+1$ je prvočíslo. Potom jedno ze sudých čísel $2n+4$ a $2n+6$ není mocninou čísla 2 a lze tedy rozložit na součin nesoudělných celých čísel větších než 1 a menších než $2n$. Použitím (i) a indukčního předpokladu dostáváme, že pro toto číslo x platí $f(x) = x$ a důkaz indukčního kroku získáme buď použitím prvočísla 3, nebo 5 společně s $2n+1$ v podmínce (ii). Všimněte si, že tento postup navíc funguje pro všechna prvočísla p taková, že $\frac{p+5}{2} \leq 2n$, neboli $p \leq 4n-5$.

(3) $2n+1$ je přirozená mocnina lichého prvočísla (alespoň druhá). Potom je podle předchozího bodu pro všechna prvočísla $p \leq 4n-5$ pravda $f(p) = p$. Kdybychom ukázali, že $f(4n+2) = 4n+2$, tak máme vyhráno, neboť by stačilo použít (i) pro nesoudělná $2n+1$ a 2. Podle Goldbachovy hypotézy lze $4n+2$ zapsat jako součet dvou prvočísel. Pokud jsou obě tato prvočísla menší nebo rovna $4n-5$, tak stačí využít (ii). Problém ale nastává, když jedno z nich je rovno 3 nebo 5.

Nechť tedy $p = 4n-3$ je prvočíslo ($p+5$ je potom $4n+2$). Aspoň jedno z čísel $p+7 = 4(n+1)$, $p+11 = 4(n+2)$ není mocninou dvojky. Označíme ho x a díky tomu, že ho lze rozložit na součin dvou nesoudělných celých čísel, která nejsou větší než $2n$, tak pomocí (i) dokážeme z indukčního předpokladu, že $f(x) = x$. Z (ii) již poté snadno plyne $f(p) = p$ a dále $f(4n+2) = 4n+2$, což jsme chtěli ukázat. Případ $4n+2 = p+3$ rozebereme analogicky (použijeme $p+5$ a $p+13$). Povšimněte si, že jsme vždy volili taková čísla, která byla dělitelná čtyřmi a šla tedy rozložit na součin dostatečně malých činitelů (nejvýše $\frac{4n+12}{3} \leq 2n$, pro $n \geq 6$, což jsme předpokládali).

To, že platí $f(2n+2) = 2n+2$, dokážeme opět snadno pomocí Goldbachovy hypotézy. Tím jsme dokázali úvodní výrok také pro $n+1$, z principu matematické indukce tak plyne platnost tvrzení.

(Filip Hlásek)

Úloha 5.

(61; 47; 2,70; 3,0)

Najděte všechna reálná čísla x, pro která platí[11]

$$x\lfloor x\lfloor x\lfloor x\rfloor\rfloor\rfloor = 2001.$$

(Martin Čech)

[11] Symbol $\lfloor x\rfloor$ značí dolní celou část čísla x, tedy největší celé číslo nepřevyšující x.

Řešení:
Jediným riešením je $x = 2001/286$. Aby sme toto mohli tvrdiť, rozoberme si priebeh funkcie $f(x) = x\lfloor x\lfloor x\lfloor x\rfloor\rfloor\rfloor$. Ukážeme, že f je na intervale $(-1,1)$ nulová, na $\langle 1,\infty)$ rastie a na $(-\infty,-1\rangle$ klesá.

Interval $(-1,1)$ si ešte rozdelíme na dva intervaly: $(-1,0)$ a $\langle 0,1)$. Pre každý z intervalov $(-1,0)$, $\langle 0,1)$, $\langle 1,\infty)$ a $(-\infty,-1\rangle$ dokážeme jeho uvedenú vlastnosť zvlášť.

$$\begin{aligned} x &\in (-1,0),\\ -x &\in (0,1),\\ \lfloor x\rfloor &= -1,\\ x\lfloor x\rfloor &= -x,\\ \lfloor x\lfloor x\rfloor\rfloor &= 0,\\ x\lfloor x\lfloor x\lfloor x\rfloor\rfloor\rfloor &= 0 = f(x), \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x &\in \langle 0,1),\\ \lfloor x\rfloor &= 0,\\ x\lfloor x\lfloor x\lfloor x\rfloor\rfloor\rfloor &= 0 = f(x). \end{aligned}$$

Takže sme ukázali, že na $(-1,1)$ je $f(x) = 0$, na tomto intervale teda $f(x) = 2001$ riešenie určite nemá.

Ďalej ukážeme, že f je na $\langle 1,\infty)$ rastúca a na $(-\infty,-1\rangle$ klesajúca. Majme teda $x > y$ z intervalu $\langle 1,\infty)$, resp. $(-\infty,-1\rangle$, potom platí:

$$\begin{aligned} x > y &\geq 1,\\ \lfloor x\rfloor \geq \lfloor y\rfloor &\geq 1\\ x\lfloor x\rfloor > y\lfloor y\rfloor &\geq 1\\ \lfloor x\lfloor x\rfloor\rfloor \geq \lfloor y\lfloor y\rfloor\rfloor &\geq 1\\ x\lfloor x\lfloor x\rfloor\rfloor > y\lfloor y\lfloor y\rfloor\rfloor &\geq 1\\ \lfloor x\lfloor x\lfloor x\rfloor\rfloor\rfloor \geq \lfloor y\lfloor y\lfloor y\rfloor\rfloor\rfloor &\geq 1\\ x\lfloor x\lfloor x\lfloor x\rfloor\rfloor\rfloor > y\lfloor y\lfloor y\lfloor y\rfloor\rfloor\rfloor &\geq 1\\ f(x) &> f(y) \end{aligned} \qquad \text{resp.} \qquad \begin{aligned} y < x &\leq -1\\ \lfloor y\rfloor \leq \lfloor x\rfloor &\leq -1\\ y\lfloor y\rfloor > x\lfloor x\rfloor &\geq 1\\ \lfloor y\lfloor y\rfloor\rfloor \geq \lfloor x\lfloor x\rfloor\rfloor &\geq 1\\ y\lfloor y\lfloor y\rfloor\rfloor < x\lfloor x\lfloor x\rfloor\rfloor &\leq -1\\ \lfloor y\lfloor y\lfloor y\rfloor\rfloor\rfloor \leq \lfloor x\lfloor x\lfloor x\rfloor\rfloor\rfloor &\leq -1\\ y\lfloor y\lfloor y\lfloor y\rfloor\rfloor\rfloor > x\lfloor x\lfloor x\lfloor x\rfloor\rfloor\rfloor &\geq 1\\ f(y) &> f(x) \end{aligned}$$

Teda f je skutočne na intervale $(-\infty,-1\rangle$ klesajúca a na $\langle 1,\infty)$ rastúca, a preto na každom z týchto intervalov môže mať rovnica $f(x) = 2001$ maximálne jedno riešenie. Na $\langle 1,\infty)$ ho skutočne má: $x = 2001/286$.

Ukážeme ďalej, že na intervale $(-\infty,-1\rangle$ rovnica $f(x) = 2001$ riešenie nemôže mať. Pre spor predpokladajme, že existuje $x \in (-\infty,-1\rangle$ také, že $f(x) = 2001$. Číslo $z = \lfloor x\lfloor x\lfloor x\rfloor\rfloor\rfloor$ je záporné a celé. Podelením rovnice $f(x) = 2001$ týmto číslom dostaneme, že x môžeme zapísať v tvare $x = 2001/z$.

Platí ale $f(-2001/303) \doteq 2007{,}6 > 2007$ a $f(-2001/304) \doteq 1994{,}4 < 1995$. Teda keby $z \geq -303$, máme $x = 2001/z \leq 2001/303$, a teda z klesania f vieme, že $f(x) > 2007 > 2001$, čo je spor s $f(x) = 2001$. Keby naopak $z \leq -304$, platilo by $x \geq 2001/304$, a teda $f(x) < 1995 < 2001$, čo je opäť spor. Rovnici $f(x) = 2001$ preto nevyhovuje žiadne záporné x a riešením je naozaj jedine $x = 2001/286$.

Poznámky:
Vo väčšine správnych riešení ste postupovali ako my. Medzi častými chybami bolo, že ste nedokázali, že riešení nemôže byť viac, síce ste túto skutočnosť ticho prepokladali a nejaké riešenie medzi 6 a 7 ste našli. V lepšom prípade ste aspoň ukázali, že na tomto intervale žiadne ďalšie riešenie byť nemôže, ale väčšinou ste sa moc nepokúšali dokázať, prečo by inde (na kladných číslach) nemohlo byť ďalšie riešenie (a podobne na záporných). Zopár riešiteľov dokonca „našlo“ aj záporné riešnie. *(Marta Kossaczká)*

Úloha 6.

(36; 31; 3,58; 4,0)

Pro daná dvě celá čísla p, q uvažme kvadratickou funkci $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ určenou předpisem

$$f(x) = x^2 + px + q.$$

Řekneme, že celé číslo t je dobré, jestliže čísla $f(t)$ a $f(t+1)$ jsou různá a jedno je násobkem druhého. Dokažte, že je-li počet dobrých čísel konečný, pak je sudý. *(Martin „E.T." Sýkora)*

Řešení:

Nejprve si uvědomme, že graf funkce f je parabola s vrcholem v bodě $-p/2$, která je osově souměrná podle osy $x = -p/2$. Proto můžeme nabýt podezření, že pokud bude nějaké dobré číslo na jednom rameni paraboly, bude nějaké jiné i na tom druhém, a tedy že je počet dobrých čísel sudý. V následujících řádcích tuto ideu formálně dokážeme.

Povšimněme si, že pro všechna reálná čísla x platí $f(x) = f(-x-p)$. Dosazením $x+1$ a $(-p-1)/2$ za x dostáváme rovnosti $f(x+1) = f(-x-p-1)$ a $f((-p-1)/2) = f((-p-1)/2+1)$. Z druhé z nich vyplývá, že číslo $(-p-1)/2$ není dobré (je-li vůbec celé).

Ostatní celá čísla (bez $(-p-1)/2$, pokud by bylo celé) pak popárujeme takovým způsobem, že v každé dvojici jsou čísla a a b právě tehdy, je-li jejich součet $-p-1$. Protože je $-p-1$ celé číslo, je toto párování korektní, neboť každému celému číslu a do dvojice skutečně přiřadí celé číslo b různé od a. Z již dříve objevených rovností $f(x) = f(-x-p)$ a $f(x+1) = f(-x-p-1)$ dosazením a za x pak vyplývá, že číslo a je dobré právě tehdy, když $b = a-p-1$ je dobré.

V každém páru tak buď obě čísla jsou, nebo obě čísla nejsou, dobrá. Jiná čísla být dobrými nemohou a tak je počet všech dobrých čísel – za předpokladu, že je konečný – sudý.

Poznámky:

Většina došlých řešení více či méně kopírovala vzorové řešení. Řešitelé se snažili najít párování dobrých čísel a většinou volili správný postup. Bohužel ale velice často chyběla diskuse kolem čísla $(-p-1)/2$. Mnoho řešitelů opomnělo zdůvodnit, že nalezená „dobrá čísla" jsou celá, což byla jedna z podmínek v zadání. Za tyto a podobné nešvary jsem strhával podle závažnosti jeden až dva body.

Několik řešitelů také argumentovalo tím, že na množině dobrých čísel (označme si ji χ) nalezli bijekci. To je sice jedna ze správných cest ke správnému řešení, ale ještě je třeba dodat, že daná bijekce je symetrická (tedy se rovná svému inverzu) a že každému prvku přiřadí nějaký jiný prvek. Pokud toto nezmíníte, může být bijekcí například cyklická záměna nebo dokonce identita, které počet prvků množiny χ nijak neomezují.

Vzhledem k tomu, že chybovali i zdatní řešitelé, dovolím si k bijekci přidat ještě pár slov. Pokud naleznete bijekci mezi dvěma množinami Ω a Ψ, znamená to, že obě množiny mají stejný počet prvků. Nalezením bijekce na jedné množině (tedy z Ω na Ω) jen ukážete, že $|\Omega| = |\Omega|$, což je ale triviálně zřejmé, takže nic takového ukazovat nemusíte. Ve skutečnosti bijekce existuje na každé neprázdné množině – například výše zmíněná identita – takže objevením nějaké bijekce nezískáte informaci žádnou. *(Martin „E.T." Sýkora)*

Úloha 7.

(38; 29; 3,11; 3,0)

Rozhodněte, zda lze funkci $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ určenou předpisem $f(x) = x^2$ zapsat jako součet dvou periodických funkcí. *(Alexander „Olin" Slávik)*

Řešení:

Dokážeme sporem, že tvrzení ze zadání neplatí. Předpokládejme, že existují periodické funkce $g, h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takové, že $g(x) + h(x) = x^2$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$, přičemž h má periodu $p \neq 0$.

Předpokládanou identitu přepíšeme na $h(x) = x^2 - g(x)$. Z periodičnosti h dostáváme pro všechna $x \in \mathbb{R}$ rovnost

$$\begin{aligned} h(x) &= h(x+p), \\ x^2 - g(x) &= (x+p)^2 - g(x+p), \\ g(x+p) - g(x) &= 2xp + p^2. \end{aligned}$$

Jelikož je g periodická funkce, je periodická i funkce daná předpisem $g(x+p)-g(x)$. To je však spor, protože $2xp+p^2$ není pro $p\neq 0$ periodickou funkcí.

Poznámky:

Přibližně polovina došlých řešení byla správně, přičemž většina z nich postupovala dosazováním hodnot 0, p, q, $p+q$ do identity $g(x)+h(x)=x^2$, kde p, resp. q je periodou g, resp. h. Výše uvedený postup je jen stručnější variací na tuto metodu. Autoři chybných řešení se zpravidla odvolávali na neplatná tvrzení o periodických funkcích – např. že musí být omezené či že jejich sčítáním dostaneme opět periodickou funkci.[12]

Ve skutečnosti jakékoliv řešení, které dostatečně nevyužívalo vlastností funkce x^2, bylo předem odsouzeno k nízkému bodovému zisku, neboť identickou funkci $i(x)=x$ jako součet dvou periodických překvapivě napsat lze. Pro zajímavost si nastíníme konstrukci oněch funkcí.

Zvolme libovolné iracionální číslo α. Naším cílem bude zkonstruovat 1-periodickou funkci g takovou, že $g(x)-x$ bude α-periodická. Pro $z\in\mathbb{R}$ definujme pomocnou funkci $p_z\colon\mathbb{Z}\to\langle 0,1)$ předpisem $p_z(n)=\{n\alpha+z\}$, kde závorkami $\{\}$ značíme zlomkovou část čísla (jako v prvním dílu seriálu). Díky iracionalitě α je p_z prostá. Ještě definujeme množinu $M_z=\{p_z(n)\mid n\in\mathbb{Z}\}$.

Není těžké si rozmyslet, že pokud mají dvě takovéto množiny M_w, M_z neprázdný průnik, pak již nutně $M_w=M_z$, můžeme tedy zkonstruovat množinu reálných čísel Z takovou, že pro každé $x\in\langle 0,1)$ bude existovat právě jedno $z_x\in Z$ takové, že $x\in M_{z_x}$. Díky této jednoznačnosti můžeme definovat naši funkci g na $\langle 0,1)$ jako $g(x)=\alpha\cdot p_{z_x}^{-1}(x)$ a na zbytku $\mathbb{R}$ ji dodefinovat periodicky.

Z definice je g 1-periodická a pro každé $x\in\mathbb{R}$ patří čísla $\{x\}$, $\{x+\alpha\}$ do téže množiny M_z pro právě jedno $z\in Z$, je tedy

$$g(x+\alpha)=\alpha\cdot p_z^{-1}(x+\alpha)=\alpha(p_z^{-1}(x)+1)=g(x)+\alpha,$$

neboli $g(x+\alpha)-(x+\alpha)=g(x)-x$, což jsme chtěli. *(Alexander „Olin“ Slávik)*

Úloha 8.

(19; 8; 2,42; 1,0)

Nalezněte všechny funkce $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ takové, že pro všechny čtveřice reálných čísel x, y, u, v splňujících $x+y=u+v$ platí

$$\big(f(x)-f(y)\big)\cdot(u-v)=\big(f(u)-f(v)\big)\cdot(x-y).$$

(Pepa Tkadlec)

Klasické řešení:

Předpokládejme, že f splňuje zadanou rovnici pro všechna x, y, u, v, pro něž platí $x+y=u+v$. Pak f tutéž rovnici splňuje pro konkrétní dosazení x, $-x$, y, $-y$, neboť to rovněž splňuje $x-x=y-y$. Pro nenulová x a y můžeme rovnici přepsat do tvaru

$$\frac{f(x)-f(-x)}{x}=\frac{f(y)-f(-y)}{y},$$

odkud vidíme, že podíl $\big(f(x)-f(-x)\big)/x$ je pro nenulová x konstantní. Označme si tuto konstantu jako $2b$. Pak můžeme psát $f(x)=2bx+f(-x)$ pro všechna $x\in\mathbb{R}$, neboť pro $x=0$ platí rovnost triviálně. Označme ještě $f(0)=c$ a $f(-1)=d$.

[12] To máme zaručeno jen tehdy, je-li podíl period sčítaných funkcí racionální číslo.

Buď nyní t libovolné reálné číslo. Proveďme dvě dosazení do původní rovnice.[13] Jest

$$\left[\tfrac{t-1}{2}, \tfrac{t+1}{2}, t, 0\right]: \qquad \left(f\left(\frac{t-1}{2}\right) - f\left(\frac{t+1}{2}\right)\right)t = (f(t)-c)(-1),$$

$$\left[\tfrac{t-1}{2}, -\tfrac{t+1}{2}, -1, 0\right]: \qquad -\left(f\left(\frac{t-1}{2}\right) - f\left(-\frac{t+1}{2}\right)\right) = t(d-c).$$

V druhé rovnici použijeme $f\left(-\frac{t+1}{2}\right) = -2b\,\frac{t+1}{2} + f\left(\frac{t+1}{2}\right)$ a pak sečteme první rovnici s t-násobkem druhé. Dostaneme

$$f(t) = (d-c+b)t^2 + bt + c.$$

Protože t bylo libovolné, musí být $f(t) = at^2 + bt + c$ pro každé $t \in \mathbb{R}$, kde a, b, c jsou nějaká reálná čísla nezávislá na t. Zkouškou se přesvědčíme, že všechny takové funkce zadání skutečně splňují.

Lišácké řešení:

Předpokládejme, že f je řešením zadané úlohy. Ukážeme, že f je polynom nejvýše druhého stupně, tj. že existují reálné konstanty a, b, c takové, že $f(x) = ax^2 + bx + c$ pro každé reálné x.

Buď P polynom nejvýše druhého stupně splňující $P(t) = f(t)$ pro $t = 0, 1, 2$. Ukážeme, že pak již $P(x) = f(x)$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$. Označme si $P(x) = ax^2 + bx + c$. Dokažme nejprve, že pokud platí $P(t) = f(t)$ pro nějaká různá $t = x, y, u$, pak tato rovnost platí i pro $t = x + y - u$.

Volbou $t = x + y - u$ splníme rovnost $t + u = x + y$ takže tyto hodnoty lze dosadit do rovnice. Jest

$$\big(f(x) - f(y)\big)(u - t) = \big(f(u) - f(t)\big)(x - y).$$

V dalším kroku využijme předpoklad, že $f(x) = P(x)$, $f(y) = P(y)$ a $f(u) = P(u)$. Dostaneme po úpravě

$$\big(P(x) - P(y)\big)(u - t) = \big(P(u) - f(t)\big)(x - y),$$
$$\big(a(x^2 - y^2) + b(x - y)\big)(u - t) = \big(au^2 + bu + c - f(t)\big)(x - y).$$

Dělením (nenulovým) výrazem $x - y$ a nahrazením $x + y = u + t$ dostaneme

$$\begin{aligned}\big(a(u + t) + b\big)(u - t) &= au^2 + bu + c - f(t),\\ f(t) &= a(t^2 - u^2) + b(t - u) + au^2 + bu + c,\\ f(t) &= at^2 + bt + c = P(t),\end{aligned}$$

což jsme chtěli ukázat.

Buď nyní x libovolné reálné číslo různé od 0, 1 a dále buď Q polynom nejvýše druhého stupně splňující $f(t) = Q(t)$ pro $t = 0, 1, x$. Potom podle předchozího pozorování je i $f(x+1) = Q(x+1)$, neboť $x + 1 = 1 + x - 0$. Stejně tak $f(2) = Q(2)$, jelikož $2 = 1 + (x + 1) - x$. Celkem $P(t) = f(t) = Q(t)$ pro $t = 0, 1, 2$. Protože P a Q jsou polynomy stupně nejvýše dva a shodují se ve třech různých bodech, nutně $P = Q$, a proto $f(x) = Q(x) = P(x)$, což jsme chtěli ukázat.

Moderní řešení:

Označme písmenem M množinu všech řešení zadané úlohy. Snadno se ověří, že funkce $f_0(x) = 1$, $f_1(x) = x$, $f_2(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$ patří do M. Dále si všimneme, že pokud $f, g \in M$, pak $f + g \in M$ a též $af \in M$ pro každou reálnou konstantu a. Množina M tedy obsahuje všechny polynomy stupně nejvýše dva. Buď nyní $h \in M$ libovolná. Nechť $P(x) = ax^2 + bx + c \in M$ je polynom takový, že $P(t) = h(t)$ pro $t = -1, 0, 1$. Funkce $f(x) = h(x) - P(x)$ je pak nulová v bodech -1, 0 a 1. Ukážeme, že f je již nulová na celém $\mathbb{R}$.

[13] Hranatými závorkami $[a, b, c, d]$ značíme dosazení a za x, b za y, c za u a d za v.

Buď x libovolné reálné číslo. Dosaďme postupně tři čtveřice

$$\begin{aligned}
&[x+1, x-1, 2x, 0]: \qquad && \big(f(x+1) - f(x-1)\big)2x = 2f(2x)\\
&[x-1, -x, -1, 0]: && -f(x-1) + f(-x) = 0\\
&[-x, x+1, 1, 0]: && f(-x) - f(x+1) = 0.
\end{aligned}$$

Přičtením $(-x)$-násobku druhé a x-násobku třetí rovnice k první získáme $f(2x) = 0$. Protože x bylo libovolné, $h = P$, čili každé řešení je polynomem nejvýše druhého stupně.

Poznámky:

Jak už to tak u osmiček bývá, řešení se dělí na ta správná a na pokusná. Hranice tentokrát byla velmi ostrá. Kdo úlohu měl a dokázal ji rozumně napsat, dostal pět bodů. Kdo střílel a trefil řešení, dostal bod.

Rozdána byla i tři *i*-čka. Dostali je *Ondřej Darmovzal* za rychlé a přehledné řešení pomocí soustavy, *František Couf* za řešení moderní a *Eduard Batmendijn*, který postupoval lišácky.

(Vít „Vejtek“ Musil)