# Teorie čísel

3. seriálová série — Termín odeslání: 7. dubna 2014

**Úloha 1.** (5 bodů)

Dokažte, že

$$\sum_{d^2 \mid n} \mu(d) = \mu^2(n).$$

**Úloha 2.** (5 bodů)

Víme, že platí známý vztah

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\sum_{i=1}^{n} i\right)^2.$$

Dokažte, že pokud je $\tau(n)$ počet dělitelů čísla $n$, pak také

$$\sum_{d \mid n} \tau(d)^3 = \left(\sum_{d \mid n} \tau(d)\right)^2.$$

**Úloha 3.** (5 bodů)

Mějme číslo $n$. Dokažte, že počet dělitelů čísla $n$ tvaru $4k+1$ je alespoň takový, jako počet dělitelů čísla $n$ tvaru $4k+3$.

# Teorie čísel

3. SERIÁLOVÁ SÉRIE | VZOROVÉ ŘEŠENÍ

## Úloha 1.

(25; 24; 4,56; 5,0)

*Dokažte, že*

$$\sum_{d^2\,|\,n} \mu(d) = \mu^2(n).$$

*(Josef Svoboda)*

ŘEŠENÍ:
Nejprve se podívejme, jaká je hodnota levé a pravé strany, pokud je $n$ bezčtvercové. Na pravé straně máme $\mu(n)^2 = (\pm 1)^2 = 1$. Součet na levé straně obsahuje jediný člen, a to $\mu(1) = 1$, neboť $d^2 = 1$ je jediný čtverec, který dělí bezčtvercové $n$. Rovnost je tedy splněna.

Nyní se zabývejme případem, kdy $n$ je čtvercové. Pravá strana je rovna nule, proto je třeba ověřit, zda je i součet na levé straně nulový. Pro $d$ čtvercová jsou příslušné členy v součtu nulové, stačí proto sčítat přes bezčtvercová $d$. Zároveň musí každé takové $d$ dělit číslo $n$ ve druhé mocnině, takže může mít ve svém prvočíselném rozkladu jen ta prvočísla, která také dělí $n$ alespoň ve druhé mocnině. Pokud označíme $k$ součin všech takovýchto prvočísel ($k > 1$, neboť $n$ je čtvercové), dostaneme rovnost

$$\sum_{d^2\,|\,n} \mu(d) = \sum_{d\,|\,k} \mu(d).$$

Pravá strana je rovna nule, neboť sumární funkce k $\mu$ je rovna nule pro všechna $k$ větší než jedna.

POZNÁMKY:
Většina příchozích řešení byla správně. Občas byl problém s formulací myšlenek týkajících se přechodu od původní sumy k sumě, která se dá dobře sečíst. Vyzdvihl bych přístup *Ondřeje Bínovského*, jenž chytře použil multiplikativitu obou stran rovnosti a dokázal obecnější tvrzení (můžete se také zamyslet, jak vypadá rovnost, když místo dvojky v exponentu dáme obecné $k$).

*(Josef Svoboda)*

## Úloha 2.

(15; 13; 4,40; 5,0)

*Víme, že platí známý vztah*

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \Big(\sum_{i=1}^{n} i\Big)^2.$$

*Dokažte, že pokud je $\tau(n)$ počet dělitelů čísla $n$, pak také*

$$\sum_{d\,|\,n} \tau(d)^3 = \Big(\sum_{d\,|\,n} \tau(d)\Big)^2.$$

*(Josef Svoboda)*

Řešení:

Jelikož součin i konvoluce zachovávají multiplikativitu a funkce $\tau$ je multiplikativní, jsou multiplikativní i funkce na obou stranách rovnosti. Stačí tedy dokázat rovnost pro $n = p^k$. Ale dělitelé čísla $p^k$ jsou $p^0, \dots, p^k$ a $\tau(p^a) = a + 1$. S využitím rovnosti ze zadání platí:

$$\sum_{d|p^k} \tau(d)^3 = \sum_{a=0}^{k} \tau(p^a)^3 = \sum_{a=0}^{k} (a+1)^3 = \sum_{a=1}^{k+1} a^3 = \Big(\sum_{a=1}^{k+1} a\Big)^2 = \Big(\sum_{d|p^k} \tau(d)\Big)^2.$$

Poznámky:

Bohužel ne příliš mnoho řešitelů využilo toho, že obě strany jsou multiplikativní, a tak obvykle rozkládali $n$ na prvočísla a postupovali indukcí. Naštěstí to ale nevedlo k o moc složitějším výrazům. Přitom ale část zapomněla zmínit možnost $n = 1$, tedy případ, kdy $n$ na prvočísla rozložit nejde. (Všimněte si, že ve vzorovém řešení jsme tento případ zvlášť řešit nemuseli, protože multiplikativní funkce je dána svými hodnotami v číslech $p^k$. V jedničce se nutně rovná jedné.) Skoro každý, kdo se do úlohy pustil, ji také dotáhl do konce. Tak jen škoda, že to nezkusilo více z vás. *(Štěpán Šimsa)*

## Úloha 3. (20; 18; 4,00; 5,0)

*Mějme číslo $n$. Dokažte, že počet dělitelů čísla $n$ tvaru $4k+1$ je alespoň takový, jako počet dělitelů čísla $n$ tvaru $4k+3$.* *(Štěpán Šimsa)*

Řešení:

Definujme funkci $\chi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ takto:

$$\chi(n) = \begin{cases} 0, & \text{pro } n \equiv 0 \pmod 2, \\ 1, & \text{pro } n \equiv 1 \pmod 4, \\ -1, & \text{pro } n \equiv 3 \pmod 4. \end{cases}$$

Zadání úlohy říká, že máme pro všechna přirozená čísla $n$ dokázat nerovnost

$$\sum_{d|n} \chi(d) \geq 0.$$

Označme ještě $\eta(n) = (\chi * u)(n)$. Funkce $\chi$ je multiplikativní, proto je (podle tvrzení ze seriálu) multiplikativní i $\eta$. Stačí proto dokázat $\eta(n) \geq 0$ pro $n$ tvaru $p^j$, kde $p$ je prvočíslo a $j$ přirozené číslo.

Pokud $p = 2$, je $\eta(2^j) = 1$, protože mocniny dvojky nemají kromě jedničky žádné liché dělitele.

Je-li $p$ tvaru $4k+1$, pak všichni dělitelé $p^j$, což jsou nižší mocniny $p$, jsou také tvaru $4k+1$, a tvrzení tak platí.

Konečně je-li $p$ tvaru $4k+3$, pak dělitelé tvaru $4k+1$ jsou právě všechny sudé mocniny $p$ (včetně nulté; nejvýše $j$-tá), naopak dělitelé tvaru $4k+3$ jsou všechny liché mocniny $p$ (nižší než $j$-tá). Pro lichá $j$ pak dostaneme rovnost počtu obou druhů dělitelů, pro sudá budeme mít o jednoho dělitele tvaru $4k+1$ více.

Tvrzení tedy platí pro všechny mocniny prvočísel, což se dá pomocí multiplikativity rozšířit na nerovnost pro všechna přirozená čísla.

Poznámky:

Mnoho řešitelů bohužel neřešilo úlohu pomocí znalostí nabytých v seriálu, nýbrž většinou rozebírali různé možnosti, nejprve podobně jako ve vzorovém řešení dokázali úlohu pro mocniny prvočísel a poté pomocí nějakého druhu indukce dokázali úlohu pro všechna $n$. Při rozebírání možností a diskutování, co se stane, pokud číslo $n$ vynásobíme nějakým novým dělitelem, je bohužel velmi snadné zapomenout na nějaké možnosti, za což jsem občas strhával body. Zároveň si můžete rozmyslet, že všechny myšlenky, které se vyskytly při řešení indukcí a bez zavedení funkce $\chi$, jsou prakticky totožné jako myšlenky ve vzorovém řešení, kde jsou však formálněji sepsané. *(Martin Čech)*