# Povídání ke druhé jarní sérii

Tématem druhé jarní série jsou iracionální čísla. Většina z vás je už určitě zná ze školy, jistě však nebude na škodu si o nich něco připomenout. V běžném životě často pracujeme s čísly přirozenými a celými. K tomu, abychom mohli bez problémů dělit, byla zavedena čísla racionální. To jsou všechna čísla, která se dají napsat ve tvaru $\frac{a}{b}$, kde $a$ je celé a $b$ přirozené. Jsou-li navíc $a$ a $b$ nesoudělná, je tento zápis jednoznačný a říkáme, že zlomek $\frac{a}{b}$ je v základním tvaru.

Všechna racionální čísla se v desítkové soustavě (ale i v jiných soustavách) dají vyjádřit pomocí desetinného zápisu, který je buď ukončený (tj. za desetinnou čárkou je pouze konečně mnoho číslic), nebo periodický (tj. od určitého místa za desetinnou čárkou se opakuje stále stejná konečná posloupnost číslic). Periodu obvykle značíme „nadčarou“. Uvedeme několik příkladů racionálních čísel: $\frac{3}{5} = 0{,}6$, $\frac{41}{80} = 0{,}5125$, $\frac{2}{3} = 0{,}\overline{6}$ $\frac{116}{495} = 0{,}2\overline{34}$. Není těžké si rozmyslet, že součet, rozdíl, součin i podíl dvou racionálních čísel je opět racionální (u podílu musíme předpokládat, že dělitel není roven nule).

Na kladná racionální čísla můžeme pohlížet jako na délky úseček – udávají vzdálenost dvou bodů. Přirozeně vyvstává otázka, zdali existují i vzdálenosti, které se nedají zapsat jako podíl dvou celých čísel. Odpověď znali už staří Řekové, kteří uměli dokázat, že takové vzdálenosti opravdu existují. Příkladem je délka úhlopříčky ve čtverci o straně 1, jak uvidíme později. Tato čísla – spolu s čísly k nim opačnými – nazýváme iracionální.

Racionální čísla spolu s iracionálními tvoří čísla reálná. Iracionální čísla nelze zapsat ve tvaru podílu dvou celých čísel, což je ekvivalentní tomu, že mají neukončený neperiodický desetinný rozvoj. Řadí se mezi ně slavná čísla jako $\pi$, udávající poměr obvodu a průměru kružnice, nebo Eulerovo číslo $e$. Kromě těchto čísel, o kterých je relativně obtížné dokázat, že opravdu jsou iracionální, existují i taková, o kterých to jde dokázat relativně snadno.

**Tvrzení.** *Číslo $\sqrt{2}$ je iracionální.*

*Důkaz.* Pro spor předpokládejme, že $\sqrt{2}$ je racionální. Existují tedy dvě celá čísla $p$, $q$ taková, že $\sqrt{2} = p/q$. Po umocnění na druhou a následném vynásobení $q^2$ dostaneme, že musí platit $2q^2 = p^2$. Jelikož $p$, $q$ jsou celá čísla, musí být v prvočíselných rozkladech $p^2$, $q^2$ dvojka v sudé mocnině. To ale znamená, že na levé straně poslední rovnice je dvojka v liché mocnině, zatímco na pravé straně v sudé. Tato rovnost tedy nemůže platit pro žádná celá $p$, $q$, a proto je $\sqrt{2}$ iracionální.

Výše uvedený důkaz lze zobecnit. Zjistíme tak, že pokud přirozené číslo není druhou mocninou jiného přirozeného čísla, pak už je jeho odmocnina nutně iracionální. Podobně lze důkaz upravit i pro vyšší odmocniny.

Přestože je obecně velmi těžké dokázat iracionalitu nějakého čísla, ukazuje se, že v jistém smyslu je iracionálních čísel mnohem více než racionálních.[1] Není těžké si rozmyslet a dokázat, že součet či součin nenulového racionálního čísla s iracionálním je vždy iracionální. Tento fakt

[1] Jak porovnat velikosti nekonečných množin? Toto téma je zajímavé, leč velmi rozsáhlé a nesouvisející s touto sérií. Zvídavý čtenář se o něm může dozvědět v knihovně na našich internetových stránkách: *http://mks.mff.cuni.cz/archive/21/10.pdf*

můžete ve svých řešeních bez důkazu používat. O součtu či součinu dvou iracionálních čísel však nelze obecně nic říct (např. $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ je iracionální, ale $\sqrt{2} + (10 - \sqrt{2})$ je racionální).

Na závěr si ukážeme ještě jeden příklad, jak dokázat, že je nějaké číslo iracionální.

**Úloha.** Dokažte, že číslo 0,1234567891011 ..., ve kterém za desetinnou čárku postupně píšeme všechna přirozená čísla, je iracionální.

*Řešení.* Pro spor předpokládejme, že toto číslo je racionální. Jeho desetinný rozvoj zjevně není ukončený, proto musí být periodický. Nechť má tedy periodu délky $n$ a předperiodu délky $m$. Za desetinnou čárkou však umíme najít posloupnost alespoň $m + n$ nul za sebou (například v čísle $10^{m+n}$). Z těchto nul je nejvýše $m$ v předperiodě a alespoň $n$ za ní, takže perioda musí být složena ze samých nul. Podobně ale umíme najít i posloupnost $m+n$ jedniček, dvojek, ..., čímž dostáváme spor. Původní předpoklad tedy neplatí a číslo 0,1234567891011 ... je skutečně iracionální.

Nyní už víte vše, co potřebujete, tak směle do řešení další série!