Povídání k třetí podzimní sérii

Třetí podzimní série prověří Tvoji zdatnost v práci s funkcemi. Tento text by Ti měl pomoci zorientovat se v zadáních úloh a osvětlit některé důležité pojmy. Pokud však zadáním rozumíš už teď, není třeba jej číst příliš podrobně.

Co je funkce?

Pravděpodobně nejnázornější pohled na funkce (někdy též zvané *zobrazení*) je ten, že funkci vnímáme jako tajemnou černou krabičku. Tato krabička přijímá nějaké vstupy[1] a v závislosti na tom, jaký vstup dostane, vydá výstup. Množinu všech vstupů funkce f nazýváme *definičním oborem* a značíme zpravidla D_f nebo $D(f)$, množinu všech výstupů nazýváme *oborem hodnot* a značíme H_f nebo $H(f)$.

Formálněji můžeme říci, že funkce $f\colon X \to Y$ je přiřazení, v němž každému $x \in X$ odpovídá právě jedno $y \in Y$.[2] Tento zápis nám tedy prozrazuje, že funkce f je definována na celém X ($D(f) = X$). O tom, jestli tato funkce nabývá všech hodnot z Y, ovšem nic neříká.

Rovností funkcí $f = g$ rozumíme, že $D(f) = D(g)$ a zároveň $f(x) = g(x)$ pro všechna x z definičního oboru. Rovnost $f(x) = g(x)$ přitom znamená, že funkční hodnoty v bodě x jsou u obou funkcí stejné.

Definujeme-li funkci předpisem, musíme uvádět její definiční obor vždy, když není zřejmý z kontextu. Pokud tedy napíšeme pouze $f(x) = x^2$, nedefinujeme tím žádnou funkci, neboť o x nic nevíme. Dále je dobré si uvědomit, že funkce není totéž, co předpis funkce. Uvážíme-li například

$$f(x) = x^2 - 1,\ x \in \mathbb{R}, \qquad g(x) = (x+1)(x-1),\ x \in \mathbb{R},$$

vidíme, že ačkoliv se předpisy těchto dvou funkcí liší, platí $f = g$.

Některé funkce navíc vůbec nemusejí být dány vzorcem. Takovou funkcí může být třeba $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$, která každému reálnému číslu přiřadí počet sedmiček v jeho desetinném zápisu, pokud jich je konečně mnoho, a -1 v opačném případě.

Vlastnosti funkcí

U funkcí rozlišujeme různé vlastnosti, jejichž znalost nám mnohdy může značně pomoci při řešení úloh. Zde je uveden seznam těch, se kterými se shledáváme nejčastěji. Funkce $f\colon X \to Y$ je

(i) *rostoucí*, pokud pro každá dvě $x, y \in X$ taková, že $x > y$, platí $f(x) > f(y)$,
(ii) *klesající*, pokud pro každá dvě $x, y \in X$ taková, že $x > y$, platí $f(x) < f(y)$,
(iii) *neklesající*, pokud pro každá dvě $x, y \in X$ taková, že $x > y$, platí $f(x) \geq f(y)$,
(iv) *nerostoucí*, pokud pro každá dvě $x, y \in X$ taková, že $x > y$, platí $f(x) \leq f(y)$,
(v) *monotónní*, pokud je nerostoucí nebo neklesající,

[1] Těm formálněji říkáme *argumenty.*

[2] Písmena X, Y značí nějaké (libovolné) množiny. My si ale vystačíme s běžně používanými číselnými množinami, jimiž jsou například přirozená nebo reálná čísla.

(vi) *periodická*, pokud existuje kladné reálné číslo t takové, že pro všechna $x \in X$ platí $x \pm t \in X$ a zároveň $f(x) = f(x+t)$,[3]
(vii) *sudá*, pokud pro každé $x \in X$ platí $-x \in X$ a zároveň $f(x) = f(-x)$,
(viii) *lichá*, pokud pro každé $x \in X$ platí $-x \in X$ a zároveň $f(x) = -f(-x)$,
(ix) *prostá*, pokud nabývá každé hodnoty nejvýše jednou, tedy pokud pro každá dvě $x, y \in X$ taková, že $x \neq y$, platí $f(x) \neq f(y)$,
(x) *na*, pokud nabývá každé hodnoty z Y alespoň jednou, tedy pokud pro každé $z \in Y$ existuje $x \in X$ takové, že $f(x) = z$,
(xi) *bijekce*, pokud je prostá a zároveň na, tedy pokud nabývá každé hodnoty z množiny Y právě jednou.

Abychom se s výše uvedenými pojmy seznámili, vyřešíme si následující příklad.

Příklad. Dokažte, že periodická funkce nemůže být rostoucí.

Řešení. Předpokládejme, že funkce f je periodická s nějakou periodou t. Dále si zvolme libovolné x_0 z definičního oboru funkce f. Protože t je kladné číslo, platí $x_0 + t > x_0$. Zároveň ale z definice periodické funkce vyplývá, že $f(x_0 + t) = f(x_0)$. Tedy f nemůže být rostoucí.

Skládání funkcí

Při práci s funkcemi se můžeme setkat s pojmem *skládání funkcí*. Abychom si tento termín vysvětlili, opět se vrátíme ke „krabičkovému modelu funkcí“. Předpokládejme, že máme dvě krabičky (funkce) takové, že výstupy jedné fungují jako vstupy té druhé, ze které vycházejí nějaké finální výstupy. Tyto dvě funkce se tedy dohromady chovají jako jedna samostatná funkce. Tomuto „zapojování funkcí za sebe“ říkáme skládání.

Poněkud formálněji se můžeme na skládání funkcí dívat takto: Mějme funkce $f\colon A \to B$, $g\colon B \to C$ a definujme funkci $g \circ f$ předpisem $(g \circ f)(x) = g(f(x))$,[4] přičemž definičním oborem této funkce je množina A. Funkci $g \circ f$ nazýváme složenou funkcí.

Povšimni si ale, že vnitřní funkce musí zobrazovat do definičního oboru vnější funkce. Kdybychom tedy chtěli složit $f \circ g$, musela by být množina C podmnožinou množiny A.

Dále je důležité si uvědomit, že $f \circ g$ není totéž jako $g \circ f$. Položme $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}; f(x) = x^2$, $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}; g(x) = x - 1$. Pak pro každé reálné x máme $(f \circ g)(x) = (x-1)^2$, zatímco $(g \circ f)(x) = x^2 - 1$. Tedy například $(f \circ g)(0) = 1 \neq -1 = (g \circ f)(0)$.

Funkcionální rovnice

Bavíme-li se o funkcionálních rovnicích, máme na mysli rovnice, v nichž jsou neznámými funkce, nikoliv čísla. Jinak řečeno, hledáme funkce (resp. jejich předpisy) takové, že pro všechna možná čísla z nějaké množiny platí zadaná rovnost. Obecný postup řešení těchto rovnic neexistuje, většinou ale postupujeme v několika základních krocích. Prvním z nich je předpoklad, že nějaká funkce f je řešením naší rovnice. Druhým je zjišťování vlastností této funkce za pomoci dané rovnice (většinou tak, že dosazujeme konkrétní hodnoty). Posledním, často opomíjeným krokem je ověření, že námi nalezená funkce je opravdu řešením dané rovnice. Pro objasnění si vyřešme dva ilustrační příklady:

Příklad. Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující pro všechna reálná x, y vztah

$$f(xy) = yf(x).$$

[3] Číslo t se pak nazývá *periodou* funkce f.

[4] Právě kvůli tomuto předpisu říkáme funkci, do které vstupují x, *vnitřní* a té druhé *vnější*.

Řešení. Předpokládejme, že funkce f je řešením dané rovnice. Zadaný vztah má platit pro všechny dvojice x, y, takže musí speciálně platit pro ty dvojice, v nichž je $x = 1$, neboli

$$\begin{aligned} f(1 \cdot y) &= yf(1), \\ f(y) &= yf(1). \end{aligned}$$

Úprava, kterou jsme právě udělali, není ekvivalentní, protože zkoumá pouze jeden konkrétní případ $x = 1$. Může tedy existovat funkce, která neřeší naši rovnici, ale tomuto konkrétnímu případu vyhovuje. Proto musíme při řešení funkcionálních rovnic vždy provádět zkoušku.

Teď, poučeni o nutnosti zkoušky, pokračujme v řešení. Protože $f(1)$ je nějaké (neměnné) reálné číslo, můžeme jej označit $c = f(1)$ a psát $f(y) = cy$. Nyní stačí zjistit, pro která c je funkce $f(y) = cy$ opravdu řešením. Dosazením do původní rovnice dostáváme:

$$\begin{aligned} f(xy) &= yf(x), \\ c \cdot xy &= y \cdot cx, \end{aligned}$$

což platí pro všechna reálná c. Řešením jsou tedy všechny funkce tvaru $f(x) = cx$, kde c je nějaké pevné reálné číslo.

Možná Tě překvapilo, že jsme na konci řešení nedělali zkoušku. Ve skutečnosti jsme ji ale provedli, byť poněkud skrytě, v posledním kroku.

Příklad. Nalezněte všechny funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vyhovující pro všechna $x, y \in D(f)$ rovnici

$$f(xy) = x + f(y).$$

Řešení. Předpokládejme, že funkce f vyhovuje zadání, a do rovnice dosaďme $y = 1$. Po úpravě získáme $f(x) = x + f(1)$. Tedy $f(x)$ je tvaru $x + c$, kde c je reálné číslo. Nyní už nám zbývá jen zjistit, pro která c je funkce $f(x) = x + c$ řešením. Víme, že pro všechna x, y má být splněn vztah $f(xy) = x + f(y)$, tedy:

$$\begin{aligned} xy + c &= x + y + c, \\ xy &= x + y. \end{aligned}$$

Tento výraz však neplatí pro všechna reálná čísla x, y, takže námi nalezená funkce neřeší rovnici pro žádné reálné c. Zadaná rovnice tedy nemá řešení.

Pro hlubší seznámení s tématem funkcionálních rovnic doporučujeme prostudovat nějaký z textů k sérii na téma funkcionální rovnice z minulých ročníků (ty je možné nalézt v sekci našich stránek „minulé ročníky“), nebo nějaký z příspěvků o funkcionálních rovnicích v knihovně na našich internetových stránkách.[5]

[5] *http://mks.mff.cuni.cz/library/FunkcionalniRovniceVM/FunkcionalniRovniceVM.pdf*