# Čtverečkovaný papír

1. PODZIMNÍ SÉRIE TERMÍN ODESLÁNÍ: 30. ZÁŘÍ 2013

ÚLOHA 1. (3 BODY)
Anička našla o hodině v penálu čtverečkovaný papír $9 \times 9$, i rozhodla se ho po čarách rozstříhat na několik čtverců. Chtěla, aby jich bylo celkem deset a aby takto získala každý ze čtverců $1\times1, \ldots, 5\times5$ aspoň jednou. Mohlo se jí to podařit?

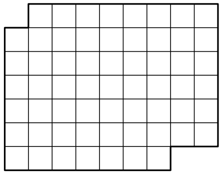
ÚLOHA 2. (3 BODY)
Martin má čtverečkovaný papír $n \times n$. Rozstřihl ho rovně na dva kusy. Kolik nejvíce čtverečků mohl přestřihnout?[1] Svou odpověď zdůvodněte.

ÚLOHA 3. (3 BODY)
Mějme na všechny strany nekonečný čtverečkovaný papír. Do každého průsečíku namalujeme puntík jednou ze čtyř barev tak, aby vrcholy každého čtverečku měly různé barvy. Dokažte, že pak se na nějaké (svislé nebo vodorovné) čáře vyskytují body pouze dvou barev.

ÚLOHA 4. (5 BODŮ)
Mějme čtverečkovaný papír $m \times n$. Kolika způsoby můžeme strany všech čtverečků obarvit pomocí tří barev tak, aby každý čtvereček měl právě dvě strany obarvené jednou barvou a zbývající dvě nějakou jinou jednou barvou? Strany, kterými se sousedící čtverečky dotýkají, považujeme za totožné.

ÚLOHA 5. (5 BODŮ)
Vejtek si na čtverečkovaný papír nakreslil trojúhelník. Tvrdí, že všechny jeho vrcholy, střed kružnice opsané, střed kružnice vepsané, průsečík výšek i těžiště leží ve vrcholech nějakých čtverečků. Může mít pravdu?

ÚLOHA 6. (5 BODŮ)
Je možné rozstřihnout útvar na obrázku na dvě části stejného tvaru[2] a velikosti, je-li dovoleno stříhat pouze po vyznačených čarách?



[1] Čtvereček je přestřižený, jestliže na každém z dílů je aspoň kousek jeho obsahu.
[2] Přípustné je otáčení a zrcadlové převracení.

Úloha 7. (5 bodů)

Martina a Olin hrají na čtverečkovaném papíru o rozměrech $6 \times 6$ následující hru. Střídavě píšou do jednotlivých čtverečků reálná čísla, která se na papíře ještě nevyskytují. Po vyplnění celého papíru zeleně vybarví maximum v každém řádku. Olin vyhraje, pokud existuje cesta shora dolů vedoucí pouze skrz zelené čtverečky[3], v opačném případě vyhrává Martina. Kdo vyhraje, když Olin začíná a oba volí nejlepší možnou strategii?

Úloha 8. (5 bodů)

Na čtverečkovaném papíru o rozměrech $n \times n$ ($n \geq 3$) vybarvíme některé čtverečky černě a následně dva protější okraje slepíme. Ukažte, že na vzniklém válci jsou alespoň dva řádky, sloupce nebo rovnoběžné diagonály, které obsahují tentýž počet černých čtverečků.

[3]Dva čtverečky, které sousedí pouze rohem, považujeme také za sousední.