Teorie čísel

1. seriálová série — Termín odeslání: 2. prosince 2013

Úlohy nejsou řazeny podle obtížnosti, do výsledného hodnocení se počítají body za všechny tři úlohy.

Úloha 1. (5 bodů)

Nechť n, k jsou přirozená čísla a k je bezčtvercové.[3] Předpokládejme, že

$$\frac{n^3 + 2n^2 + k}{n^2 + k}$$

je celé číslo. Dokažte, že pak už platí $n = k$.

Úloha 2. (5 bodů)

Mějme přirozené číslo $n \geq 2$. Dokažte, že každé z čísel $n! + 2, n! + 3, \dots, n! + n$ má takového prvočíselného dělitele, který není dělitelem žádného z $n - 2$ zbylých čísel.

Úloha 3. (5 bodů)

Mějme celé číslo n a prvočíslo p. Víme, že platí

$$2^{4n} + 9^{2n} \equiv 36^n \pmod{p}.$$

Dokažte, že p je tvaru $4k + 1$ pro nějaké celé číslo k.

[3] Tedy neexistuje přirozené číslo $a > 1$ takové, že $a^2 \mid k$.